DERS 3:
BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

> ***Dersin Amacı:*** Birinci mertebeden özel formlardaki diferansiyel denklemlerin analitik çözüm yöntemlerini öğretmek.

Ç) Homojen Denklemler

Bir α reel sayısı için $f\left(tx,ty\right)=t^{\alpha}f(x,y)$ şeklindeki özelliği sağlayan f fonksiyonuna α ıncı dereceden homojen fonksiyon denir. Özel olarak $f\left(tx,ty\right)=f(x,y)$ ise f fonksiyonuna sıfırıncı dereceden homojen fonksiyon denir. Örneğin, $f(x,y)=x^3+y^3$ fonksiyonu 3. dereceden homojen fonksiyondur, çünkü

$$f(tx,ty)=(tx)^3+(ty)^3=t^3\left(x^3+y^3\right)=t^3f(x,y) \text{ dir.}$$

Fakat, $f(x,y)=x^3+y^3+1$ fonksiyonu verilen özelliği sağlamadığından homojen değildir.

Eğer $f(x,y)$ fonksiyonu α ıncı dereceden homojen ise:

$$f(x,y)=x^{\alpha}f\left(1,\frac{y}{x}\right) \quad \text{ve} \quad f(x,y)=y^{\alpha}f\left(\frac{x}{y},1\right)$$

şeklindeki özellikleri sağlar. Örneğin, $f(x,y)=x^2+3xy+y^2$ fonksiyonu 2. dereceden homojen fonksiyondur. O halde,

$$f(x,y)=x^2\left[1+3\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]=x^2f\left(1,\frac{y}{x}\right)$$

$$f(x,y)=y^2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2+3\left(\frac{x}{y}\right)+1\right]=y^2f\left(\frac{x}{y},1\right).$$

Bu özellikler uygulamalarda bizlere kolaylık sağlayacaktır. Bunları birazdan göreceğiz.

> ***Tanım 3.1:***
>
> $$M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0 \tag{3.1}$$
>
> formundaki 1. mertebeden diferansiyel denklemi ele alalım. Eğer $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonları aynı dereceden homojen fonksiyonlar ise (3.1) denklemi ***homojen denklem*** olarak adlandırılır.

Not: Eğer 1. mertebeden diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{3.2}$$

formunda düşünülürse; bu durumda da $f(x,y)$ fonksiyonu sıfırıncı dereceden homojen fonksiyon olduğunda denklem yine ***homojen denklem*** olarak adlandırılır.

Çözüm Metodu:

a) $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ biçimindeki denklem homojen olsun. Bu durumda M ve N fonksiyonları aynı dereceden homojen fonksiyonlardır. Kabul edelim ki her ikisi de α ıncı dereceden olsun. O halde,

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \quad \Rightarrow \quad x^{\alpha}M\left(1,\frac{y}{x}\right)dx+x^{\alpha}N\left(1,\frac{y}{x}\right)dy=0$$

$$\Rightarrow \quad M\left(1,\frac{y}{x}\right)dx+N\left(1,\frac{y}{x}\right)dy=0$$

Şimdi $\frac{y}{x}=u$ dersek $y=xu$ dan $dy=udx+xdu$ elde edilir. Bunlar yukarıdaki denklemde kullanılırsa:

$$M(1,u)dx+N(1,u)\left[udx+xdu\right]=0 \quad \Rightarrow \quad \left[M(1,u)+u\,N(1,u)\right]dx+x\,N(1,u)du=0$$

$$\frac{1}{x}dx+\frac{N(1,u)}{M(1,u)+u\,N(1,u)}du=0$$

şeklinde integrali alınabilir formda bir denklem elde ederiz.

Not: $\frac{x}{y}=v$ değişken değiştirmesi yapılması durumunu benzer şekilde siz inceleyiniz.

Sonuç olarak, verilen bir homojen diferansiyel denklem $\frac{y}{x}=u$ veya $\frac{x}{y}=v$ değişken değiştirmesi yapıldığında değişkenlerine ayrılabilir formda diferansiyel denkleme indirgenebilmektedir.

b) $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ biçimindeki denklem homojen olsun. Bu durumda $f(x,y)$ sıfırıncı dereceden homojen fonksiyondur. Dolayısıyla $\frac{dy}{dx}=f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=f\left(1,\frac{y}{x}\right)$ şeklinde yazılabilir. Şimdi $\frac{y}{x}=u$ dersek $y=xu$ dan $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ bulunur. Bunları verilen denklemde yerine yazarsak:

$$u+x\frac{du}{dx}=f(1,u)=F(u) \quad\Rightarrow\quad x\frac{du}{dx}=F(u)-u \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{F(u)-u}du=\frac{dx}{x}$$

şeklinde integrali alınabilir formda bir denklem elde ederiz.

Örnek 3.1: $\left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-xy\right)dy=0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y)=x^2+y^2$ ve $N(x,y)=x^2-xy$ göz önüne alındığında her ikisinin de 2. dereceden homojen fonksiyonlar oldukları anlaşılmaktadır. O halde verilen denklem homojendir. Çözüm metodu (a) daki yol takip edilirse:

$$\left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-xy\right)dy=0 \quad\Rightarrow\quad x^2\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]dx+x^2\left[1-\left(\frac{y}{x}\right)\right]dy=0$$

$$\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]dx+\left[1-\left(\frac{y}{x}\right)\right]dy=0,\quad \frac{y}{x}=u \quad\Rightarrow\quad y=xu \quad\Rightarrow\quad dy=udx+xdu$$

$$\left(1+u^2\right)dx+\left(1-u\right)\left(udx+xdu\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \left[1+u^2+u\left(1-u\right)\right]dx+x\left(1-u\right)du=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{1-u}{1+u}du=0 \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dx}{x}+\int\frac{1-u}{1+u}du=c_1 \quad\Rightarrow\quad \ln|x|+\int\left(-1+\frac{2}{1+u}\right)du=-\ln|c|$$

$$\ln|x|+\ln|c|-u+2\ln|1+u|=0 \quad\Rightarrow\quad \ln\left|cx\left(1+u\right)^2\right|=u \quad\Rightarrow\quad cx\left(1+u\right)^2=e^u$$

$$cx\left(1+\frac{y}{x}\right)^2=e^{y/x} \quad\Rightarrow\quad c\left(x+y\right)^2=xe^{y/x} \qquad \text{bulunur.}$$

Örnek 3.2: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+5y^2}{4xy}$, $y(1)=1$, başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm: $f(x,y)$ nin sıfırıncı dereceden homojen fonksiyon olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla verilen denklem homojendir. Çözüm metodu (b) deki yol takip edilirse:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+5y^2}{4xy} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{x^2\left[1+5\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]}{4x^2\left(\frac{y}{x}\right)} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1+5\left(\frac{y}{x}\right)^2}{4\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$\dfrac{y}{x}=u$ dersek $y=xu$ dan $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$ bulunur. Bunlar yukarıda yerine yazılırsa:

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+5u^2}{4u} \quad\Rightarrow\quad x\frac{du}{dx}=\frac{1+5u^2}{4u}-u \quad\Rightarrow\quad x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{4u} \quad\Rightarrow\quad \frac{4u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{4u}{1+u^2}du = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad 2\ln\left(1+u^2\right) = \ln|x| + \ln c \quad \Rightarrow \quad \left(1+u^2\right)^2 = c|x|$$

Burada c pozitif bir keyfi sabittir. x işaret değiştiremeyeceğinden dolayı aşağıdaki şekilde tanımlı yeni bir c_1 sabiti kullanarak mutlak değerden kurtulabiliriz:

$$c_1 = \begin{cases} c, & x > 0 \\ -c, & x < 0 \end{cases}$$

Buradan $\left(1+u^2\right)^2 = c_1 x \quad \Rightarrow \quad \left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^2 = c_1 x \quad \Rightarrow \quad \left(x^2+y^2\right)^2 = c_1 x^5$ bulunur.

$y(1) = 1$ başlangıç koşulu kullanılırsa $\left(1^2+1^2\right)^2 = c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 4$ olarak elde edilir. Sonuçta verilen başlangıç değer probleminin çözümü $\left(x^2+y^2\right)^2 = 4x^5$ biçiminde bulunur.

Örnek 3.3: $x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{9x^2+y^2}, \quad x > 0$, denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Verilen denklemi $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{9x^2+y^2}+y}{x}$ şeklinde yeniden yazalım. Buradan

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2\left[9+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]}+y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{|x|\sqrt{\left[9+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]}+y}{x}$ olur. Verilen problemde $x > 0$ olduğundan $|x| = x$ tir. Bu kullanıldığında $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left[9+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]} + \frac{y}{x}$ olur. $\frac{y}{x} = u$ dersek $y = xu$ dan $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ bulunur. Bunlar yerine yazılırsa:

$$u + x\frac{du}{dx} = \sqrt{9+u^2} + u \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \sqrt{9+u^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\sqrt{9+u^2}} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{\sqrt{9+u^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

Genel matematik derslerinden hatırlanacak olursa: $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + c$ dir.

$$\int \frac{du}{\sqrt{9+u^2}} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(u+\sqrt{9+u^2}\right) = \ln x + \ln c_1, \quad c_1 > 0 \Rightarrow \quad \ln\left(u+\sqrt{9+u^2}\right) = \ln\left(c_1 x\right)$$

$u + \sqrt{9+u^2} = c_1 x \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} + \sqrt{9+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = c_1 x \quad \Rightarrow \quad y + \sqrt{9x^2+y^2} = c_1 x^2$ sonucu bulunur.

DERS 3: ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki diferansiyel denklemleri çözünüz.

a) $(3x-2y)\dfrac{dy}{dx}=3y$

b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(x+y)^2}{2x^2}$

c) $\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\left[x\dfrac{dy}{dx}-y\right]=x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$

ç) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sqrt{16x^2-y^2}+y}{x},\quad x>0$

d) $(2x-y)dy-(x+2y)dx=0$

e) $y\left(x^2-y^2\right)dx-x\left(x^2+y^2\right)dy=0$

f) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2+2xy-2x^2}{x^2-xy+y^2}$

g) $2xy\,dy-\left(x^2e^{-y^2/x^2}+2y^2\right)dx=0$

ğ) $x\dfrac{dy}{dx}+y\ln x=y\ln y$

h) $x^2\dfrac{dy}{dx}=y^2+3xy+x^2$

ı) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y},\quad x>0$

i) $2x(y+2x)\dfrac{dy}{dx}=y(4x-y)$

j) $x\dfrac{dy}{dx}=x\tan\left(\dfrac{y}{x}\right)+y$

k) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x\sqrt{x^2+y^2}+y^2}{xy},\quad x>0$

2. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözünüz.

a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y}{x+4y},\quad y(1)=1$

b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2(2y-x)}{x+y},\quad y(0)=2$

c) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x},\quad y(3)=4$

ç) $x\dfrac{dy}{dx}=y+xe^{y/x},\quad y(1)=1$

d) $\left(y^2+3xy\right)dx=\left(4x^2+xy\right)dy,\quad y(1)=1$

e) $y^3dx=2x^3dy-2x^2y\,dx,\quad y(1)=\sqrt{2}$