

KUANTUM MEKANİĞİ:

S1	S2	T

S1: Spin kuantum sayısı 1/2 olan bir parçacığın spinaçıl momentumu şöyledir. $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ burada

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Bütün bileşenlerin özdeğerlerini ve normalizeözvektörlerini bulunuz.

1/2 spinli, m kütleli ve e yüklü bir parçacık sabit $\vec{B}$ manyetik alanı içindeyse parçacığın hamilton işlemcisi

$$H = \frac{ge}{2m} \vec{S} \cdot \vec{B}$$

olur. Burada g bir sabit. Bu parçacığın durumu aşağıdaki gibi 2-bileşenli spinör ile temsil edilebilir.

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} \alpha_+(t) \\ \alpha_-(t) \end{bmatrix}$$

(b) z eksenini $\vec{B}$ ye paralel seçerek $\psi(t)$ belirleyiniz.

(c) $t = 0$ anında spinör S_x in $+\hbar$ özdeğerli durumundaysa $\psi(t)$ yi yeniden yazınız.

(d) Bu durumda iken S_z ölçülürse hangi olasılıkla ne ölçülür?

(e) Sabit manyetik alan içindeki bir $\vec{S}$ vektörü en genelde nasıl bir hareket yapar?

S2: Hidrojen atomunun durumu aşağıdaki normalize dalga fonksiyonuyla temsil edilmektedir.

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \exp(-r/a)$$

Burada $a = \hbar^2 / me^2$ Bohr yarıçapıdır.

(a) $p_r = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r}$ ise $\Delta r \Delta p_r = ?$ (b) $p_r = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right)$ ise $\Delta r \Delta p_r = ?$

Bazı faydalı bilgiler.

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\Delta O = \sqrt{\langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right)$$

$$(c) 1) (S_x - \lambda) u = 0 \Rightarrow det(0) = 0 \Rightarrow \lambda = \mp \frac{\hbar}{2}$$

$$(a) |X\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad |X\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$S_y \text{ için } \lambda = \mp \frac{\hbar}{2} \Rightarrow |Y\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad |Y\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$S_z \text{ için } \lambda = \mp \frac{\hbar}{2} \Rightarrow |Z\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad |Z\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_+ \\ \dot{\alpha}_- \end{pmatrix} = -i \frac{geB}{4m} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix}$$

$$\omega = \frac{geB}{4m} \text{ diyelim}$$

$$\dot{\alpha}_+ + i\omega \alpha_+ = 0 \Rightarrow \alpha_+ = c_1 e^{-i\omega t}$$

$$\dot{\alpha}_- - i\omega \alpha_- = 0 \Rightarrow \alpha_- = c_2 e^{i\omega t}$$

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-i\omega t} \\ c_2 e^{i\omega t} \end{pmatrix}$$

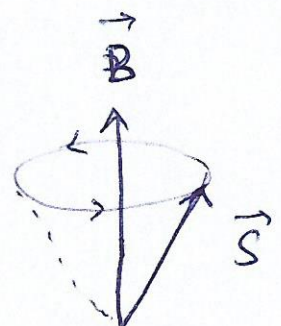
$$(c) \psi(0) = |X\uparrow\rangle \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} \end{pmatrix}$$

$$(d) \psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} |Z\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} |Z\downarrow\rangle$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} \right|^2 = \%50 \text{ olasılıkla } S_z = +\hbar$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} \right|^2 = \%50 \text{ olasılıkla } S_z = -\hbar$$

(e) $\vec{S}$ vektör $\vec{B}$ etrafında preeserzon hareketi yapar.



$$C2) \quad dV = r^2 dr d\Omega$$

$$\int d\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi$$

$$\langle r \rangle = \int \psi^* r \psi dV = 4\pi \int_0^\infty \frac{1}{\pi a^3} r^3 e^{-2r/a} dr = 3a/2$$

$$\langle r^2 \rangle = \int \psi^* r^2 \psi dV = 4\pi \int_0^\infty \frac{1}{\pi a^3} r^4 e^{-2r/a} dr = 3a^2$$

$$\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$(a) \quad \langle p_r \rangle = \int \psi^* p_r \psi dV = \frac{4\pi}{\pi a^3} \int_0^\infty e^{-r/a} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial r} e^{-r/a} \right) r^2 dr = \frac{i\hbar}{a}$$

$$\langle p_r^2 \rangle = \int \psi^* p_r^2 \psi dV = \frac{4\pi}{\pi a^3} \int_0^\infty e^{-r/a} \left[\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 e^{-r/a} \right] r^2 dr = -\frac{\hbar^2}{a^2}$$

$$\Delta p_r = \sqrt{\langle p_r^2 \rangle - \langle p_r \rangle^2} = 0 \Rightarrow \Delta p_r \Delta r = 0$$

Heisenberg besitzt die ilke symmetrie.

$$(b) \quad \langle p_r \rangle = \frac{4\pi}{\pi a^3} \int_0^\infty e^{-r/a} \left[\frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) e^{-r/a} \right] r^2 dr = 0$$

$$\langle p_r^2 \rangle = \frac{4\pi}{\pi a^3} \int_0^\infty e^{-r/a} \left[\left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right)^2 e^{-r/a} \right] r^2 dr = \frac{\hbar^2}{a^2}$$

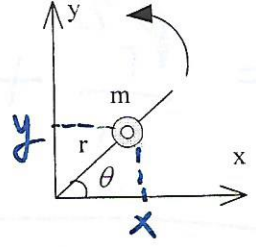
$$\Delta p_r = \sqrt{\langle p_r^2 \rangle - \langle p_r \rangle^2} = \frac{\hbar}{a} \Rightarrow \Delta p_r \Delta r = \frac{\sqrt{3}\hbar}{2} > \frac{\hbar}{2}$$

Heisenberg besitzt die ilke symmetrie.

Klasik Mekanik

1-) Noktasal m kütleli bir tespil tanesi, kütlesi ihmal edilebilecek l uzunluğundaki bir çubuğun üzerinde hareket etmektedir. Çubukta x-y düzleyinde dönmektedir.

- a) Sistemin Lagrange denklemini yazınız.
b) Sistemin Hamiltoniyen'ini yazınız.



a) r, θ genel koordinatlar.
 $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 \cos^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - 2 \dot{r} r \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta + \dot{r}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2 \dot{r} r \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \right]$$

$$= \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2] \quad U = mgr \sin \theta \quad (U = mgy \text{ den})$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - mgr \sin \theta$$

b) $H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L$ Hamiltonian

$$H = \dot{r} p_r + \dot{\theta} p_\theta - \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + mgr \sin \theta$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \Rightarrow \left. \begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} H \\ \text{de} \\ \text{kullan} \end{array}$$

$$H = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} - \frac{1}{2} m \frac{p_r^2}{m^2} - \frac{1}{2} m^2 \frac{p_\theta^2}{(mr^2)^2} + mgr \sin \theta$$

$$H = \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} - \frac{1}{2} \frac{p_r^2}{m} - \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{mr^2} + mgr \sin \theta$$

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + mgr \sin \theta$$

Klasik Mekanik

$$r = k\theta^2$$

2-) Merkezi kuvvet alanındaki bir parçacığı, $r = k\theta^2$ şeklindeki spiral bir yörüngede hareket ettirecek kuvvet kanununu bularak, orbitalin toplam enerjisini hesaplayınız.

$$f(r) = -\frac{l^2}{\mu r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k\theta^2} = \frac{\theta^{-2}}{k}$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{k\theta^2} \right) = -\frac{2}{k} \theta^{-3}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{k\theta^2} \right) = \frac{6k}{r^2}$$

$$f(r) = -\frac{l^2}{\mu r^2} \left[\frac{6k}{k\theta^4} + \frac{1}{k\theta^2} \right] = -\frac{l^2}{\mu} \left(\frac{6k}{r^4} + \frac{1}{r^3} \right)$$

$$\begin{aligned} E = T + u &= \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + u \\ &= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + u(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l &= \mu r^2 \dot{\theta} \\ \dot{\theta} &= \frac{l}{\mu r^2} \\ &\text{(açısal mom. dan)} \end{aligned}$$

$$F = -\nabla u \Rightarrow u = - \int F(r) dr = \frac{l^2}{\mu} \int (6k r^{-4} + r^{-3}) dr$$

$$u = \frac{l^2}{\mu} \left[6k \frac{r^{-3}}{-3} + \frac{r^{-2}}{-2} \right] = -\frac{l^2}{\mu} \left[\frac{2k}{r^3} + \frac{1}{2r^2} \right]$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dr} \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{\dot{r}} = \frac{l^2}{\mu r^2} \Rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{l}{\mu r^2}$$

$$\dot{r} = \frac{l}{\mu r^2} \cdot \frac{d}{d\theta} (k\theta^2) = \frac{l}{\mu r^2} 2k\theta$$

$$= \frac{l}{\mu k^2 \theta^4} 2k\theta = \frac{2l}{\mu k \theta^3}$$

$$E = \frac{1}{2} \cancel{\mu} \cdot \frac{4l^2}{\cancel{\mu^2} k^2 \theta^6} + \cancel{\frac{l^2}{2\mu r^2}} - \frac{2kl^2}{\mu r^3} - \cancel{\frac{l^2}{2\mu r^2}}$$

$$= \frac{\cancel{1^2} 4l^2}{\cancel{2} \mu k^2 \theta^6} - \frac{2kl^2}{\mu r^3} = \frac{2kl^2}{\mu r^3} - \frac{2kl^2}{\mu r^3} = 0$$

$$\boxed{E=0}$$

$$r = k\theta^2$$

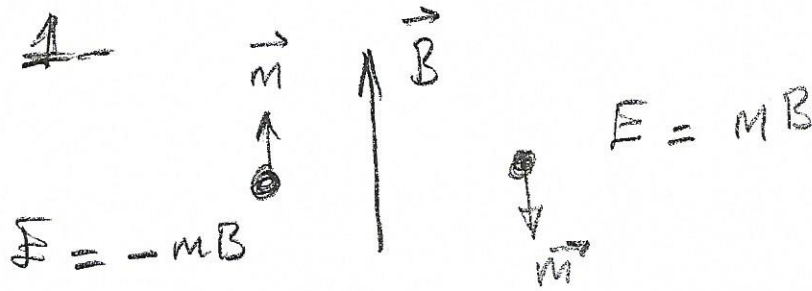
kullan.

$$r^3 = k^3 \theta^6$$

$$\frac{2kl^2}{\mu k^3 \theta^6} = \frac{2l^2}{\mu k^2 \theta^6}$$

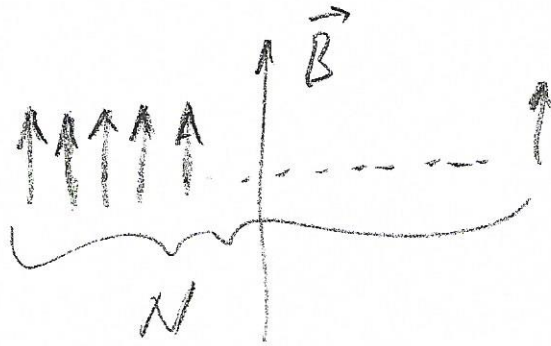
$$E = \frac{2l^2}{\mu k^2 \theta^6} - \frac{2l^2}{\mu k^2 \theta^6} = 0$$

1. Manyetik dipol momenti $\mathbf{m}$, spini $1/2$ olan N adet parçacığın düzgün bir $\mathbf{B}$ manyetik alanı içerisine yerleştirildiğini düşününüz. Böylece herhangi bir parçacık alan ile paralel hizalandığında $E = -mB$ ve zıt yönde (anti-paralel) hizalandığında $E = +mB$ enerjisine sahip olacaktır. Çok ayrıntılı bir hesaplamaya girmeksizin, çok düşük ($T \rightarrow 0$) ve çok yüksek ($T \rightarrow \infty$) sıcaklıklar için N adet parçacık sisteminin enerjisini (U) ve entropisini (S) belirleyiniz. (Not: Parçacıkların başka şeylerle olan ve kendi aralarındaki etkileşimlerin zayıf olduğunu ve ayrıca konumlarının sabit olduğunu varsayınız.)
2. Güneşimizin yüzey sıcaklığı yaklaşık olarak 6000K civarındadır. Bu sıcaklıkta hidrojen atomlarının çoğunun temel enerji düzeyinde ($n=1$) olmasına karşın bir kısmının da uyarılmış bir enerji düzeyinde ($n>1$) bulunma olasılığı vardır. Buna göre, Maxwell-Boltzmann istatistiğini kullanarak birinci uyarılmış enerji düzeyindeki ($n=2$) hidrojen atomların temel enerji düzeyindekilere oranını hesaplayınız.
Hatırlatma: $\epsilon_n = -13.6/n^2$ eV; $k_B = 8.617 \times 10^{-5}$ eV/K
Belli bir enerji düzeyindeki durum yoğunluğu: $g(E_n) = 2n^2$ olarak değişir.
Örneğin; $g(\epsilon_1) = 2 \times 1^2 = 2$, $g(\epsilon_2) = 2 \times 2^2 = 8$, $g(\epsilon_3) = 2 \times 3^2 = 18$



Düşük sıcaklıklarda termal etkiler önemsizdir, böylece bütün dipoller alan ile aynı hizada olur. Bu nedenle sistemin toplam enerjisi ;

$$U(T \rightarrow 0) = -N/mB \text{ olur}$$



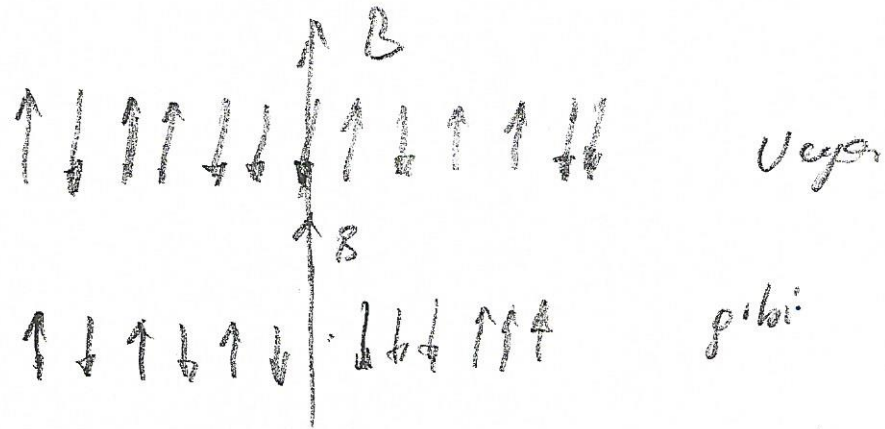
Tek bir hal vardır $\Omega = 1$

$$S(T \rightarrow 0) = k_B \ln \Omega = 0$$

(2)

Yüksek sıcaklıklarda, termal etki çok baskındır; dipollerin yarısı alanlar aynı yönde, diğer yarısı zıt yönde hizalanır.

$$U(T \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} N (E_{\uparrow} + E_{\downarrow}) = 0.$$



$\Omega = 2^N$ farklı mikro hal vardır.

$$S(T \rightarrow \infty) = k_B \ln(2^N) = N k_B \ln 2.$$

olur.

(3)

2 - Maxwell-Boltzmann dağılımına

göre T sıcaklığında termal dengedeki bir sistemdeki parçacıkların belli bir ϵ enerjisine sahip olma olasılığı;

$P(\epsilon) = A g(\epsilon) e^{-\epsilon/kT}$ ifadesi ile verilir. ϵ enerjisine sahip parçacıkların sayısı ;

$n(\epsilon) = N P(\epsilon)$ olarak bulunur.

Buna göre ;

$$n(\epsilon_1) = N A g(\epsilon_1) e^{-\epsilon_1/kT}$$

$$n(\epsilon_2) = N A g(\epsilon_2) e^{-\epsilon_2/kT}$$

$$\frac{n(\epsilon_2)}{n(\epsilon_1)} = \frac{g(\epsilon_2) e^{-\epsilon_2/kT}}{g(\epsilon_1) e^{-\epsilon_1/kT}}$$

$$\epsilon_1 = -13.6 \text{ eV.} ; \epsilon_2 = -13.6/4$$

$$g(\epsilon_1) = 2 ; g(\epsilon_2) = 8$$

$$\frac{n(\epsilon_2)}{n(\epsilon_1)} = \frac{8}{2} \cdot e^{+\frac{13.6}{4k_B T}} \cdot e^{-\frac{13.6}{k_B T}}$$

(4)

$$\frac{n(\epsilon_2)}{n(\epsilon_1)} = 4 \cdot e^{-\frac{13.6}{k_B T} \left(1 - \frac{1}{4}\right)}$$

$$= 4 \cdot e^{-10.2/k_B T}$$

6000 K' de $(k_B = 8,617 \times 10^{-5} \text{ eV/K})$.

$$\frac{n(\epsilon_2)}{n(\epsilon_1)} = 4 \cdot e^{-10.2 / (8.617 \times 10^{-5} \times 6000)}$$

$$= 1,1 \times 10^{-8}$$

Yaklaşık 4 milyar hidrojen atomundan
Sadece 10 tanesi 4. uyarılmış enerji
düzeyinde bulunur.

ELEKTROMANYETİKTEORİ:

S1	S2	T

S1: R yarıçaplı bir kürenin merkez düzleminde çok ince yalıtkan bir tabaka geçirilerek alt ve üst yarı küreleri birbirinden yalıtılmıştır. Üst yarı küre V_0 , alt yarı küre ise $-V_0$ potansiyelinde tutulmaktadır. Laplace denkleminin küresel koordinatlardaki genel çözümünü kullanarak, kürenin içindeki ve dışındaki noktalar için potansiyeli bulunuz. (Kutupsal simetri olduğuna dikkat ediniz.)

S2: Üzerinde sabit bir σ alansal yük yoğunluğu olan içi boş bir küre sabit $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ açısal hızıyla dönmektedir. Bu kürenin dışındaki noktalarda oluşturduğu manyetik alanı bulunuz. (Öneri: Akım yoğunluğundan yola çıkarak bir $\vec{r}$ noktasında $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{(|\vec{r} - \vec{r}'|)} d^3r'$ integrali aracılığı ile vektör potansiyeli bulup, bu vektör potansiyeli kullanarak manyetik alanı bulmak soruyu çözmenin bir yoludur.)

Gerek Duyabileceğiniz Bazı Bağlantılar:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta)$$

$$\int_{-1}^1 P_r(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{rl}$$

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

- 1) R yarıçaplı bir kürenin merkez düzleminde çok ince yalıtılan bir tabaka geçirilerek alt ve üst yarı küreleri birbirinden yalıtılmıştır. Üst yarı küre V_0 alt yarı küre $-V_0$ potansiyelinde tutulmaktadır. Laplace denkleminin küresel koordinatlardaki genel çözümünü kullanarak, kürenin içindeki ve dışındaki noktalar için potansiyeli bulunuz. (Kutupsal simetri olduğuna dikkat ediniz.).

Önce içerideki noktalar için potansiyeli bulalım. $r=0$ noktasında potansiyel sonsuz olamayacağından içerideki noktalar için $B_p=0$ olur. Buradan $r \leq R$ için



$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad \text{elde edilir}$$

Kutupsal simetri olduğundan potansiyel Φ kutup açısına bağlı olmayacaktır. Sınır şartları gereği $r=R$ ve $\theta \leq \pi/2$ için $\Phi(R, \theta) = V_0$ ve $r=R$ $\theta > \pi/2$ için $\Phi(R, \theta) = -V_0$ eşitliklerini kullanmak için yukarıdaki eşitlikte $r=R$ alıp, her iki tarafı $P_m(\cos \theta) \sin \theta$ ile çarpıp 0 den π integrale edelim.

$$\int_0^{\pi} \Phi(R, \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l \int_0^{\pi} P_l(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

Eşitliğin sağ tarafında $y = \cos \theta \Rightarrow dy = -\sin \theta d\theta$ ($\cos 0 = 1, \cos \pi = -1$) dönüşümü yapalım. Eşitliğin sol tarafında ise $\Phi(R, \theta) = \begin{cases} V_0 & \theta \leq \pi/2 \\ -V_0 & \theta > \pi/2 \end{cases}$ sınır şartını kullanalım.

$$\int_0^{\pi/2} V_0 P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} V_0 P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l \left\{ \int_{-1}^1 P_l(y) P_m(y) dy \right\}$$

$$V_0 \left(\int_0^{\pi/2} P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l \int_{-1}^1 P_l(y) P_m(y) dy$$

şimdi soldaki integrallerde $\cos \theta = y \Rightarrow dy = -\sin \theta d\theta$ ($\theta=0 \Rightarrow y=1, \theta=\pi \Rightarrow y=-1$)
 dönüşümü yapalım

$$V_0 \left(\int_0^1 P_m(y) dy + \int_{\substack{y \rightarrow -y \\ dy \rightarrow -dy}}^{-1} P_m(y) dy \right) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l \frac{1}{2l+1} \delta_{lm}$$

$$\Rightarrow V_0 \left(\int_0^1 P_m(y) dy - \int_0^1 P_m(-y) dy \right) = \frac{A_m R^m}{2m+1}$$

elde edilir $P_m(-y) = -1^m P_m(y)$ olduğundan bu ifade

$$V_0 (1 - (-1)^m) \int_0^1 P_m(y) dy = \frac{A_m R^m}{2m+1}$$

$$\Rightarrow A_m = \begin{cases} m \text{ tek ise} & \frac{(2m+1)V_0}{2R^m} \int_0^1 P_m(y) dy \\ m \text{ çift ise} & 0 \end{cases}$$

elde edilir. m tek olduğundan $m=2l+1$ yazılabilir. ($l=0,1,2,\dots$)
 0 hâlde çift tam sayılar için A kat sayıları sıfır olduğundan.

$$A_{2l+1} = \frac{(2l+1)V_0}{R^{2l+1}} \int_0^1 P_{2l+1}(y) dy \quad A_{2l} = 0$$

elde edilir. $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-t\tau} d\tau$ şeklinde tanımlanan, Γ fonksiyonu olmak üzere

$$\int_0^1 P_{2l+1}(y) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \Gamma(\frac{1}{2}-l) \Gamma(l+2)} \quad (*)$$

sonucu kullanılarak

$$A_{2l+1} = \frac{(2l+1)V_0}{R^{2l+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{2 \Gamma(\frac{1}{2}-l) \Gamma(l+2)} \text{ bulunur.}$$

Buradan $r < R$ için

$$\Phi(r, \theta) = V_0 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(\frac{r}{R}\right)^{2l+1} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}-l) \Gamma(l+2)} P_{2l+1}(\cos \theta) \text{ bulunur.}$$

Şimdi sonucu $r > R$ için bulalım. $r \rightarrow \infty$ limitinde potansiyel sonsuza gidemeyeceğinden $r > R$ için

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

$r < R$ için yaptığımız işlemlerin benzerini yaparak

$$\int_0^\pi \Phi(R, \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$V_0 \left(\int_0^1 P_m(y) dy + \underbrace{\int_0^{-1} P_m(y) dy}_{\substack{y \rightarrow -y \\ dy \rightarrow -dy}} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} \frac{1}{2l+1} \delta_{lm}$$

$$\Rightarrow V_0 \left(\int_0^1 P_m(y) dy - \int_0^1 P_m(-y) dy \right) = \frac{B_m}{R^{m+1}} \frac{1}{2m+1}$$

$$V_0 (1 - (-1)^m) \int_0^1 P_m(y) dy = \frac{B_m}{R^{m+1} (2m+1)}$$

$$\Rightarrow B_m = \begin{cases} m \text{ tek ise} & (2m+1) R^{m+1} V_0 \int_0^1 P_m(y) dy \\ m \text{ çift ise} & 0 \end{cases}$$

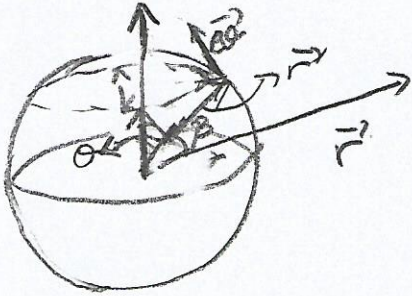
Buradan $m = 2l+1$ yazılıp denklem (*)daki sonuç kullanılarak $r > R$ için

$$B_{2l+1} = \frac{(2l+1) V_0 R^{2l+3} \sqrt{\pi}}{2 \Gamma(\frac{1}{2}-l) \Gamma(l+2)} \text{ elde edilir. Böylece } r > R \text{ için}$$

$$\Phi(r, \theta) = \frac{V_0 \sqrt{\pi}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{2l+3} \frac{P_{2l+1}(\cos \theta)}{\Gamma(\frac{1}{2}-l) \Gamma(l+2)} \text{ elde edilir.}$$

2) Üzerinde sabit bir σ alansal yük yoğunluğu olan içi boş bir küre sabit $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ açısal hızıyla dönmektedir. Bu kürenin dışındaki noktalarda oluşturduğu manyetik alanı bulunuz.

Kürenin yarıçapına R diyelim. $\vec{r}' = R \hat{e}_r$ olmak üzere $\vec{r}'$ noktasındaki hız vektörü $\vec{v}(\vec{r}')$ olsun. Küre üzerindeki bir $\vec{r}'$ noktasında akım yoğunluğu $\vec{K}(\vec{r}') = \sigma \vec{v}(\vec{r}')$ şeklindedir. $\vec{v}(\vec{r}')$ nün yönü enlem sel ($\hat{e}_\theta$ vektörü yönünde) büyüklüğü de $\omega R \sin\theta$ dir. $[\vec{v}(\vec{r}') = R \omega \sin\theta \hat{e}_\theta]$



Şekilden de görülebileceği gibi θ , k ve $\vec{r}'$ arasındaki açıdır. Böylece $\vec{v}(\vec{r}') = \omega \hat{k} \times \vec{r}'$ dolayısıyla da yüzey akım yoğunluğu $\vec{K}(\vec{r}') = \sigma \vec{\omega} \times \vec{r}'$

şeklindedir. Bir akım yoğunluğu için geçerli bir vektör potansiyel ifadesi

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

şeklindedir. Küre üzerindeki akım yoğunluğu kullanılarak, $\vec{J}(\vec{r}') d^3r'$ akım elemanı yüzey için $\vec{K}(\vec{r}') dA' = \vec{K}(\vec{r}') R^2 d\Omega'$ şeklinde yazılabilir. Burada $d\Omega'$, R yarıçaplı küre üzerindeki katı açıdır ve küresel koordinatlardaki ifadesi $d\Omega' = \sin\theta' d\theta' d\phi'$ biçimindedir. Buradan vektör potansiyel ifadesi

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}') dA'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0 \sigma R^2}{4\pi} \vec{\omega} \times \int \frac{\vec{r}' d\Omega'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

biçimini alır. Bu integralde

$$f(\vec{r}) = \int \frac{\vec{r}' d\Omega'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

tanımını yaparak integrali

$$I = \int_{-1}^1 \frac{u du}{\sqrt{1-ku}} \Rightarrow C = \frac{2\pi R}{r \sqrt{r^2+R^2}} \int_{-1}^1 \frac{u du}{\sqrt{1-ku}}$$

bulunur. Kısmi integrasyon kullanılarak $u=u$ $du = \frac{du}{\sqrt{1-ku}}$

$$C = \frac{2\pi R}{r \sqrt{r^2+R^2}} \left(-\frac{2}{k} \sqrt{1-ku} u \Big|_{-1}^1 + \frac{2}{k} \int_{-1}^1 \sqrt{1-ku} du \right)$$

$$= \frac{2\pi R}{r \sqrt{r^2+R^2}} \left[-\frac{2}{k} \left(\sqrt{1-k} + \sqrt{1+k} \right) - \frac{4}{3k^2} \left((1-k)^{3/2} - (1+k)^{3/2} \right) \right]$$

$$= \frac{4\pi R}{r \sqrt{r^2+R^2}} \left[\frac{2}{3k} \left((1+k)^{3/2} - (1-k)^{3/2} \right) - \left(\sqrt{1-k} + \sqrt{1+k} \right) \right]$$

$$= \frac{4\pi R}{r \sqrt{r^2+R^2}} \frac{r^2+R^2}{2rR} \left[\sqrt{1+k} \left(\frac{2}{3k} (1+k) - 1 \right) - \sqrt{1-k} \left(\frac{2}{3k} (1-k) + 1 \right) \right]$$

$$= \frac{2\pi \sqrt{r^2+R^2}}{r^2} \left[\sqrt{1+k} \left(\frac{2}{3k} - \frac{1}{3} \right) - \sqrt{1-k} \left(\frac{2}{3k} + \frac{1}{3} \right) \right] \quad / k = \frac{2rR}{r^2+R^2}$$

$$= \frac{2\pi \sqrt{r^2+R^2}}{3} \frac{r^2+R^2}{r^2} \left[\sqrt{1+\frac{2rR}{r^2+R^2}} \left(\frac{2(r^2+R^2)}{2rR} - 1 \right) - \sqrt{1-\frac{2rR}{r^2+R^2}} \left(\frac{2(r^2+R^2)}{2rR} + 1 \right) \right]$$

$$= \frac{2\pi}{3r^3 R} \left[(r+R) (r^2+R^2-rR) - (r-R) (r^2+R^2+rR) \right]$$

$$= \frac{2\pi}{3r^3 R} \left[r^3+R^3 - (r^3-R^3) \right] = \frac{4\pi}{3} \frac{R^2}{r^3} \Rightarrow C = \frac{4\pi R^2}{3r^3}$$

$$\text{bulunur} \quad f(\vec{r}) = C \vec{r} = \frac{4\pi R^2}{3r^3}$$

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \sigma R^2}{4\pi} \left(\vec{\omega} \times \frac{4\pi R^2}{3r^3} \vec{r} \right) = \frac{\mu_0 \sigma R^4}{3r^3} \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \sigma B^2}{4\pi} \vec{\omega} \times \vec{r}(\vec{r})$$

biçiminde yazalım.

$$f(\vec{r}) \text{ sadece } \vec{r}' \text{ ye bağımlı bir vektördür. } f(\vec{r}) = \int \frac{\vec{r}' d\omega'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

integrali küresel simetrik olduğundan $f(\vec{r}) = C\vec{r}$ olmalıdır.

Buradan $\vec{r} \cdot f(\vec{r}) = \vec{r} \cdot C\vec{r} = Cr^2$ elde edilir. Böylece

$$C = \frac{\vec{r} \cdot f(\vec{r})}{r^2}$$

yazılabilir. Yani C

$$C = \frac{\vec{r} \cdot f(\vec{r})}{r^2} = \frac{1}{r^2} \int \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}' d\omega'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

şeklinde dir. Şekilde gösterildiği gibi $\vec{r}$ ve $\vec{r}'$ arasındaki açıyı β alırsak $\vec{r} \cdot \vec{r}' = rR \cos \beta$ şeklindedir ($r = |\vec{r}|$)

$\Rightarrow$

$$C = \frac{R}{r} \int_0^\pi \frac{\cos \beta \sin \beta d\beta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \beta}} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{2\pi R}{r} \int_0^\pi \frac{\cos \beta \sin \beta d\beta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \beta}}$$

$$u = \cos \beta$$

$$du = -\sin \beta d\beta$$

$$\cos 0 = 1$$

$$\cos \pi = -1$$

$$\Rightarrow C = \frac{2\pi R}{r} \int_{-1}^1 \frac{u du}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rRu}}$$

Bu integral

$$C = \frac{2\pi R}{r \sqrt{r^2 + R^2}} \int_{-1}^1 \frac{u du}{\sqrt{1 - \frac{2rR}{r^2 + R^2} u}}$$

şeklinde yazılabilir. $k = \frac{2rR}{r^2 + R^2}$ tanımı yapılarak bu integral

$r > R$ için
 $\Rightarrow A(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \sigma R^4}{3r^3} (\vec{\omega} \times \vec{r})$ elde edilir.

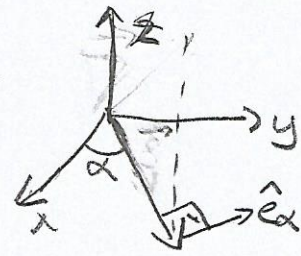
Şimdi $B(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times A(\vec{r})$ eşitliğinden $B(\vec{r})$ yi bulalım.
 Bu işlemi silindirik koordinatlarda da gerçekleştirebiliriz.

$r = \sqrt{s^2 + z^2}$ olmak üzere $\vec{r} = s \hat{e}_s + z \hat{e}_z$ yazılabilir.

Buradan $\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \hat{k} \times (s \hat{e}_s + z \hat{e}_z) = s\omega \hat{k} \times \hat{e}_s = s\omega \hat{e}_\phi$
 elde edilir. O hâle

$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \sigma R^4}{3(s^2 + z^2)^{3/2}} s\omega \hat{e}_\phi$ dur.

$\Rightarrow A_s = 0 \quad A_z = 0 \quad A_\phi = \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega}{3} \frac{s}{(s^2 + z^2)^{3/2}}$



$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_s = \frac{1}{s} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} = - \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega z}{(s^2 + z^2)^{5/2}}$

$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_\phi = \frac{\partial A_s}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial s} = 0$

$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s A_\phi) - \frac{1}{s} \frac{\partial A_s}{\partial \phi}$

$= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega}{3} \frac{s^2}{(s^2 + z^2)^{3/2}} \right)$

$= \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega}{3} \left(\frac{2}{(s^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3s^3}{(s^2 + z^2)^{5/2}} \right)$

bulunur. Böylece silindirik koordinatlar kullanılarak

$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma R^4 \omega}{(s^2 + z^2)^{3/2}} \left(- \frac{z}{s^2 + z^2} \hat{e}_s + \left(\frac{2}{3} - \frac{s^2}{s^2 + z^2} \right) \hat{e}_z \right)$

elde edilir.