NO: .... İSİM SOYİSİM: ....

FIZ 201 FİZİKTE MATEMATİK METOTLAR BÜTÜNLEME SINAVI

2021 - 2022 Güz, Fizik Bölümü, Pamukkale Üniversitesi, Denizli

Soru : 1 (*25P*) Aşağıda verilen A matrisini düşünelim. (a) $H = \frac{1}{2}(A + A^\dagger)$ hermitsel matrisini oluşturunuz. (b) H matrisinin özdeğerlerinin -1 ve 3 olduğunu gösteriniz. (c) Her özdeğere karşılık gelen bire boylandırılmış (normalize) özvektörleri bulunuz. (d) Bu vektörlerin dik olduğunu gösteriniz.

$$A = \begin{pmatrix} 2-i & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Soru : 2 (*25P*) $y' = dy/dx$ göstermek üzere aşağıdaki diferansiyel denklemin homojen çözümünü, özel çözümünü ve genel çözümünü bulunuz.

$$2y'' - 4y' + 10y = 2$$

Soru : 3 (*25P*) Aşağıdaki diferansiyel denklemin $x = 0$ civarında düzgün olan bir çözümünü bulunuz.

$$xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n = 0$$

Burada n bir sabit ve $L_n' = dL_n/dx$. Çözümün bir polinom olması (yani, belirli bir terimden sonra serinin diğer terimlerinin sıfırlaması) için keyfi sabit n'in sağlaması gereken koşulu bulunuz. (Dikkat! Toplam işleminde n sembolünü kullanmayınız.)

Soru : 4 (*25P*) $f(x) = x^2$ fonksiyonunu $-L \leq x \leq +L$ aralığında $T = 2L$ periyotlu trigonometrik fonksiyonlar cinsinden Fourier serisine açınız.

BAŞARILAR ... 28.01.2022 Saat: 09.00 (80 dk) Prof.Dr. Muzaffer ADAK

%%%%%%%%%%%%% Bazı faydalı olabilecek formüller %%%%%%%%%%%%%

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \ , \quad \frac{2\pi}{\theta} = \frac{T}{x}$$

C E V A P L A R

Cevap : 1 (a) $A^\dagger = (A^*)^T$ matrisini oluşturup iki matrisi toplayacağız.

$$H = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2-i & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2+i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Özdeğer denklemini hatırlayalım: $H\vec{x} = \lambda\vec{x}$ veya $(H - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = 0$ olarak ifade edelim. Bunun matris biçimi şöyle olur.

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

a ve b bileşenlerinin her ikisinin de sıfır olmaması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = -1 \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = 3$$

(c) Önce $\lambda_1 = -1$ özdeğerine karşı gelen $\vec{x}_1$ özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b_1 = -\sqrt{3}a_1$$

$$\text{Normalizasyon} \quad |a_1|^2 + |b_1|^2 = 1. \quad \text{Birlikte} \quad \vec{x}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Şimdi de $\lambda_2 = 3$ özdeğerine karşı gelen $\vec{x}_2$ özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_2 = \sqrt{3}b_2$$

$$\text{Normalizasyon} \quad |a_2|^2 + |b_2|^2 = 1. \quad \text{Birlikte} \quad \vec{x}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) İki vektörün skaler çarpımı sıfır ise diktirler.

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 0$$

Cevap : 2 Lineer diferansiyel denklem olduğu için homojen çözümü ve özel çözümü ayrı ayrı hesap edeceğiz ve bunları toplayarak genel çözümü yazacağız. Diferansiyel denklem sabit katsayılı olduğu için homojen çözüm olarak $y = e^\alpha x$ fonksiyonunu öneririz. Böylece

$$2\alpha^2 - 4\alpha + 10 = 0$$

karakteristik denklemini elde ederiz. Kökleri $\alpha_1 = 1 + 2i$ ve $\alpha_2 = 1 - 2i$ hesap edilir. Böylece homojen çözüm

$$y_h(x) = c_1 e^{(1+2i)x} + c_2 e^{(1-2i)x} = e^x[d_1\cos(2x) + d_2\sin(2x)]$$

olarak yazılır. Burada $c_1,\ c_2$ ikilisi ve $d_1,\ d_2$ ikilisi integral sabitleridir. Özel çözümü tahmin yöntemiyle kolayca hesaplayabiliriz, çünkü soruda verilen diferansiyel denklemin sağ tarafı bir sabit. O halde, $y_o(x) = A$ önerelim. Burada A bilinmeyen bir sabit. Bunu sorudaki diferansiyel denkleme yerleştirdiğimizde $A = 1/5$ çıkar. Özel çözüm şudur.

$$y_o(x) = \frac{1}{5}$$

Son olarak genel çözümü kolayca yazarız.

$$y(x) = y_h(x) + y_o(x) = e^x[d_1 \cos(2x) + d_2 \sin(2x)] + \frac{1}{5}$$

Cevap : 3 $x = 0$ düzgün tekil nokta olduğu için $\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+s}$ biçiminde bir çözüm ararız. n sembolü denklemde kullanıldığı için buradaki toplam içinde m ve s sembollerini kullandığımıza dikkat ediniz. Bunun türevlerini alıp denkleme yerleştiriyoruz.

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \underbrace{[(m+s)(m+s-1)+(m+s)]}_{=(m+s)^2} x^{m+s-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m \left[n-(m+s)\right] x^{m+s} = 0$$

İlk toplamda $m = 0$ açıkça koyalım, toplamı $m = 1$'den devam ettirelim ve sonra da $m \to m + 1$ yazalım. Sonucu düzenlersek

$$c_0 s^2 x^{s-1} + \sum_{m=0}^{\infty} \left[(m+s+1)^2 c_{m+1} + (n-m-s)c_m\right] x^{m+s} = 0$$

buluruz. Buradan iki indis kökü çakışık çıkar, $s = 0$. Bu durumda tekrarlama bağıntısı şöyle olur.

$$c_{m+1} = \frac{(m-n)c_m}{(m+1)^2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{(-n)c_0}{1^2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{(1-n)c_1}{2^2} = -\frac{c_0 n(1-n)}{1^2.2^2}$$

O halde, birinci çözümü yazabiliriz.

$$L_n(x) = c_0 \left[1 - \frac{n}{1^2}x + \frac{n(n-1)}{1^2.2^2}x^2 - + \cdots\right]$$

Bu sonsuz serinin bir polinom olması için n'in doğal sayı olması yeterlidir.

Cevap : 4 Bu notasyonda ve periyotta Fourier serisi şöyledir.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

Burada $f(x) = x^2$ için $-L \leq x \leq +L$ aralığında a_0, a_n ve b_n hesap edelim.

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} x^2 dx = \frac{1}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{L^2}{3}$$

a_n için hesap yapalım.

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Burada $u = x^2 \rightarrow du = 2xdx$ ve $dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \rightarrow v = \frac{L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

$$a_n = \frac{-4}{n\pi}\int_0^L x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Tekrar $u = x \rightarrow du = dx$ ve $dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \rightarrow v = \frac{-L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

$$a_n = \left(\frac{2L}{n\pi}\right)^2\cos(n\pi) = \left(\frac{2L}{n\pi}\right)^2(-1)^n$$

Simetrik aralık ve çift fonksiyon olduğu için $b_n = 0$ olur.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} x^2\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0$$

Sonuçta,

$$x^2 = \frac{L^2}{3} + \left(\frac{2L}{\pi}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$