

ELEKTROMANYETİK TEORİ:

S1	S2	T

S1: a yarıçaplı küre, Q yüküne ve r^n ($n > -3$) ile değişen küresel simetrik yük yoğunluğuna sahiptir. Gauss yasasını kullanarak kürenin içindeki ve dışındaki elektrik alanı bulunuz.

S2: Yarıçapı R olan bir kürenin, hacimce yük yoğunluğu ρ sabittir. Küre, merkezinden geçen bir eksen etrafında ω açısal hızı ile katı bir cisim gibi dönerse, merkezindeki manyetik alanı bulunuz.

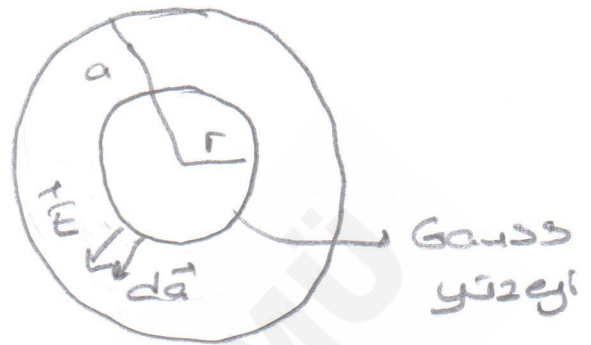
1) Kürenin içinde

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0}$$

$$q = \rho \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$\rho = A r^n \Rightarrow$$

$$q = A \frac{4\pi}{3} r^{n+3}$$



$$\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = A \frac{4\pi}{3\epsilon_0} r^{n+3}$$

$$\int |\vec{E}| |d\vec{a}| \cos 0 = A \frac{4\pi}{3\epsilon_0} r^{n+3}$$

Gauss yüzeyi üzerinde E sabit

$$|\vec{E}| \int |d\vec{a}| = A \frac{4\pi}{3\epsilon_0} r^{n+3}$$

$$|\vec{E}| 4\pi r^2 = A \frac{4\pi}{3\epsilon_0} r^{n+3}$$

$$|\vec{E}| = A \frac{r^{n+1}}{3\epsilon_0}$$

A sabitini bulmak için

$$\rho = \frac{q}{\frac{4\pi}{3} r^3} = A r^n \Rightarrow A = \frac{q}{\frac{4\pi}{3} r^{3+n}}$$

$$|\vec{E}| = \frac{q}{\frac{4\pi}{3} r^{3+n}} \frac{r^{n+1}}{3\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^{n+1}}{r^{n+3}}$$

Elektrik alanı vektörel olarak göstermek istersek

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \vec{r}$$

Kürenin dışında

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{\text{ik}}}{\epsilon_0}$$

$$q_{\text{ik}} = Q$$

$$\int |\vec{E}| |d\vec{a}| \cos 0 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Gauss yüzeyi üzerinde E sabit

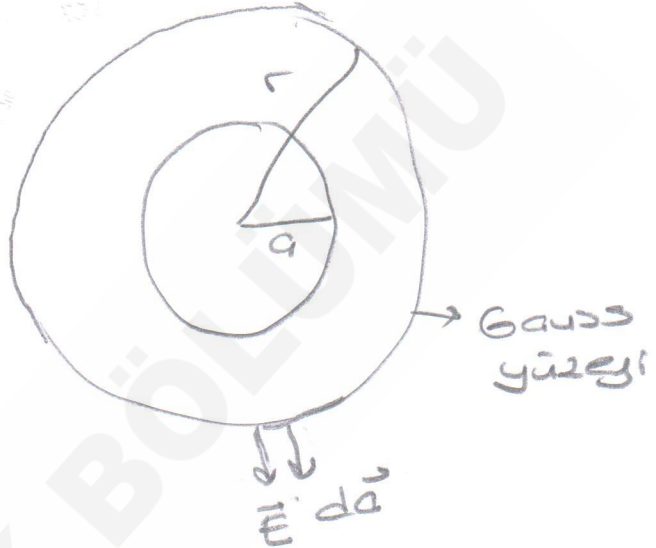
$$|\vec{E}| \int |d\vec{a}| = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$|\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

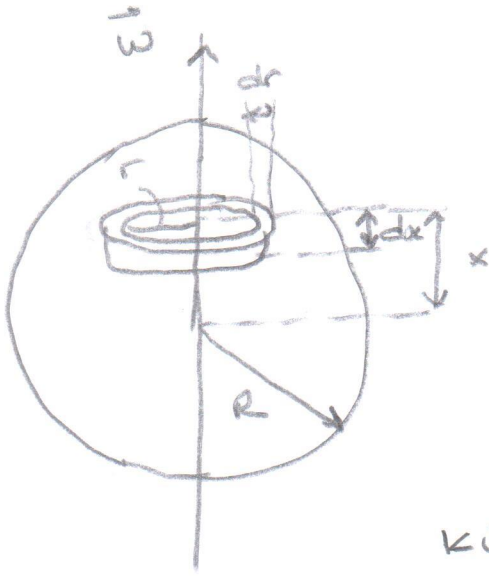
$$|\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

vektörel olarak

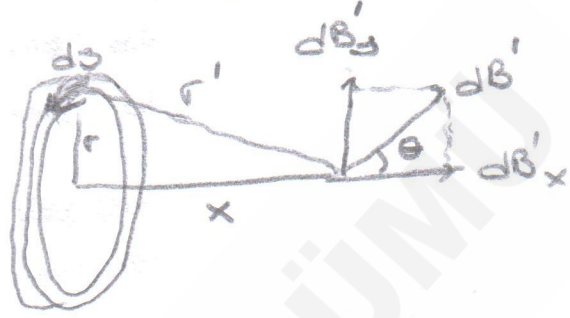
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$



- 2) Kürenin, merkezi dönmek ekseninde bulunan r yarıçaplı halkalardan oluşmuş olduğunu düşünelim



Her bir halkanın merkezinde yarattığı manyetik alanı hesaplayalım.



Küçük bir ds elemanı için manyetik alan

$$dB' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|d\vec{s} \times \hat{r}'|}{r'^2}$$

$$dB' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{(x^2 + r^2)}$$

dB' $\hat{r}'$ ve ds 'in oluşturduğu düzleme diktir. dB' 'nin x ve y yönünde bileşenleri vardır. Tüm halka için y bileşenlerinin toplamı sıfırdır.

$$dB'_x = dB' \cos \theta \quad \cos \theta = \frac{r}{(x^2 + r^2)^{1/2}} \Rightarrow$$

$$dB'_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{(x^2 + r^2)} \frac{r}{(x^2 + r^2)^{1/2}}$$

$$B'_x = \frac{\mu_0 I r}{4\pi (x^2 + r^2)^{3/2}} \int ds = \frac{\mu_0 I r^2}{2(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

Bu tek bir halkanın yarattığı manyetik alan olduğu için

$$dB = \frac{\mu_0 r^2 dI}{2(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

şeklinde yazalım

$$dI = \frac{dQ}{dt}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{dt} \text{ (ağırlık hızı ifadesi)}$$

$$dI = \frac{\omega dQ}{2\pi}$$

$$dQ = g dV = g (2\pi r dr) dx$$

$$dB = \frac{\mu_0 g \omega r^3 dr dx}{2(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$g = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$B = \int_{x=-R}^R \int_{r=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\mu_0 g \omega}{2} \frac{r^3 dr dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$v = r^2 + x^2 \Rightarrow dv = 2r dr \quad r^2 = v - x^2 \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 g \omega}{2} \iint \frac{(v - x^2) dv}{2v^{3/2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 g \omega}{4} \int \left[\int v^{-1/2} dv - x^2 \int v^{-3/2} dv \right] dx$$

$$B = \frac{\mu_0 g \omega}{4} \int_{-R}^R (2v^{1/2} + 2x^2 v^{-1/2}) dx$$

$$B = \frac{\mu_0 g \omega}{4} \int_{-R}^R \left[2(x^2 + r^2)^{1/2} + 2x^2 (x^2 + r^2)^{-1/2} \right]_{r=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx$$

$$B = \frac{\mu_0 g \omega}{4} \int_{-R}^R \left[2(R - |x|) + 2x^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{|x|} \right) \right] dx$$

$$B = \frac{\mu_0 g w}{4} \int_{-R}^R \left[\frac{2x^2}{R} - 4|x| + 2R \right] dx$$

$$B = \frac{\mu_0 g w}{4} \left[\frac{2x^3}{3R} - \frac{4x^2}{2} + 2Rx \right]_{-R}^R$$

$$B = \frac{\mu_0 g w}{4} \left[\frac{2R^3}{3R} - \frac{4R^2}{2} + 2R^2 - \left(-\frac{2R^3}{3R} - \frac{4R^2}{2} - 2R^2 \right) \right]$$

$$B = \frac{\mu_0 g w}{4} \left[\frac{4R^2}{3} + 4R^2 \right]$$

$$B = \frac{\mu_0 g w}{4} \cdot 4 \left(\frac{R^2}{3} + R^2 \right)$$

$$B = \frac{4}{3} \mu_0 g w R^2$$

İSTATİSTİK FİZİK:

S1	S2	T

S1: Bir sistemin bulunabileceği 3 enerji düzeyi vardır. İlk düzey $E_1 = (-\epsilon)$ enerjili, ikinci düzey $E_2 = (0)$ enerjili (4 kez katlı), üçüncü düzey $E_3 = (\epsilon)$ (4 kez katlı)'dır.

(a) Sistemin bölüşüm fonksiyonunu yazınız.

(b) Entropi, iç enerji ve özgül ısıyı bulunuz.

(c) Sistemin E_3 enerjili düzeyde bulunma olasılığı için bir ifade yazınız ve bu olasılığı $T \rightarrow 0$ ve $T \rightarrow \infty$ limitlerinde inceleyiniz.

S2: Tek atomlu ideal gazın bölüşüm fonksiyonu $Z_1 = \frac{V}{\lambda^3}$ olarak veriliyor. Bu bölüşüm fonksiyonunu kullanarak, N tane ayırt edilemez atomdan oluşan ideal gazın

(a) Grand bölüşüm fonksiyonunu bulunuz.

(b) Grand potansiyeli bulunuz.

(c) Bu gazın durum denklemini bulunuz.

İSTATİSTİK FİZİK CEVAPLAR

$$① a) Z = \sum_i g_i e^{-\beta E_i} = \sum_{i=1}^3 g_i e^{-\beta E_i}$$

$$= 1 \cdot e^{-\beta(-\epsilon)} + 4 e^{-\beta(0)} + 4 e^{-\beta \epsilon}$$

$$= e^{\beta \epsilon} + 4 + 4 e^{-\beta \epsilon} \Rightarrow \boxed{Z = 4(1 + e^{-\beta \epsilon}) + e^{\beta \epsilon}}$$

$$① b) F = -k_B T \ln Z = -k_B T \ln [4(1 + e^{-\beta \epsilon}) + e^{\beta \epsilon}]$$

Entropi $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -\frac{\partial}{\partial T} \left\{ -k_B T \ln [4(1 + e^{-\beta \epsilon}) + e^{\beta \epsilon}] \right\}$

$$= -\frac{\partial}{\partial T} \left\{ -k_B T \ln [4(1 + e^{-\epsilon/k_B T}) + e^{\epsilon/k_B T}] \right\}$$

$$\boxed{S = k_B \ln [4(1 + e^{-\epsilon/k_B T}) + e^{\epsilon/k_B T}] + \frac{\epsilon}{T} \left(\frac{4 e^{-\epsilon/k_B T} - e^{\epsilon/k_B T}}{4 + 4 e^{-\epsilon/k_B T} + e^{\epsilon/k_B T}} \right)}$$

İç enerji $E = F + TS$ olduğundan

$$\boxed{E = \epsilon \left(\frac{4 e^{-\epsilon/k_B T} - e^{\epsilon/k_B T}}{4 + 4 e^{-\epsilon/k_B T} + e^{\epsilon/k_B T}} \right)}$$

Özgün ısı

$$\boxed{C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right) = 2 k_B \left(\frac{\epsilon}{k_B T} \right)^2 \frac{e^{\epsilon/k_B T}}{(4 + 4 e^{-\epsilon/k_B T} + e^{\epsilon/k_B T})^2}}$$

olarak bulunur.

①c) Sistemin E_3 enerjili durumda bulunma olasılığı,

$$P_3 = \frac{e^{-\beta E_3}}{Z} = \frac{4 e^{-\beta E}}{4 + 4 e^{-\beta E} + e^{\beta E}} \quad \text{dir.}$$

Her tarafı $e^{\beta E}$ ile çarparsak ($\beta = \frac{1}{k_B T}$)

$$P_3 = \frac{4}{4 e^{E/k_B T} + 4 + e^{2E/k_B T}} \quad \text{bulunur,}$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} P_3 = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{4}{4 e^{E/k_B T} + 4 + e^{2E/k_B T}} = \frac{4}{e^{\infty}} = \frac{4}{\infty} \rightarrow 0$$

yani bu enerji durumunda parçacık bulunma olasılığı $T \rightarrow 0$ limitinde sıfırdır.
(Hiç parçacık yok)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_3 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{4}{4 e^{E/k_B T} + 4 + e^{2E/k_B T}} \rightarrow \frac{4}{9}$$

$T \rightarrow \infty$ limitinde parçacıkların bulunma (E_3 enerjisinde) olasılığı.

(2) $Z_1 = V/\lambda^3$ N tane ayırt edilemez

atından oluşan ideal gaz için kanonik böl. fonk.

$$Z_N(V, T) = \frac{Z_1^N}{N!} = \frac{V^N}{N! \lambda^{3N}}$$

o halde grand kanonik kümede bölüşüm fonk.

$Z = e^{\beta \mu}$ fügenite olmak üzere

$$\Xi(T, z, V) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N \frac{V^N}{N! \lambda^{3N}}$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\frac{zV}{\lambda^3} \right)^N \quad \text{bu toplam}$$

e^{zV/λ^3} üstel fonksiyonunun Taylor serisine açılımına eşittir. o halde, grand bölüşüm fonk;

(a) $\boxed{\Xi = e^{zV/\lambda^3}}$ grand potansiyel

ise;

(b) $\Phi(T, \mu, V) = -k_B T \ln \Xi(T, \mu, V)$

$$= \boxed{-k_B T \left(\frac{zV}{\lambda^3} \right)}$$

(burada z fügenite)

parçacık sayısı

$$N = Z \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial Z} \right)_{T, V} = Z \frac{V}{\lambda^3} \Rightarrow Z = \frac{N \lambda^3}{V}$$

Basınç ;

$$p = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial V} \right)_{T, \mu} = \frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{k_B T Z V}{\lambda^3} \right]$$

$$= \frac{k_B T Z}{\lambda^3} \Rightarrow \text{Buradan } Z = \frac{N \lambda^3}{V}$$

Kullanılırsa

$$p = \frac{k_B T N}{V}$$

$$\Rightarrow \boxed{pV = N k_B T}$$

durum denklemini bulunur.

$$(\text{yada } N k_B = nR \quad pV = nRT)$$

KUANTUM MEKANİĞİ:

S1	S2	T

S1: Basit harmonik salıncının herhangi bir enerji durumu için;
 $(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle$; $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle$ ve n. kararlı durumu için
 $(\Delta x)(\Delta p) = (n + 1/2)\hbar$ olduğunu gösteriniz.

S2: m kütleli bir parçacık $0 \leq x \leq a$ tek boyutlu sonsuz potansiyel kuyusunda bulunmaktadır.
t=0 anında normalize dalga fonksiyonu

$$\psi(x, t = 0) = \sqrt{8/5a} [1 + \cos(\frac{\pi x}{a})] \sin(\pi x/a)$$

Olarak verilmektedir.

- a) $t = t_0$ gibi belli bir zaman sonra dalga fonksiyonu nedir?
- b) $t = 0$ ve $t = t_0$ anında sistemin ortalama enerjisi nedir?
- c) $t = t_0$ anında parçacığın sol yarım kısımda bulunma olasılığı nedir?

Problem 1. Quantum Mechanics

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger + a) \quad ; \quad p = i \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (a^\dagger - a)$$

$$\text{So } \langle x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int \psi_n^* (a^\dagger + a) \psi_n dx$$

$$\text{But } a^\dagger \psi_n = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}, \quad a \psi_n = \sqrt{n} \psi_{n-1}$$

$$\text{So } \langle x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[\sqrt{n+1} \int \psi_n^* \psi_{n+1} dx + \sqrt{n} \int \psi_n^* \psi_{n-1} dx \right] = 0$$

$$\boxed{\langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = 0} \quad x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (a^\dagger + a)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (a^{\dagger 2} + a^2 + a^\dagger a + a a^\dagger)$$

(by orthogonality)

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \int \psi_n^* (a^{\dagger 2} + a^2 + a^\dagger a + a a^\dagger) \psi_n dx. \quad \text{But}$$

$$a^{\dagger 2} \psi_n = a^\dagger (\sqrt{n+1} \psi_{n+1}) = \sqrt{n+1} \sqrt{n+2} \psi_{n+2}$$

$$a^2 \psi_n = a (\sqrt{n} \psi_{n-1}) = \sqrt{n} \sqrt{n-1} \psi_{n-2}$$

$$a a^\dagger \psi_n = a (\sqrt{n+1} \psi_{n+1}) = \sqrt{n+1} \sqrt{n+1} \psi_n$$

$$a^\dagger a \psi_n = a^\dagger (\sqrt{n} \psi_{n-1}) = \sqrt{n} \sqrt{n-1} \psi_{n-2}$$

$$\text{So } \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \left[0 + n \int |\psi_n|^2 dx + (n+1) \int |\psi_n|^2 dx + 0 \right]$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} (2n+1) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar}{m\omega}$$

$$\langle p^2 \rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2} (a^\dagger - a)^2 = -\frac{\hbar m\omega}{2} (a^{\dagger 2} - a^\dagger a - a a^\dagger + a^2)$$

$$\langle p^2 \rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2} [0 - n - (n+1) + 0] = \frac{\hbar m\omega}{2} (2n+1) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar m\omega$$

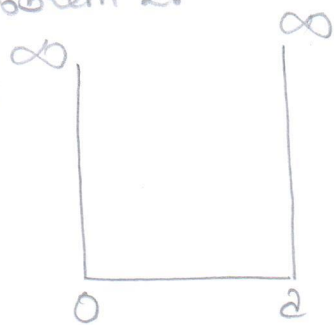
$$\langle T \rangle = \langle \frac{p^2}{2m} \rangle = \frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$$

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{n + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{n + \frac{1}{2}} \sqrt{\hbar m\omega}; \quad \sigma_x \sigma_p = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \geq \frac{\hbar}{2}$$

①

Problem 2.



At $t=0$ its normalized wave function is

$$\psi(x, t=0) = \sqrt{8/5a} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

a) $\psi(x, t=t_0) = ?$

b) $\langle E \rangle_{t=0} = ? \quad \langle E \rangle_{t=t_0} = ?$

c) $P = ? \quad t = t_0$

The time independent Schrodinger equation for $0 < x < a$ is

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + E\psi = 0$$

It has solution $\psi(x) = A \sin kx$, where k is given by $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, satisfying $\psi(0) = 0$. The boundary condition $\psi(a) = 0$ then requires $ka = n\pi$. Hence the normalized eigenfunctions are

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

and the energy eigenstates are

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Any wave function $\psi(x, t)$ can be expanded in ψ_n

$$\psi(x, t) = \sum_n A_n(t) \psi(x, t=0)$$

with $A_n(t) = A_n(0) \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right)$

$$\psi(x, t=0) = \sqrt{\frac{8}{5a}} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \sqrt{\frac{8}{5a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sqrt{\frac{8}{5a}} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$\Rightarrow A_1 \psi_1 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

$$\psi(x, t=0) = \underbrace{\sqrt{\frac{4}{5}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)}_{\psi_1} + \underbrace{\sqrt{\frac{1}{5}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}_{\psi_2}$$

$$= A_1(0) \psi_1 + A_2(0) \psi_2, \quad A_n(0) = 0 \text{ for } n \neq 1, 2$$

①

a) Thus

Kuantum mekanisi

$$\psi(x,t) = \psi_1(0) \exp\left(-\frac{iE_1 t}{\hbar}\right) + \psi_2(0) \exp\left(-\frac{iE_2 t}{\hbar}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{8}{5a}} \exp\left(-\frac{i\pi^2 \hbar^2 t}{2ma^2}\right) \sin\frac{\pi x}{a} + \sqrt{\frac{2}{5a}} \exp\left(-\frac{i2\pi^2 \hbar^2 t}{ma^2}\right) \sin\frac{2\pi x}{a}$$

$$b) \langle E \rangle = \sum \langle \psi_n | E | \psi_n \rangle$$

$$= \sum \psi_n(0)^2 E_n$$

$$= \frac{4}{5} E_1 + \frac{1}{5} E_2$$

$$= \frac{4\pi^2 \hbar^2}{5ma^2}$$

c) the probability of finding the particle in $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ at $t=t_0$ is

$$P(0 \leq x \leq \frac{a}{2}) = \int_0^{a/2} |\psi(x,t_0)|^2 dx$$

$$= \frac{8}{5a} \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \left[1 + \cos^2\frac{\pi x}{a} + 2\cos\frac{\pi x}{a} \cos\left(\frac{3\pi^2 \hbar^2 t_0}{2ma^2}\right) \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{16}{15\pi} \cos\left(\frac{3\pi^2 \hbar^2 t_0}{2ma^2}\right)$$

6

KLASİK MEKANİK:

S1	S2	T

S1: x - ekseninde hareket eden noktasal m kütleli bir parçacığın Lagrange denklemi;

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 - w^2 x^2) e^{\gamma t}$$

Şeklinde verilsin. Lagrange denklemindeki m , γ ve w gerçekte ve pozitif sabitlerdir.

- Sistemin hareket denklemini yazınız.
- Bu parçacığın hangi kuvvetlerin etkisinde olduğunu belirterek nasıl bir hareket olduğunu belirtiniz.
- Kanonik momentumu bularak, sistemin Hamilton denklemini yazınız.
- Enerji korunumu hakkında ne söyleyebilirsiniz.

S2: a) Merkezi kuvvet etkisinde iki boyutta yatay xy düzleminde hareket eden parçacık için Lagrange denklemini yazarak, buradan hareketle parçacığa etkiyen kuvveti bulunuz.

b) m kütleli parçacığı $r = e^{-\theta}$ ile verilen yörüngede hareket ettirecek kuvvet kanununu bulunuz

Faydalı bilgi; $U = 1/r$ olmak üzere orbit denklemi;

$$f(1/u) = -\frac{l^2 u^2}{\mu} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right)$$

KLASİK MEKANİK

$$1-a) \quad L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) e^{rt}$$

Hareket denklemini

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + r\dot{x} + \omega^2 x = 0}$$

b) Potansiyel $-m\omega^2 x$ geri döngüsel kuvvet
ve $-mrx$ sürtünme kuvvetlerinin etkisindeki
sönümlü titreşim.

$$c) \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m e^{rt} \dot{x} \quad \text{ve Hamiltoniyen}$$

$$H = p\dot{x} - L$$

$$= m e^{rt} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m e^{rt} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m e^{rt} \omega^2 x^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{H = \frac{p^2 e^{-rt}}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 e^{rt}}$$

d) H zamana açık bir şekilde bağlı.

$\Rightarrow$ Enerji korunmaz

KLASİK MEKANİK

$$2-a) \quad L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0$$

$$m r \ddot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} - m \ddot{r} = 0, \quad \vec{F}(r) = - \frac{\partial U}{\partial r} \Rightarrow$$

$$\vec{F}(r) = m(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2)$$

$$b) \quad f(r) = - \frac{l^2}{m r^2} \left[\frac{d}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$$

$$r = e^{-\theta}, \quad \frac{1}{r} = e^{\theta}, \quad \frac{d^2}{d\theta^2} = e^{\theta}$$

$$f(r) = - \frac{l^2}{m r^2} \underbrace{(e^{\theta} + e^{\theta})}_{2/r}$$

$$\boxed{f(r) = - \frac{2 l^2}{m r^3}}$$

SEÇMELİ :

S1	S2	T

S1: $\mathbb{R}^3$ içine gömülü H^2 manifoldu (2-hiperbol) $z^2 - x^2 - y^2 = a^2$ denklemiyle tanımlanır. Burada a pozitif bir sabittir. $x = a \sinh \psi \cos \phi$, $y = a \sinh \psi \sin \phi$ ve $z = a \cosh \psi$ koordinat dönüşümüyle $x^\mu = (\psi, \phi)$, $\mu = 1, 2$, koordinat haritasında H^2 manifoldu ve $g = dx^2 + dy^2 - dz^2$ metriği için Riemann eğrilik skalerini hesaplayınız.

S2: Bir dalgaklavuzu içinde genel olarak elektromanyetik alanlar, $\vec{E}, \vec{H}$, dalga denklemini sağlar.

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Burada $\varphi = (\vec{E}, \vec{H})$, $v = c/\bar{n}$ elektromanyetik dalganın klavuz içindeki hızı, c ışığın boşluktaki hızı, $\bar{n}$ dalgaklavuzunun yapıldığı maddenin kırıcılık indisi ve ∇^2 laplace operatörüdür. Üç katmandan oluşan bir boyutlu dalgaklavuzunun kırıcılık indisi şöyle değişmektedir.

$$\bar{n} = \begin{cases} \bar{n}_0 & x > +a & \text{kılıf} \\ \bar{n}_f & -a \leq x \leq +a & \text{film} \\ \bar{n}_0 & x < -a & \text{sabstrat} \end{cases}$$

Burada $a, \bar{n}_0$ ve $\bar{n}_f$ sabit sayılardır. Bu kavuz içinde z yönünde ilerleyen zaman harmonik TE modlu elektromanyetik dalga için kartezyen koordinatlarda $\vec{E} = E \hat{a}_y$ olur. Burada $\hat{a}_y$ birim vektörü $+y$ koordinat yönünü göstermektedir. Buna göre $E = E(x, y, z, t)$ için üç bölgede dalga denklemini çözünüz ve sınır şartlarını uygulayınız.

S3: Katılarda öz ısı için geliştirilen teorileri açıklayınız. Deney ile uyumluluğunu düşük ve yüksek sıcaklıklar için tartışınız.

Şeane 1 - Cevap 1

Cevap : 1 Verilen koordinat dönüşümlerinden

$$dx = a \cosh \psi \cos \phi d\psi - a \sinh \psi \sin \phi d\phi$$

$$dy = a \cosh \psi \sin \phi d\psi + a \sinh \psi \cos \phi d\phi$$

$$dz = a \sinh \psi d\psi$$

hesap edilir. Bu durumda verilen metrik

$$g = dx^2 + dy^2 - dz^2 = a^2 d\psi^2 + a^2 \sinh^2 \psi d\phi^2$$

olur. Buradan ortonormal 1-formlar ve tersleri şöyle yazılır:

$$e^1 = a d\psi, \quad e^2 = a \sinh \psi d\phi \quad \leftrightarrow \quad d\psi = \frac{e^1}{a}, \quad d\phi = \frac{e^2}{a \sinh \psi}$$

Levi-Civita bağlantı 1-formlarını hesap etmek için de^a hesap edilmelidir.

$$de^1 = 0, \quad de^2 = a \cosh \psi d\psi \wedge d\phi = \frac{\cosh \psi}{a} e^1 \wedge e^2$$

Bunları $\omega^a_b \wedge e^b = -de^a$ denkleminde yerleştirelim.

$$\omega^1_2 \wedge e^2 = -de^1 = 0$$

$$\omega^2_1 \wedge e^1 = -de^2 = \frac{\cosh \psi}{a} e^2 \wedge e^1$$

Birinci denklem hiç bilgi vermezken ikinci denklemden $\omega^2_1 = \frac{\cosh \psi}{a} e^2$ buluruz. Dolayısıyla

$$\omega^1_2 = -\frac{\cosh \psi}{a} e^2 = -\cosh \psi d\phi$$

Şimdi, Riemann eğrilik 2-formunu $R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b$ hesap edelim. 2-boyutlu Riemann geometrisinde her zaman $\omega^a_c \wedge \omega^c_b = 0$ dır. O halde

$$R^1_2 = d\omega^1_2 = -\sinh \psi d\psi \wedge d\phi = -\frac{1}{a^2} e^1 \wedge e^2$$

Artık Ricci eğrilik 1-formunu $(Ric)_a = \iota_b R^b_a$ bağıntısından

$$(Ric)_1 = \iota_2 R^2_1 = -\frac{e^1}{a^2}, \quad (Ric)_2 = \iota_1 R^1_2 = -\frac{e^2}{a^2}$$

şeklinde hesap ederiz. Son olarak eğrilik skalerini $\mathcal{R} = \iota_a (Ric)^a$ tanımından elde ederiz.

$$\mathcal{R} = \iota_1 (Ric)^1 + \iota_2 (Ric)^2 = -\frac{2}{a^2}$$

Şeameli - Cevap 2

E için dalgalar denklemini şöyle olur.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Burada bir dalganın dairesi için $\frac{\partial E}{\partial y} = 0$.

Ayrıca z-yönünde siren zaman harmonik dalgalar için

$$E(x, y, z, t) = E(x) e^{j(\beta z - \omega t)}$$

Bu durumda dalgalar denklemini şöyle olur.

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{v^2} - \beta^2 \right) E = 0$$

Üç bölge için çözüm şöyle olur.

Tek Modlar;

$$E(x) = A_c e^{-\gamma(x-a)}, \quad a < x, \text{ kaplama}$$

$$E(x) = B \sin(k_f x), \quad -a \leq x \leq a, \text{ film}$$

$$E(x) = A_s e^{\gamma(x+a)}, \quad x < -a, \text{ substrat}$$

Sınır şartları

i) $x=a$ da E sürekli: $A_c = B \sin(k_f a)$

ii) $x=a$ da $\frac{dE}{dx}$ sürekli: $-\gamma A_c = k_f B \cos(k_f a)$

iii) Tek mod için $A_s = -A_c$.

$$k_f^2 = \frac{\omega^2}{v_f^2} - \beta^2 > 0 \quad \text{ve} \quad \gamma^2 = \beta^2 - \frac{\omega^2}{v_0^2} > 0$$

ve $\omega = k c$ kullanabiliriz.

Çift Modlar;

$$E(x) = A_c e^{-\gamma(x-a)}, \quad a < x$$

$$E(x) = B \cos(k_f x), \quad -a \leq x \leq +a$$

$$E(x) = +A_c e^{\gamma(x+a)}, \quad x < -a$$

Sınır şartları

i) $A_c = B \cos(k_f a)$

ii) $\gamma A_c = B k_f \sin(k_f a)$

iii) $A_s = +A_c$

Seçmeli - Cevap 3

Katılarda ortalama ısı için geliştirilen teorileri açıklayınız. Deney ile uyumluluğunu tartışınız.

Tom katıların sabit hacimde molar ısıları, ortak bazı özellikler gösterir. Deneyel sonuçlarda;

yüksek sıcaklıkta ($T \rightarrow \infty$) $C_v \rightarrow 3Nk_B = 3R = \text{sabit}$

düşük sıcaklıkta ($T \rightarrow 0$)

şeklinde davranış gösterir.

$$C_v \rightarrow aT + bT^3$$

(N = Avogadro sayısı
 k_B = Boltzmann sabiti
 R = Evrensel gaz sabiti)

Dulong-Petit Yasası, bazı kimyasal elementlerin molar ısı kapasitesini açıklayan klasik bir tanımdır.

Boltzmann enerji eşitlikleri teorisi ile doğrulanmış bu yasa, pek çok katı elementin bir molünün ortalama ısı kapasitesi olarak $3R$ olduğunu kabul eder. Titreşimsel modlar her atom başına 3 serbestlik derecesine sahip olup, her biri bir kuadratik kinetik enerji termine ve kuadratik potansiyel enerji termine karşılık gelir. Her kuadratik terim ortalama $\frac{1}{2}k_B T$ ye eşit olup, sabit hacim altında mol başına ortalama ısı $C_v = 6 \left(\frac{1}{2} Nk_B \right)$

$= 3Nk_B = 3R$ olur. Bu yasa, bazı katıların tanımlanmasına rağmen, yüksek sıcaklıkta bazı katıların ısı değerlerini tanımlamada başarısız olmuştur. Fakat bu yasa, oda sıcaklığında metalik berilyum veya elmas durumundaki karbon gibi birbirine sıkıca bağlı katı atomlarda başarısız olmaktadır. Kinetik teori ile ortalama ısıları açıklanamadı. Einstein'in ortalama ısı teorisi ise Planck'in kuantum teorisine

dayalı bir hipoteze ile, katının termal davranışının basit bir harmonik osilatör ile açıklanabileceğine dayanır. Katının örgü enerjisinin hesabında tek bir osilatörün katkısı ele alınır ve osilatörlerin frekans dağılımı üzerinden $\pm \omega$ katkıları ele alınır. Boltzmann istatistiğine göre bir osilatörün T sıcaklığında $E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$ enerjisine sahip olma ihtimali $e^{-E_n/k_B T}$ Boltzmann faktörüne dayanır. T sıcaklığında termal dengedeki $\langle E_n \rangle$ ortalama enerji;

$$\langle E_n \rangle = \frac{\sum E_n e^{-E_n/k_B T}}{\sum e^{-E_n/k_B T}} \quad \text{ile tanımlanır.}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \hbar \omega}_{\text{sıfır noktası enerjisi}} + \underbrace{\frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega/k_B T} - 1}}_{\text{fonon katkısı}}$$

Einstein kristal modeli atomlararası etkileşimleri ihmal eder ve toplam enerji salınımlarının toplamı eşit olduğunu kabul eder. Ayrıca tüm atomların (N) eksenler boyunca harmonik salınım frekanslarının aynı olduğunu düşünür.

$$C_V = \left(\frac{dE_n}{dT} \right)_V = 3Nk_B \left(\frac{\Theta_E}{T} \right)^2 \frac{e^{\Theta_E/T}}{(e^{\Theta_E/T} - 1)^2}$$

burada $\Theta_E = \frac{\hbar \omega}{k_B}$; Einstein sıcaklığı.

Yüksek sıcaklıkta ($T \gg \Theta_E$, $x = \frac{\Theta_E}{T}$, $x \ll 1$) $e^x \approx x+1$

$$\Rightarrow C_V = 3Nk x^2 \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} C_V = 3Nk \frac{x^2(1+x)}{(1+x-1)^2}$$

$$\Rightarrow 3Nk = 3R$$

Düşük sıcaklıkta ($x \gg 1$) durumunda;

$$e^x - 1 \approx e^x \quad \lim_{x \rightarrow \infty} C_V \longrightarrow 3Nk x^2 e^{-x} \rightarrow 0$$

Bu teori yüksek sıcaklıkta ortalama 3R Dulong-Petit değeriyle uyumludur, fakat düşük sıcaklıkta deneysel değerle uyumlamaktadır. Sistem modeli, atomlar arası etkileşimleri ve ^(tüm serbestlik dereceleri) ^(aynı frekansa titreşim) serbest elektronlar, göz önüne alınmadığı için, yeterli bir model değildir.

Debye ortalama ısı teorisi, kristalli sıvı bir izotropik elastik ortam olarak kabul edilir ve kâğıdaki atomların aynı frekansla titreşmeyeceğini, fakat aynı dispersiyon bağıntısına sahip olacağını ele alır. Kâğıda sınırlı sayıda atom bulunduğu için, bütün frekansların tanımlanamayacağını ve tanımlı bir maksimum ω_D frekansının bulunacağını düşünür:

$$\int_0^{\omega_D} g_0(\omega) d\omega = 3N$$

↳ mod yoğunluğu = Debye durumu yoğunluğu

$$\langle E \rangle = \int_0^{\omega_D} \langle E_n \rangle g_0(\omega) d\omega = 3NkD\left(\frac{\Theta_D}{T}\right)$$

↳ Debye fonksiyonu

$$\Theta_D = \frac{\hbar \omega_D}{k_B}$$

↳ Debye sıcaklığı

(3)

Yüksek sıcaklık limitinde, ($T \gg \Theta_D$)

$$\Rightarrow C_V \rightarrow 3NK = 3R \text{ değerine}$$

alırken,

düşük sıcaklık limitinde, ($T \ll \Theta_D$)

$$C_V \rightarrow bT^3 \text{ gibi ifade alır}$$

Θ_D ısıtım sıcaklığıyla değişimi için, Debye

yaklaşımı, düşük ve yüksek sıcaklık limitlerinde deneysel sonuçlarla oldukça iyi uyum gösterilen, ara bölgelerdeki sıcaklıklar için deneysel sonuçlarla uyum iyi değildir. Fakat bu model $\approx$ de, serbest elektronların uyanma etkileri dikkate alınmadığı için düşük sıcaklıklarda deneysel sonuçlardaki aT terimini ihmal eder.

Bunun nedeni, katı sürekli bir ortam gibi düşünüldüğü için, sadece uzun dalga boyulu titreşim modları için bu teori çalışır. Kısa dalga boyulu modları içermez.