



Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

FİZ 201 FİZİKTE MATEMATİK METOTLAR (4+0) (MATHEMATICAL METHODS OF PHYSICS)

Prof.Dr. Muzaffer Adak

madak@pau.edu.tr

+90 555 249 9457

Pamukkale Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Fizik Bölümü, Denizli

2021 Güz



TEŞEKKÜR

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Bu çalışmamı, Batı Toros dağlarında doğup büyüyen ve hiç okula gitmeyen ama *“Her çocuk okula gitmelidir, okumalıdır. Ancak tercih yapmak zorunda kalırsak mutlaka öncelikle kız çocuklarını okutmalıyız!”* diyen, yakından tanıdığım gerçek bir aydın olan anam rahmetli Ayşe Adak’a armağan ediyorum.

Prof.Dr. Muzaffer Adak



İçindekiler

Giriş
Vektörler
Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar
İntegral
Hesapları
Matrisler
Diferansiyel
Denklemler
Özel
Fonksiyonlar
Kaynaklar

- 1 Giriş
- 2 Vektörler
- 3 Kompleks Sayılar ve Fonksiyonlar
- 4 İntegral Hesapları
- 5 Matrisler
- 6 Diferansiyel Denklemler
- 7 Özel Fonksiyonlar
- 8 Kaynaklar



BÖLÜM 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

GİRİŞ



Prof.Dr. Muzaffer Adak Hakkında 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

- 01.11.1972 Denizli, Çameli, Kolak köyünde doğdu.
- Denizli Cafer Sadık Abaloğlu İlkokulu'nda okudu.
- Denizli İmam Hatip Ortaokulu'nda okudu.
- Denizli Lisesi'nde okudu.
- İstanbul Teknik Üniversitesi, Fizik Mühendisliği Bölümünden mezun oldu.
- Boğaziçi Üniversitesi, Fizik Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi olarak İngilizce hazırlık okudu.
- Pamukkale Üniversitesi, Fizik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansını tamamladı.
- Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fizik Anabilim Dalı'nda doktorasını yaptı.
- Doktora tez aşamasındayken İngiltere, University of Kent at Canterbury'de ziyaretçi araştırmacı olarak bir yıl kaldı.



Prof.Dr. Muzaffer Adak Hakkında 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

- Pamukkale Üniversitesi, Fizik Bölümü'nde değişik ünvanlarda çalıştı.
 - Araştırma Görevlisi
 - Öğretim Görevlisi
 - Yardımcı Doçent Doktor
 - Doçent Doktor
 - Profesör Doktor (devam ediyor)
- Pamukkale Üniversitesi'nde farklı idari görevler yaptı.
 - Bölüm başkan yardımcılığı
 - Anabilim dalı başkanlığı
 - Bölüm başkanlığı
 - Teknokent genel müdürlüğü
 - Meslek yüksekokulu müdürlüğü
 - Senato üyeliği
- Evli ve 3 çocuk babasıdır.
- Koşmayı, yüzmeyi, badminton oynamayı, tüple dalmayı, bisiklet binmeyi, kitap okumayı ve düşünmeyi sever.



Ders Hakkında 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Bu ders notları 2020-2021 eğitim öğretim yılı güz döneminde Pamukkale Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümünde okutulan FİZ 201 Fizikte Matematik Metotlar dersi için hazırlanmıştır. Bu notlar, bilimsel metinler yazmak için kullanılan açık kaynaklı bulut-tabanlı $\text{\LaTeX}$ editörü olan overleaf üzerinde yazılmıştır, www.overleaf.com.

Bu ders, Fizik lisans programının müfredatının ikinci yılının ilk döneminde yer alan haftada dört saatlik bir derstir. Fizik bölümünün müfredatının ilk yılının güz döneminde Genel Matematik-I ve bahar döneminde Genel Matematik-II dersleri vardır. Her iki ders de hafta altı saattir. Bunlardan başka müfredatta ayrıca Lineer Cebir veya Diferansiyel Denklemler gibi matematik dersleri veya Fizikte Matematik Metotlar-II gibi bu dersin devamı niteliğinde bir ders yoktur. Dersin içeriği buna göre belirlenmiştir.



Ders Hakkında 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

2020 güz döneminde dünyayı etkisi altına alan Covid-19 virüs salgını olduğundan dersler uzaktan internet vasıtasıyla çevrimiçi yapılmıştır. Pamukkale Üniversitesi ters-yüz eğitim modelini benimsemiştir. Bu model iki aşamadan oluşmaktadır. İlk aşama haftalık konu anlatım videosundan, ikinci aşama da öğrencilerle çevrim içi canlı buluşmadan oluşmaktadır. İlk aşamada, hocalar dersle ilgili hafta hafta sunum dosyaları hazırlamıştır, bunların sunumunu videoya çekmiştir ve bu videoları öğrencilerin ulaşabileceği bir platforma yüklemiştir. Öğrencilerin ilgili videoyu canlı derse gelmeden önce izlemeleri beklenmiştir. İkinci aşamada, haftalık ders programındaki saatinde hoca ile öğrenciler internet üzerinden canlı çevrim içi olarak bir araya gelmiştir ve ders sunum videosundaki konuları soru-cevap biçiminde tartışmışlardır. Bu ders notları, birinci aşama için hazırlanmıştır. İkinci aşamadaki canlı hoca-öğrenci buluşmasında çözülen örnekler burada yoktur.



Dersin Amacı ve Seviyesi

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Doğanın iletişim dili matematiktir. Fizik de atom altı parçacıklardan evren ölçeğine kadar her türlü doğa olaylarını inceleyen bilimdir. Bu nedenle, iyi derecede matematik bilmek işimizi kolaylaştıracaktır. Bu derste bu işi en temel seviyede yapacağız. İleri düzey matematik araçlarını seçmeli derslerde ve lisansüstü eğitimde öğreneceksiniz.



BÖLÜM 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

VEKTÖRLER



Temel Tanımlar

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Bir vektörü üç farklı yolla tanımlayabiliriz:

- ① Geometrik yaklaşımda, yönlü doğru parçasıdır. Özellikle iki boyutta çok kullanışlıdır.
- ② Cebirsel yaklaşımda, n boyutlu uzayda n tane sayıdan oluşan bir nesnedir. Üç ve daha yüksek boyutlarda kullanışlıdır.
- ③ Aksiyomatik yaklaşımda, belli kuralları sağlayan bir kümenin elemanıdır. Bu yaklaşım özellikle fonksiyonlardan oluşan vektör uzaylarında kullanışlıdır.

Öncelikle iki boyutta vektörlerin temel özelliklerini gözden geçirelim.

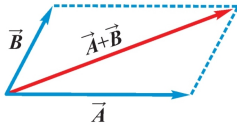


Vektörlerde Toplama ve Çıkarma

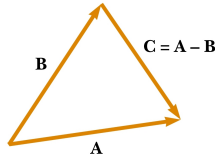
İki boyutta $\vec{A}$ vektörünü başlangıcı, bitişi ve yönü olan bir okla temsil edebiliriz. İki vektörü toplayabilir, çıkarabilir ve bir skaler ile çarpabiliriz.

- $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ komütatiflik (sıra değiştirme)
- $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$ asosiyatiflik (birleşme)
- $\vec{A} - \vec{B} = -(\vec{B} - \vec{A})$ anti komütatiflik
- $a\vec{A} = \vec{B}$ burada $a \in \mathbb{R}$

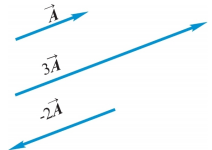
$\vec{A}$ vektörünü bazen **A** ile gösteririz. $|\vec{A}| \equiv A$ ile $\vec{A}$ 'nın boyu (normu veya büyüklüğü) gösterilir ve daima $A \geq 0$ olur.



(a) Toplama



(b) Çıkarma

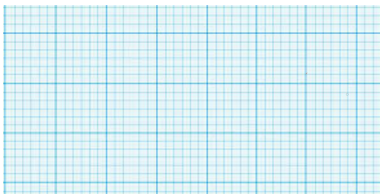


(c) Skalerle Çarpım



Vektörün Paralel Taşınması

Önümüzdeki masa yüzeyi 2-boyutlu düz bir uzaydır. Bu uzaya iki boyutlu Euclid uzayı deriz ve $\mathbb{R}^2$ ile gösteririz. $\mathbb{R}^2$ 'de bir vektörü paralel taşımak, okun boyunu ve yönünü değiştirmeden yeni bir kopyasını başka bir noktaya çizmek demektir. Bu işi yapmanın pratik bir yolu zemini hayali karelere bölmektir.



Buradaki hayali yatay çizgilerden ve hayali dikey çizgilerden birer tanesini referans çizgisi olarak alırız. Yatay referans çizgisine x-ekseni, dikey referans çizgisine y-ekseni ve ikisinin kesiştiği noktaya da *orijin* deriz.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

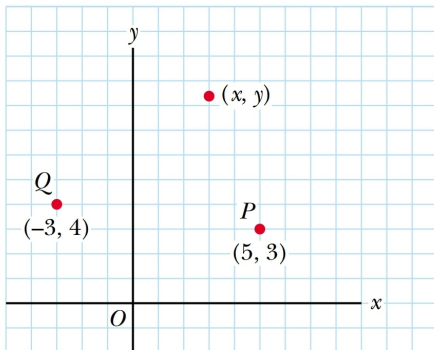
Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Kartezyen Koordinat Sistemi

$\mathbb{R}^2$ uzayındaki noktaları betimlemek için biri birine dik x ve y eksenleri kullanılır, $N = (x, y)$. Burada x ve y kartezyen koordinatlardır.

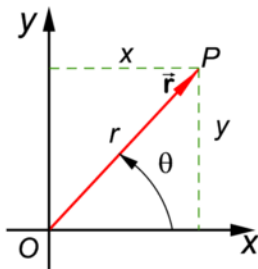


Koordinatların tanım bölgeleri; $-\infty \leq x, y \leq +\infty$



Kutupsal Koordinat Sistemi

$\mathbb{R}^2$ uzayındaki noktaları betimlemek için kullanılan yaygın başka bir koordinat sistemi de r ve θ kutupsal koordinatlarının oluşturduğu kutupsal koordinat sistemidir, $P = (r, \theta)$.



$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\tan \theta = y/x$$

$$0 \leq r \leq \infty$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

x koordinatı sağa doğru artıyor.

y koordinatı yukarı doğru artıyor.

r koordinatı 0 merkezli r yarıçaplı çemberin merkezinden dışarıya doğru artıyor.

θ koordinatı $+x$ ekseninden ters saat yönüne doğru artıyor. Bunu çembere teğet yönlü doğru olarak düşünebiliriz.



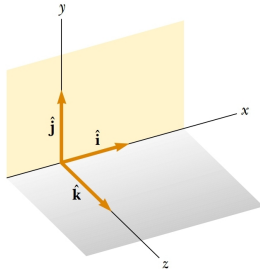
Birim Vektör ve Baz Vektörler

Boy 1 birim olan ve sadece yön gösteren bir vektöre birim vektör denir. $\hat{A}$ niceliği, $\vec{A}$ 'nın birim vektörüdür. Böylece $\vec{A} = A\hat{A}$ yazabiliriz. Burada A vektörün büyüklüğünü, $\hat{A}$ da vektörün yönünü gösterir.

$\hat{i}$: x koordinatının artış yönünü gösteren birim vektör

$\hat{j}$: y koordinatının artış yönünü gösteren birim vektör

$\hat{k}$: z koordinatının artış yönünü gösteren birim vektör



$\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ kümesine baz vektörler kümesi denir.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Vektörün Bileşenleri

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

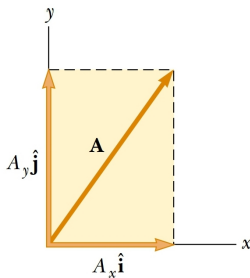
Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Elimizde bir koordinat sistemi varsa, baz vektörler var demektir. Baz vektörlerimiz varsa, bu uzaydaki her hangi bir vektörün bileşenlerini yazabiliriz.



A_x : $\vec{A}$ 'nın x bileşeni

A_y : $\vec{A}$ 'nın y bileşeni

Şekle göre şöyle yazabiliriz; $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$.

Bileşenler skaler niceliklerdir ve pozitif ya da negatif olabilirler.



Lineer Bağımsızlık

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

c_i 'ler reel sabitler olmak üzere $\{\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n\}$ kümesinin elemanları arasındaki

$$c_1 \vec{A}_1 + c_2 \vec{A}_2 + \dots + c_n \vec{A}_n = 0$$

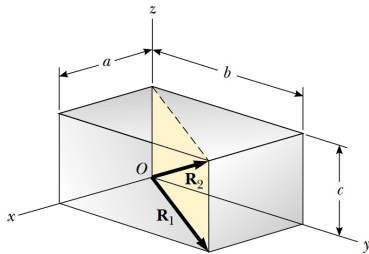
bağıntısının tek çözümü $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ ise buradaki n tane vektör lineer bağımsızdır denir ve vektörlerden hiç biri diğerleri cinsinden yazılamaz. Bu kümeye n boyutlu reel vektör uzayı adı verilir. Lineer bağımsız vektörlerden baz vektör kümesi oluşturulabilir. Örneğin $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ kümesinin elemanları lineer bağımsızdır, dolayısıyla baz vektörüdürler. Ayrıca, bu uzayın boyutu 3'tür.

Eğer c_i 'lerden en az bir tanesi sıfırdan farklıysa $\vec{A}_i$ vektörleri lineer bağımlıdır denir ve bu durumda vektörlerden biri diğerleri cinsinden yazılabilir.



3 Boyutlu Kartezyen Koordinatlar

Bir vektörün üç tane bileşeni olur.



a : $\vec{R}_2$ 'nin x bileşeni

b : $\vec{R}_2$ 'nin y bileşeni

c : $\vec{R}_2$ 'nin z bileşeni

Şekle göre $\vec{R}_1 = a\hat{i} + b\hat{j}$ ve $\vec{R}_2 = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ olur.

Ok temsillerini kullandığımızda iki vektörü toplamak için vektörleri paralel taşımak zorundaydık. Ancak baz vektörlerin yardımıyla vektörlerin toplamını hızlıca yapabiliriz.

$$\begin{aligned}\vec{R}_1 + \vec{R}_2 &= a\hat{i} + b\hat{j} + a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k} \\ &= 2a\hat{i} + 2b\hat{j} + c\hat{k}\end{aligned}$$



Vektörün Cebirsel (Bileşen) Gösterimi

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Şimdiye kadar bir vektörü göstermek için ya ok resimleri çizdik ya da eksen takımları çizdik. Artık bir vektörü daha soyut olarak temsil edeceğiz.

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \equiv (A_x, A_y, A_z)$$

Dikkat! Birim vektörleri kullanmadan sadece bileşenler cinsinden $\vec{A}$ 'yı yazdık. Benzer olarak $\vec{B}$ 'yi de yazabiliriz.

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

Böylece iki vektörü kolaylıkla toplayabiliriz; $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$.

$$\vec{C} = (\underbrace{A_x + B_x}_{C_x}, \underbrace{A_y + B_y}_{C_y}, \underbrace{A_z + B_z}_{C_z})$$



Vektörün İndis Gösterimi

Her zaman kartezyen koordinatlarda ve de üç boyutta çalışmayız ve hesap yapmayız. Bunun için x, y, z indislerini daha genel veya daha soyut hale getirelim.

$$\vec{A} = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i$$

Bu yazılıшта $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ baz vektörler kümesidir. Kümenin her elemanı birim vektördür ve biri birine diktir. n boyutlu uzayda n bileşenli vektörler için toplamın üst sınırı n yapılır.

A_1 : $\vec{A}$ 'nın birinci bileşeni

A_2 : $\vec{A}$ 'nın ikinci bileşeni

A_3 : $\vec{A}$ 'nın üçüncü bileşeni

$$\vec{A} \equiv A_i = (A_1, A_2, A_3)$$

A_i : $\vec{A}$ vektörünün indis gösterimidir.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Küresel Koordinatlar 1

Kartezyen koordinatlarda;

$$\hat{e}_1 \rightarrow \hat{i} = \hat{x}$$

$$A_1 \rightarrow A_x$$

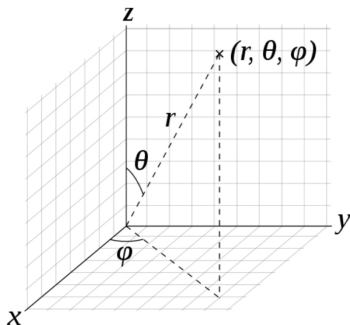
$$\hat{e}_2 \rightarrow \hat{j} = \hat{y}$$

$$A_2 \rightarrow A_y$$

$$\hat{e}_3 \rightarrow \hat{k} = \hat{z}$$

$$A_3 \rightarrow A_z$$

Fizikte ve mühendislikte sıkça kullanılan başka bir koordinat sistemi küresel koordinatlardır, (r, θ, φ) .



Koordinat dönüşümleri

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Küresel Koordinatlar 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

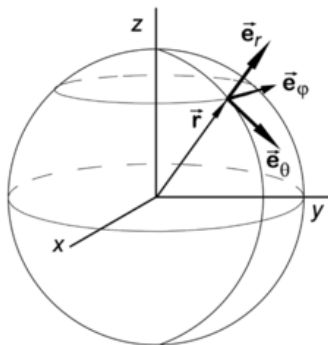
İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Küresel koordinatlarda;

$$\hat{e}_1 \rightarrow \hat{e}_r = \hat{r}$$

$$\hat{e}_2 \rightarrow \hat{e}_\theta = \hat{\theta}$$

$$\hat{e}_3 \rightarrow \hat{e}_\varphi = \hat{\varphi}$$

Ters koordinat dönüşümleri

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos \theta = z / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan \varphi = y/x$$

Tanım bölgeleri

$$0 \leq r \leq \infty$$

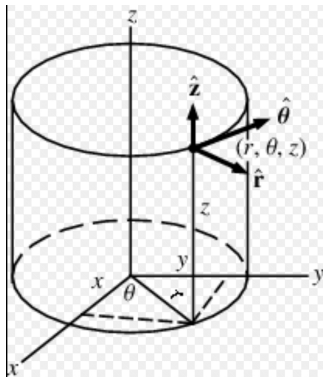
$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$



Silindirik Koordinatlar

Fizikte ve mühendislikte sıkça kullanılan diğer bir koordinat sistemi de silindirik koordinatlardır, (r, θ, z) .



Silindirik koordinatlarda;

$$\hat{e}_1 \rightarrow \hat{e}_r = \hat{r}$$

$$\hat{e}_2 \rightarrow \hat{e}_\theta = \hat{\theta}$$

$$\hat{e}_3 \rightarrow \hat{e}_z = \hat{z}$$

Koordinat dönüşümleri

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

Ters koordinat dönüşümleri

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = y/x$$

$$z = z$$

Tanım bölgeleri

$$0 \leq r \leq \infty$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$-\infty \leq z \leq +\infty$$

$$A_1 \rightarrow A_r$$

$$A_2 \rightarrow A_\theta$$

$$A_3 \rightarrow A_z$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



İki Vektörün Skaler (Nokta) Çarpımı 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

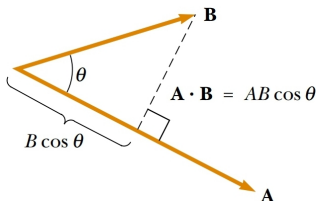
Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Şimdiye kadar vektörü bir skaler sayı ile çarptık, iki vektörü topladık, iki vektörü çıkardık, ama iki vektörün çarpımı hakkında konuşmadık.



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \text{ komütatiflik}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \in \mathbb{R}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0, > 0, < 0 \text{ olabilir}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2 \geq 0$$

$$A = (\vec{A} \cdot \vec{A})^{1/2} \text{ vektörün normu}$$

Skaler çarpım veya nokta çarpımı denir. Geometrik olarak iki vektörün paralel bileşenlerini çarparız.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB_{\parallel} = A_{\parallel} B$$

$A_{\parallel}$: $\vec{A}$ 'nın $\vec{B}$ 'ye paralel bileşeni

$B_{\parallel}$: $\vec{B}$ 'nin $\vec{A}$ 'ya paralel bileşeni



İki Vektörün Skaler (Nokta) Çarpımı 2

Yukarıdaki temel tanıma göre baz vektörlerin kendi aralarındaki skaler çarpımlarını yazabiliriz.

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = 1$$

Normalizasyon
(Bire boylandırma)

$$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 = 1$$

$$\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 = 1$$

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0$$

Ortogonalite
(Diklik)

$$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = 0$$

$$\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1 = 0$$

Bu iki sonucu birleştirip daha özet ve soyut olarak şöyle yazarız.

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

Ortonormalite

δ_{ij} Kronecker deltası denir;

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{ise} \\ \text{ise} \end{matrix}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



İki Vektörün Skaler (Nokta) Çarpımı 3

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Elimizde ortonormal baz vektörler varsa, iki vektörün skaler çarpımını bileşenler cinsinden ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= \left(\sum_i A_i \hat{e}_i \right) \cdot \left(\sum_j B_j \hat{e}_j \right) \\ &= \sum_i \sum_j A_i B_j (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) \\ &= \sum_i \sum_j A_i B_j \delta_{ij} = \sum_i A_i B_i \\ &= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3\end{aligned}$$

Kural: $\sum_j (\text{bir şey})_j \delta_{ij} = (\text{bir şey})_i$

Vektörün Normu; $A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$



İki Vektörün Skaler (Nokta) Çarpımı 4

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Elimizde ortonormal baz vektörler olduğunda, iki vektörün skaler çarpımını bileşenler cinsinden ifade ettik. Şimdi de iki vektör arasındaki açıyı bileşenler cinsinden yazacağız.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

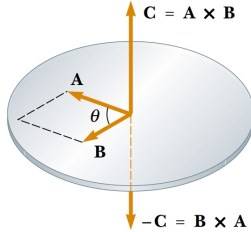
O halde

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} \\ &= \frac{A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}} \end{aligned}$$



İki Vektörün Vektörel (Kros) Çarpımı 1

Yine iki vektörü çarpacağız ama sonuç bu sefer bir vektör çıkacak; $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$.



$$C = |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta \text{ norm}$$
$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \text{ anti komütatiflik}$$
$$\vec{A} \times \vec{A} = 0$$

$\vec{C}$ vektörünün yönü sağ el kuralı ile belirlenir. Vektörel çarpım veya kros çarpım denir. Geometrik olarak iki vektörün dik bileşenlerini çarpıyoruz.

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB_{\perp} = A_{\perp} B$$

$A_{\perp}$: $\vec{A}$ 'nın $\vec{B}$ 'ye dik bileşeni

$B_{\perp}$: $\vec{B}$ 'nin $\vec{A}$ 'ya dik bileşeni



İki Vektörün Vektörel (Kros) Çarpımı 2

Yukarıdaki temel tanıma göre baz vektörlerin kendi aralarındaki vektörel çarpımlarını yazabiliriz.

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_1 = 0$$

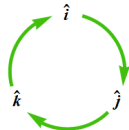
$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3$$

$$\hat{e}_2 \times \hat{e}_2 = 0$$

$$\hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1$$

$$\hat{e}_3 \times \hat{e}_3 = 0$$

$$\hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2$$



Bu kurallara göre iki vektörün vektörel çarpımını bileşenler cinsinden şöyle yazabiliriz.

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{A} \times \vec{B} \\ &= \hat{e}_1 \underbrace{(A_2 B_3 - A_3 B_2)}_{C_1} + \hat{e}_2 \underbrace{(A_3 B_1 - A_1 B_3)}_{C_2} \\ &\quad + \hat{e}_3 \underbrace{(A_1 B_2 - A_2 B_1)}_{C_3}\end{aligned}$$



İki Vektörün Vektörel (Kros) Çarpımı 3

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

İki vektörün skaler çarpımında Kronecker deltasından faydalanmıştık. Burada da tümüyle antisimetrik epsilon'dan faydalanabiliriz.

Önce $\varepsilon_{123} = +1$ olarak sabitleriz. Buradaki her bir indisin çift sayıdaki her yer değiştirmesi bir tane $+$ işareti verir.

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{123} = +1$$

Her bir indisin tek sayıdaki her yer değiştirmesi bir tane eksi ($-$) işareti verir, $\varepsilon_{213} = -1$.

$$\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$$

Her hangi iki indis aynıysa epsilon sıfır olur.

$$\varepsilon_{112} = \varepsilon_{122} = \varepsilon_{323} = \dots = 0$$



İki Vektörün Vektörel (Kros) Çarpımı 4

Bunları toparlarsak şunu yazabiliriz.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & ijk \text{ 123 dizilişinin çift permütasyonuysa} \\ -1 & ijk \text{ 123 dizilişinin tek permütasyonuysa} \\ 0 & ijk \text{ rakamlarında iki rakam aynıysa} \end{cases}$$

Buna göre $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ işlemini indis gösteriminde şöyle ifade edebiliriz.

$$C_i = \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

Burada $A_j B_k = B_k A_j$ olabilir, ama $A_j B_k \neq B_j A_k$.

Örneğin yukarıda $i = 1$ alalım.

$$C_1 = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{1jk} A_j B_k$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



İki Vektörün Vektörel (Kros) Çarpımı 5

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Burada önce j toplamını sonra k toplamını açalım.

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \sum_{k=1}^3 \left(\cancel{\varepsilon_{11k}}^0 A_1 B_k + \varepsilon_{12k} A_2 B_k + \varepsilon_{13k} A_3 B_k \right) \\
 &= \cancel{\varepsilon_{121}}^0 A_2 B_1 + \cancel{\varepsilon_{122}}^0 A_2 B_2 + \varepsilon_{123}^1 A_2 B_3 \\
 &\quad + \cancel{\varepsilon_{131}}^0 A_3 B_1 + \cancel{\varepsilon_{132}}^{-1} A_3 B_2 + \cancel{\varepsilon_{133}}^0 A_3 B_3 \\
 &= A_2 B_3 - A_3 B_2
 \end{aligned}$$

Kartezyen koordinatlarda $C_x = A_y B_z - A_z B_y$ eşdeğerdir.

Küresel koordinatlarda $C_r = A_\theta B_\varphi - A_\varphi B_\theta$ eşdeğerdir.

Silindirik koordinatlarda $C_r = A_\theta B_z - A_z B_\theta$ eşdeğerdir.



Vektör Özdeşlikleri 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Soru: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ doğrulayınız.

Cevap: $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}$ bilgisini sıkça kullanacağız. Dikkat, her birinde çift permütasyon var.

Ayrıca, $\sum_{i,j,k} \equiv \sum_i \sum_j \sum_k$ kısaltmasını kullanacağız.

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \sum_i A_i (\vec{B} \times \vec{C})_i = \sum_{i,j,k} A_i \varepsilon_{ijk} B_j C_k = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k$$

$$\vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \sum_j B_j (\vec{C} \times \vec{A})_j = \sum_{i,j,k} B_j \varepsilon_{jki} C_k A_i = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k$$

$$\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \sum_k C_k (\vec{A} \times \vec{B})_k = \sum_{i,j,k} C_k \varepsilon_{kij} A_i B_j = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k$$

"Sağ" taraflar eşitse "sol" taraflar da eşittir.



Vektör Özdeşlikleri 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Soru: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$ doğrulayınız.

Cevap: Yine $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}$ ve $\sum_{i,j,k} \equiv \sum_i \sum_j \sum_k$ kullanacağız. Önce $\vec{D} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ diyelim.

$$\begin{aligned} D_i &= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A_j (\vec{B} \times \vec{C})_k = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A_j \sum_{l,m} \varepsilon_{klm} B_l C_m \\ &= \sum_{j,k,l,m} \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} A_j B_l C_m = \sum_{j,l,m} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j B_l C_m \\ &= \sum_j A_j B_i C_j - \sum_j A_j B_j C_i = (\vec{A} \cdot \vec{C}) B_i - (\vec{A} \cdot \vec{B}) C_i \\ \vec{D} &= (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \end{aligned}$$

Kurallar; $\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$
 $\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk} = 2! \delta_{il}$ ve $\sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 3!$



Yönlü Türev İşlemcisi: Nabla Operatörü

Kartezyen koordinatlarda nabla operatörü; $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

Koordinat dönüşümleri yardımıyla ve türevde zincir kuralını kullanarak

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

nabla operatörünü küresel koordinatlarda yazabiliriz.

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

Benzer işlemlerle silindirik koordinatlarda; $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Skaler Fonksiyonun Gradyanı 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Kartezyen koordinatlarda $f = f(x, y, z)$ üç değişkenli skaler bir fonksiyon olsun. Buna fizikte skaler alan denir. Örneğin elektriksel potansiyel alanı. f 'nin $\vec{r} = (x, y, z)$ noktasındaki değeri ile hemen çok yakınında $\vec{r} + d\vec{r}$ noktasındaki değeri arasındaki farka f 'deki değişim adı verilir;
 $df = f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r})$.

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Bunu iki vektörün skaler çarpımı olarak yazalım.

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz) := \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$$

Burada $\vec{\nabla} f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ vektörüne f 'nin gradyanı denir.

$d\vec{r}$ vektörü uzaydaki bir noktadan çok yakın diğer bir noktaya gidişi gösterir.



Skaler Fonksiyonun Gradyanı 2

$\vec{\nabla}f$ 'nin iki özelliği.

- 1 f_0 bir sabit olmak üzere $f(x, y, z) = f_0$ bir yüzey tanımlar. Bu yüzeye fizikte eşpotansiyel yüzey denir. Bu eşitliğin her iki tarafının diferansiyelini alalım; $df = 0$ yani $\vec{\nabla}f \cdot d\vec{r} = 0$. İki vektörün skaler çarpımı sıfır ise iki vektör biri birine diktir. $d\vec{r}$ vektörü bu yüzey üzerinde bir vektör olduğu için $\vec{\nabla}f$ vektörü bu yüzeye diktir. Böylece yüzey normallerini hesap edebiliriz. Benzer olarak $f(x, y) = f_0$ bir eğri tanımlar ve $\vec{\nabla}f$ vektörü bu eğriye diktir.
- 2 f 'deki değişimi yeniden yazalım;
 $df = \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r} = |\vec{\nabla}f| |d\vec{r}| \cos \theta$ burada θ iki vektör arasındaki açı. $\theta = 0$, yani iki vektör paralel, olduğunda df maksimum olur. Sonuçta $\vec{\nabla}f$ vektörünün yönü f deki artışın maksimum olduğu yönü verir.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



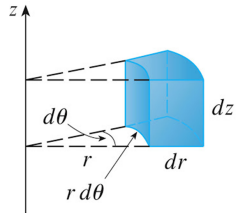
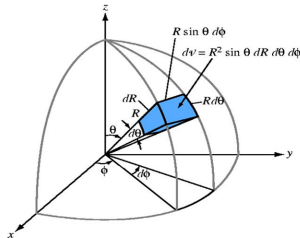
Skaler Fonksiyonun Gradyanı 3

Üç koordinat sisteminde $\vec{\nabla} f$ nedir?

Kartezyen $f(x, y, z)$	$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$
Küresel $f(r, \theta, \varphi)$	$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)$
Silindirik $f(r, \theta, z)$	$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$

Üç koordinat sisteminde $d\vec{r}$ nedir?

Kartezyen $\vec{r} = (x, y, z)$	$d\vec{r} = (dx, dy, dz)$
Küresel $\vec{r} = (r, \theta, \varphi)$	$d\vec{r} = (dr, r d\theta, r \sin \theta d\varphi)$
Silindirik $\vec{r} = (r, \theta, z)$	$d\vec{r} = (dr, r d\theta, dz)$





Vektörel Fonksiyonun Diverjansı 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Kartezyen koordinatlarda $\vec{A}$ vektörünün bileşenleri koordinatlara bağlı olsun.

$$\vec{A} = (A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z))$$

Buna fizikte vektörel alan denir. Örneğin elektrik alan. $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \equiv \text{div} \vec{A}$ ile $\vec{A}$ 'nın diverjansını gösteririz. $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ skalerdir.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Küresel $\vec{A} = (A_r(r, \theta, \varphi), A_\theta(r, \theta, \varphi), A_\varphi(r, \theta, \varphi))$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$



Vektörel Fonksiyonun Diverjansı 2

Silindirik $\vec{A} = (A_r(r, \theta, z), A_\theta(r, \theta, z), A_z(r, \theta, z))$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Yorum: Vektörler biri birine yaklaşıyorsa $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} < 0$. Örneğin, çok az dolu süs havuzunun zeminindeki delikten boşalırken suyun hız dağılımı. Vektörler biri birinden uzaklaşıyorsa $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} > 0$. Örneğin, boş süs havuzunun zeminindeki musluk havuzu doldurken suyun hız dağılımı. Vektörler biri birine paralelse $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Örneğin, musluktan aşağı doğru akan suyun hız dağılımı.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} < 0$$



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} > 0$$



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$





Vektörel Fonksiyonun Rotasyoneli 1

Yine kartezyen koordinatlarda $\vec{A}$ vektörünün bileşenleri koordinatlara bağlı olsun.

$$\vec{A} = (A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z))$$

Örneğin manyetik alan. $\vec{\nabla} \times \vec{A} \equiv \text{rot} \vec{A}$ ile $\vec{A}$ 'nın rotasyonelini gösteririz. $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ vektördür.

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

Küresel $\vec{A} = \vec{A}(r, \theta, \varphi)$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{r} \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \hat{\theta} \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\varphi} \end{aligned}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks Sayılar ve Fonksiyonlar

İntegral Hesapları

Matrisler

Diferansiyel Denklemler

Özel Fonksiyonlar

Kaynaklar

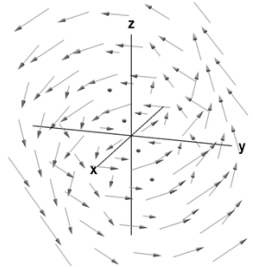


Vektörel Fonksiyonun Rotasyoneli 2

Silindirik $\vec{A} = \vec{A}(r, \theta, z)$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{A} = & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{k}\end{aligned}$$

Yorum: Eğer $\vec{A}$ vektör alanı kapalı bir eğrinin teğetlerinden oluşuyorsa $\vec{\nabla} \times \vec{A} \neq 0$ olur. Örneğin, dere kenarında elinizdeki kuru ot parçalarını suya attınız ve bu parçalar su yüzeyinde daireler çiziyorsa orada suyun hız alanı vektörünün rotayoneli sıfır olmaz.



Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



$\text{grad} f$, $\text{div} \vec{A}$ ve $\text{rot} \vec{A}$ için Bazı Özellikler

- 1 $\vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) = (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{A} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) f$
- 2 $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{A}$
- 3 $\vec{\nabla} \times (f \vec{A}) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{A} + (\vec{\nabla} \times \vec{A}) f$
- 4 $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$
- 5 $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$
- 6 $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

Burada $\nabla^2 \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ Laplace operatörü denir. Kartezyen koordinatlarda şöyledir.

$$\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Küresel ve silindirik koordinatlarda ∇^2 ifadesine kitaplardan bakınız.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

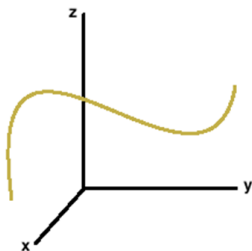


Vektör Alanının Yol İntegrali 1

En genelde şekildeki eğriyi (yörüngeyi ya da yolu) C ile temsil ederiz ve şöyle formülleştiririz.

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} = (x(t), y(t), z(t))$$

Burada t parametresi $t_0 \leq t \leq t_1$ aralığında tanımlı sürekli bir değişkendir.



$\vec{A}(\vec{r})$ vektör alanının (vektörel fonksiyonunun) C eğrisi boyunca integralini $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$ ile gösteriririz. Genel olarak bu integral eğrinin şekline (yani yola) bağlıdır.

Özel olarak bazen $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$ yoldan bağımsız olabilir. Örneğin, klasik mekanikte mekanik enerjinin korunumu.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Vektör Alanının Yol İntegrali 2

Burada C eğrisi üzerinde sonsuz yakın iki nokta arasındaki yerdeğiştirme $d\vec{r}$ 'yi t cinsinden şöyle yazabiliriz.

$$d\vec{r}(t) = (dx(t), dy(t), dz(t)) = (\dot{x}(t)dt, \dot{y}(t)dt, \dot{z}(t)dt)$$

Burada $dx = \frac{dx}{dt} dt = \dot{x}dt, \dots$

$$\begin{aligned}\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} &= \int_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (A_x \dot{x} + A_y \dot{y} + A_z \dot{z}) dt\end{aligned}$$

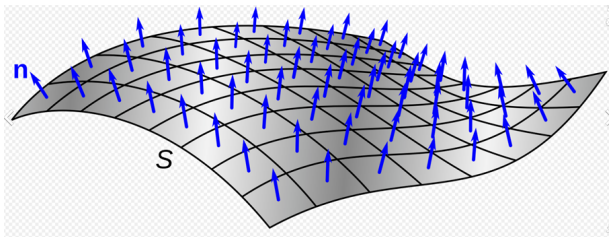
Özellikler

- ① $\int_{-C} \vec{A} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$
- ② $\int_C (\vec{A} + \vec{B}) \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{B} \cdot d\vec{r}$
- ③ $\int_{C_1 + C_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{r}$



Vektör Alanının Yüzey İntegrali

Üç boyutlu Euclid uzayımızda bir yüzeyi, yüzey büyüklüğü çarpı yüzeyin normali olarak vektörel bir nicelik haline getirebiliriz; $\vec{S} = S\hat{n}$. Küre veya semer gibi eğrisel yüzeylerde $\hat{n}$ 'nin yönü noktadan noktaya değiştiği için toplam eğrisel yüzeyi minik minik bir sürü düzlemsel yüzeylere böleriz. Her bir sonsuz küçük düzlemsel yüzey vektörünü $d\vec{S} = dS\hat{n}$ olarak ifade ederiz.



$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ integrali $\vec{A}$ vektörünün S yüzeyinden geçen toplam akısını tanımlar.

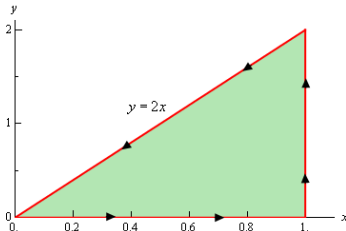


Düzlemde Green Teoremi

İki boyutlu düzlemsel bir uzay düşünelim; xy -düzlemi diyelim. $\oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ kapalı yörünge integralinin sonucu yüzey inetgrali olarak yazılabilir.

$$\oint_C (A_x dx + A_y dy) = \iint_S \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy$$

Burada $A_x = A_x(x, y)$ ve $A_y = A_y(x, y)$. Kapalı C eğrisi, açık S yüzeyinin sınırıdır. Sol taraftaki kapalı yörünge integralini alırken kapalı C eğrisini sağ el kuralına göre (yani sağ elin baş parmağı $+z$ 'yi gösterecek şekilde dört parmak yönünde) dolaşırız.





Diverjans Teoremi

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

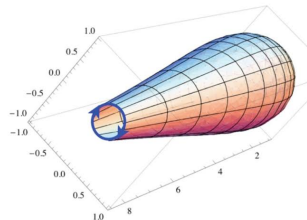
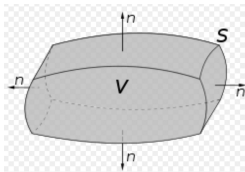
Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Üç boyutlu Eclid uzayında V hacmine sahip bölgenin sınırını kapalı S yüzeyi ile gösterelim. $\vec{A}$ vektör alanının diverjansının hacim integralini vektörün yüzey integrali olarak yazabiliriz.

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV$$

Burada $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$. Ayrıca, $d\vec{S}$ 'nin yönü her zaman kapalı yüzeyin dışına doğru olacak. Örneğin, elektrik konusunu çalışırken Gauss yasasında bu sonucu kullanırız.





Stokes Teoremi

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Üç boyutlu Eclid uzayında eğrisel açık S yüzeyine sahip bölgenin sınırını kapalı C eğrisi ile göstereyim. $\vec{A}$ vektör alanının rotasyonelinin yüzey integralini vektörün yörünge integrali olarak yazabiliriz.

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

Burada $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$. Ayrıca, C 'nin yönü her zaman sağ el kuralı ile belirlenir. Yani, sağ elin dört parmağı C yönünde iken baş parmak S yüzeyinin normalini gösterir. Örneğin, elektrik ve manyetizma konusunu çalışırken Faraday yasasında bu sonucu kullanırız.

Düzlemde Green teoremi bunun düzlem yüzeyler için yazılmış özel bir durumudur.



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Soru: $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ ile $\vec{B} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ vektörlerine dik ve boyu 5 br olan vektörü bulunuz.

Çözüm: $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ ile elde edilen $\vec{C}$ vektörü tanım gereği hem $\vec{A}$ hem de $\vec{B}$ ye diktir.

$$\begin{aligned}\vec{C} &= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k} \\ &= -5\hat{i} - 8\hat{j} - 6\hat{k}\end{aligned}$$

Bunun boyunu ayarlamak için $\vec{C}' = N\vec{C}$ diyelim. Şimdi de $|\vec{C}'| = \sqrt{\vec{C}' \cdot \vec{C}'} = 5$ yaparak $N = 1/\sqrt{5}$ buluruz. O halde, cevap şudur.

$$\vec{C}' = -\frac{1}{\sqrt{5}}(5\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k})$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Soru: $\vec{C} = 3xz^2\hat{i} + 2xy\hat{j} - x^2\hat{k}$ vektör alanı ve $\phi = 3x^2 - yz$ skaler alanı için $\text{div}(\phi\vec{C})$ hesap ediniz.

Çözüm: Diverjansın özelliğini kullanarak şunu yazabiliriz.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{C}) &= (\vec{\nabla}\phi) \cdot \vec{C} + \phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) \\&= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k} \right) \cdot \vec{C} \\&\quad + \phi \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) \\&= (6x\hat{i} - z\hat{j} - y\hat{k}) \cdot (3xz^2\hat{i} + 2xy\hat{j} - x^2\hat{k}) \\&\quad + (3x^2 - yz) (3z^2 + 2x) \\&= 27x^2z^2 - 4xyz + x^2y + 6x^3 - 3yz^3\end{aligned}$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Soru: $\vec{A} = 3xz\hat{i} + 2xy^2\hat{j} - yz\hat{k}$ vektör alanı ve $\phi = 3x^2 - yz$ skaler alanı için (a) $\vec{\nabla}\phi = ?$ (b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = ?$ (c) $\vec{\nabla} \times \vec{A} = ?$

Çözüm: Grad, div ve rot tanımlarını kullanalım.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k} \\ &= 6x\hat{i} - z\hat{j} - y\hat{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= 3z + y(4x - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k} \\ &= (-z - 0)\hat{i} + (3x - 0)\hat{j} + (2y^2 - 0)\hat{k} \\ &= -z\hat{i} + 3x\hat{j} + 2y^2\hat{k}\end{aligned}$$



Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

KOMPLEKS SAYILAR ve FONKSİYONLAR



Kompleks Sayı Nedir?

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Aşağıda verilen işlem kurallarını sağlayan sıralı iki reel sabit çiftidir. (a, b) kompleks sayı, $a \in \mathbb{R}$ ve $b \in \mathbb{R}$.

- 1 Toplama: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- 2 Çıkarma: $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$
- 3 Çarpma: $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
- 4 Bölme: $\frac{(a, b)}{(c, d)} = \frac{(ac + bd, bc - ad)}{c^2 + d^2}$

Kompleks sayı $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ olarak yazılırsa, şöyle de ifade edilebilir.

$$(a, b) \equiv a + ib \in \mathbb{C}$$

$$(1, 0) \equiv 1 \text{ reel birim} \quad \Rightarrow \quad 1^2 = +1 \text{ veya } \sqrt{+1} = 1$$

$$(0, 1) \equiv i \text{ sanal birim} \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1 \text{ veya } \sqrt{-1} = i$$

Kompleks eşlenik: $(a, b)^* = (a, -b)$ veya $i^* = -i$



Örnek: $2 - 3i$ ve $4 + 7i$ olsun.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

- $(2 - 3i)^* = 2 - 3(-i) = 2 + 3i$
- $(2 - 3i)(2 - 3i)^* = (2)(2) + (2)(3i) + (-3i)(2) + (-3i)(3i)$
 $= (2)^2 + (-3)^2 = 13 \in \mathbb{R}$

NOT: Her zaman $(a + ib)(a + ib)^* = (a)^2 + (b)^2 \in \mathbb{R}$

- $(2 - 3i)^{-1} = \frac{1}{(2 - 3i)} = \frac{1}{(2 - 3i)} \frac{(2 - 3i)^*}{(2 - 3i)^*} = \frac{2 + 3i}{13}$
- $(2 - 3i)(4 + 7i) = 29 + 2i$
- $\frac{2 - 3i}{4 + 7i} = \frac{(2 - 3i)(4 - 7i)}{(4 + 7i)(4 - 7i)} = \frac{-13 - 26i}{65}$

Dikkat! Paydada kompleks sayı bırakılmaz.



Kompleks Değişken ve Kompleks Düzlem

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

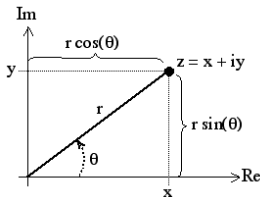
Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

x ve y reel değerler alabilen değişkenler olmak üzere kompleks sayılarla aynı işlem kurallarına uyan değişken çiftine “kompleks değişken” denir; $z = (x, y)$ veya $z = x + iy$ ile gösterilir.

$x = \operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(z)$: z 'nin reel kısmı

$y = \operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(z)$: z 'nin sanal kısmı



$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$: z 'nin modülü
(mutlak değeri) $0 \leq r \leq \infty$

$\theta = \arctan(y/x)$: z 'nin argümanı
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\mathbb{R}$ 'yi doğru üzerinde gösterirken, $\mathbb{C}$ 'yi düzlemde gösteririz.

Buna kompleks düzlem denir. Bu resme de Argand diyagramı adı verilir.

2. Bölge: $\pi > \theta > \pi/2$	1. Bölge: $\pi/2 > \theta > 0$
3. Bölge: $3\pi/2 > \theta > \pi$	4. Bölge: $2\pi > \theta > 3\pi/2$



z 'nin Kutupsal Gösterimi

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ serisinde $x = i\theta$ koyup $i^2 = -1$,
 $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, vd kullanırsak, ardından

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - + \dots$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - + \dots$$

yazarsak şunu elde ederiz.

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{Euler formülü}$$

Şimdi, kompleks düzlemde z 'yi yeniden yazalım.

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \quad \text{De Moivre formülü}$$

$z = x + iy$: z 'nin kartezyen temsili

$z = re^{i\theta}$: z 'nin kutupsal temsili



Örnek: Kutupsal Gösterim

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

(a) $z = -1 + i$ (b) $z = 3 - 3\sqrt{3}i$ kompleks sayılarını kutupsal gösterimde yazınız.

Çözüm: (a) Bu nokta $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ yarıçaplı çember üzerinde. $\tan \theta = (+1)/(-1)$ ise $\theta = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$ çünkü 2. bölgede

$$z = \sqrt{2}[\cos(3\pi/4) + i \sin(3\pi/4)] = \sqrt{2}e^{i3\pi/4} \quad (\theta = 135^\circ)$$

(b) Bu nokta $r = \sqrt{(3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = 6$ yarıçaplı çember üzerinde. $\tan \theta = (-3\sqrt{3})/(+3)$ ise $\theta = 2\pi - \pi/3 = 5\pi/3$ çünkü 4. bölgede

$$z = 6[\cos(5\pi/3) + i \sin(5\pi/3)] = 6e^{i5\pi/3} \quad (\theta = 300^\circ)$$



Kutupsal Gösterimde Bazı İşlemler

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ve $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ iki tane kompleks değişken ve n bir tamsayı olsun.

- $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$
- $z_1 / z_2 = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$
- $z_1^n = (r_1 e^{i\theta_1})^n = r_1^n [\cos(n\theta_1) + i \sin(n\theta_1)]$

Kompleks düzlemde argümanı 2π kadar artırdığımızda aynı z noktasına geliriz, çünkü $\sin(\theta) = \sin(\theta + 2\pi k)$ ve $\cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi k)$ burada $k = 0, 1, 2, \dots$. O halde,

$$z = r e^{i\theta} = r e^{i(\theta + 2\pi k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Artık, z 'nin n . dereceden kökünü tanımlayabiliriz.

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= r^{1/n} e^{i(\theta + 2\pi k)/n} \\ &= r^{1/n} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

Dikkat! Burada $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Kök Bulma

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$z^3 - 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini hesap ediniz.

Çözüm: $z^3 = 1 = 1 + i0$ ise $r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ ve $\tan \theta = 0/1 = 0$ 'dan $\theta = 0$ olur. O halde, $z^3 = e^{i0} = e^{i(0+2\pi k)}$ yazabiliriz.

$$z = e^{i(0+2\pi k)/3} = \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \text{ için } z_1 = \cos(0) + i \sin(0) = 1$$

$$k = 1 \text{ için } z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 2 \text{ için } z_3 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Kompleks düzlemde birim çember üzerinde $\theta = 0^\circ$, $\theta = 120^\circ$ ve $\theta = 240^\circ$ açılarındaki noktalara karşılık gelirler.



Örnek: Cebirsel Denklem Çözümü

$e^{2z^2} = 1 + i$ bağıntısını sağlayan tüm z değerlerini bulunuz.

Çözüm: Önce $1 + i$ 'yi kutupsal koordinatlarda yazalım.

$$1 + i = \sqrt{1^2 + 1^2} e^{i[\arctan(1/1) + 2\pi k]} = \sqrt{2} e^{(\pi/4 + 2\pi k)i}$$

Şimdi soruda verilen eşitliğin $\ln$ 'ini alalım.

$$2z^2 = \ln \sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)i = \frac{1}{2} \ln 2 + \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)i$$

$$z^2 = \frac{1}{4} \ln 2 + \left(\frac{\pi}{8} + \pi k\right)i = r e^{i(\theta + 2\pi l)}$$

Burada $r = \sqrt{\frac{1}{16} \ln^2 2 + \pi^2 \left(\frac{1}{8} + k\right)^2}$ ve

$$\tan \theta = \frac{\pi(1/8+k)}{(\ln 2)/4} = \frac{\pi(1+8k)}{2 \ln 2}. \text{ Sonuçta } z \text{ şöyle olur.}$$

$$z = \left[\frac{1}{16} \ln^2 2 + \pi^2 \left(k + \frac{1}{8} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}} e^{i \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\pi(1+8k)}{2 \ln 2} \right) + \pi l \right]}$$

Burada $l = 0, 1$ ve $k = 0, 1, 2, \dots$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Kompleks Fonksiyonlar 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

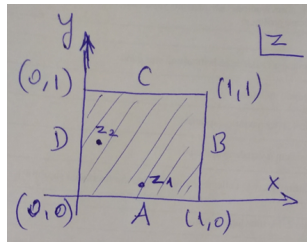
$z = \{z_1, z_2, z_3 \dots\}$ kümesine tanım bölgesi diyelim.

$w = \{w_1, w_2, w_3 \dots\}$ kümesine de değer bölgesi diyelim.

Tanım bölgesi z -kompleks düzleminde bir bölgedir, değer bölgesi de w -kompleks düzleminde bir bölgedir.

$w = f(z)$ kompleks fonksiyonu tanım bölgesinde bulunan her bir kompleks sayıya değer bölgesinde bulunan bir kompleks sayıyı bire bir ve örten olarak atayan bir kuraldır.

Örnek: $w = z^2$ fonksiyonunun z -düzlemindeki ABCD kenarlı kare bölgesini w -düzleminde hangi bölgeye taşıdığını bulunuz. Bu işleme kompleks fonksiyonun tasviri denir.





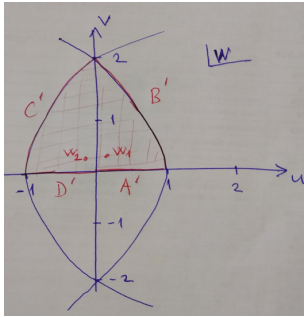
Kompleks Fonksiyonlar 2

$w = z^2$ fonksiyonunu açıkça yazalım,
 $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$. Böylece,

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{ve} \quad v(x, y) = 2xy$$

A kenarı: $0 \leq x \leq 1$ ve $y = 0$ olduğu için $v = 0$ doğrusu ve $u = x^2$ yani $0 \leq u \leq 1$.

B kenarı: $x = 1$ ve $0 \leq y \leq 1$ olduğu için $v = 2y$ 'den $y = v/2$. Bunu $u = 1 - y^2$ 'de yerleştir; $u = 1 - v^2/4$ parabolü, $0 \leq v \leq 2$.



C kenarı: $y = 1$ ve $0 \leq x \leq 1$ olduğu için $v = 2x$ 'den $x = v/2$. Bunu $u = x^2 - 1$ 'de yerleştir; $u = v^2/4 - 1$ parabolü, $0 \leq v \leq 2$.

D kenarı: $0 \leq y \leq 1$ ve $x = 0$ olduğu için $v = 0$ doğrusu ve $u = -y^2$ yani $-1 \leq u \leq 0$.



Kompleks Fonksiyonlarda Türev

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Reel $f(x)$ fonksiyonunda x_0 noktası doğru üzerinde olduğundan sadece sağdan ve soldan yaklaşarak limitler alıp, iki sonuç aynıysa x_0 noktasında türev tanımlıyorduk.

Kompleks $f(z)$ fonksiyonu için z_0 noktası düzlemde yer aldığından z_0 noktasına sonsuz sayıda yönden yaklaşabiliriz. Bu da türev tanımını biraz daha zorlaştırır. Sembolik olarak şöyle yazacağız.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{df}{dz} \equiv f'(z) \equiv w'$$

Örnekler

- 1 $w = Az^k$ ise $w' = Akz^{k-1}$
- 2 $w = \cos(z)$ ise $w' = -\sin(z)$
- 3 $(w_1 w_2)' = w_1' w_2 + w_1 w_2'$



Analitik Fonksiyon

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Bir $f(z)$ fonksiyonu D bölgesinde tek değerli ve sonsuz defa türevi alınabiliyorsa $f(z)$ bu bölgede analitik fonksiyondur.

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks fonksiyonunun analitik olması için aşağıdaki iki Cauchy-Riemann koşulu gerekli ve yeterlidir.

- 1 $\frac{\partial f}{\partial x}$ ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevleri (veya $\frac{\partial f}{\partial z}$) sürekli olmalıdır.
- 2 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ şartları (veya $\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0$) sağlanmalıdır.

İkinci şartın birinci eşitliğinin x türevini ve ikinci eşitliğin y türevini alıp taraf tarafa toplarsak $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ buluruz. x ve y türevlerinin yerini değiştirerek $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ elde ederiz. Yani, $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ fonksiyonları 2-boyutlu Laplace denklemini sağlarlar. O nedenle, u ile v fonksiyonlarına “harmonik fonksiyonlar” denir.



Bazı Temel Kompleks Fonksiyonlar 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Polinomlar: $f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \cdots + c_nz^n$ fonksiyonu n . dereceden polinomdur. Her z için analitiktir.

Üstel Fonksiyonlar: $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$
Her z için analitiktir.

Trigonometrik Fonksiyonlar: Euler formülü yardımıyla

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{ve} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Hem $\sin z$ hem de $\cos z$ fonksiyonu her z için analitiktir.

Hiperbolik Fonksiyonlar: Euler formülü yardımıyla

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{ve} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Her iki fonksiyon da her z için analitiktir. Özellikler;

- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
- $\cos(ix) = \cosh x, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
- $\sin(iy) = i \sinh y, \quad y \in \mathbb{R}$



Bazı Temel Kompleks Fonksiyonlar 2

Logaritma Fonksiyonları: $\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$

Ancak kompleks z -düzleminde argümanı 2π 'nin tam katı kadar artırdığımızda aynı noktayı elde ederiz.

$$\ln z = \ln r + i(\theta + 2\pi k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Bu fonksiyon tek-değerli olmadığı için analitik değildir. Bu fonksiyon sonsuz katlıdır, yani sonsuz tane k değeri (aynı z değeri) için sonsuz tane farklı $\ln z$ değeri veriyor.

Kesirli (Rasyonel) Fonksiyonlar: $P(z)$ ve $Q(z)$ iki analitik fonksiyon olmak üzere

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

rasyonel fonksiyonu $Q(z) \neq 0$ olan noktalarda analitik olurlar.

$z^{1/n}$ Türevinde Fonksiyonlar: $n > 0$ bir tamsayı olmak üzere $f(z) = z^{1/n}$ fonksiyonu n -katlı olduğu için analitik değildir.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Analitik Fonksiyon Olabilir mi?

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Bir kompleks fonksiyonun reel kısmı $\text{Re}f(z) = 4x^2y + xe^y$ ise $f(z)$ 'nin analitik olamayacağını gösteriniz.

Çözüm: $u = 4x^2y + xe^y$ biliyoruz. Cauchy-Riemann koşullarını yazalım.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 8xy + e^y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = 8y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -4x^2 - xe^y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = -xe^y$$

Burada

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

olduğu için $f(z)$ analitik olamaz.

Dikkat! $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ olduğunu kontrol ediniz.



Örnek: Analitik Fonksiyonu Bulun

Bir kompleks fonksiyonun reel kısmı $\text{Re} f(z) = e^x \cos y - x$ ise $f(0) = 3$ koşulunu sağlayan analitik $f(z)$ 'yi bulun.

Çözüm: $u = e^x \cos y - x$ biliyoruz. İlk Cauchy-Riemann koşulunu kullanalım, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y - 1$. O halde,

$$v = \int (e^x \cos y - 1) dy = e^x \sin y - y + C(x)$$

Şimdi ikinci C-R koşulunu, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, kullanalım.

$$e^x \sin y + \frac{dC}{dx} = e^x \sin y \quad \Rightarrow \quad \frac{dC}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad C(x) = C_0$$

Böylece, $f(z) = u + iv = e^x \cos y - x + i(e^x \sin y - y + C_0) = e^x(\cos y + i \sin y) - (x + iy) + iC_0 = e^x e^{iy} - z + iC_0 = e^z - z + iC_0$.

Burada $f(0) = 3$ ise $iC_0 = 2$ olur. Sonuçta, $f(z) = e^z - z + 2$ buluruz. **Dikkat!** Burada $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Kompleks İntegraller 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

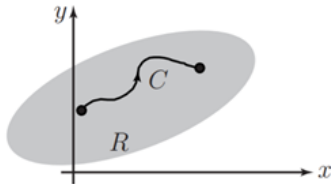
İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

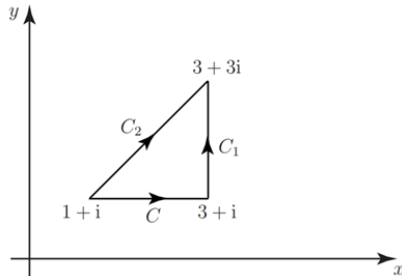
Kaynaklar



Eğer $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemde bir R bölgesinde sürekli ve tek-değerli bir fonksiyon ise $f(z)$ 'nin C eğrisi boyunca integralini şöyle tanımlarız.

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + iv)(dx + idy)$$

Soru: $\int_C z dz$ kompleks integralini şekildeki **(a)** C eğrisi, **(b)** C_1 eğrisi, **(c)** C_2 eğrisi, **(d)** kapalı $C + C_1 + (-C_2)$ eğrisi üzerinden hesaplayınız.





Kompleks İntegraller 2

Çözüm: (a) C yörüngesi $y = 1$ ve $x : 1 \rightarrow 3$ doğru parçasıdır. O halde, $dy = 0$ ve $z = x + i$ ve $dz = dx$ olur.

$$\int_C z \, dz = \int_1^3 (x + i) \, dx = \left(\frac{x^2}{2} + ix \right)_1^3 = 4 + 2i$$

(b) C_1 yörüngesi $x = 3$ ve $y : 1 \rightarrow 3$ doğru parçasıdır. O halde, $dx = 0$ ve $z = 3 + iy$ ve $dz = i \, dy$ olur.

$$\int_{C_1} z \, dz = \int_1^3 (3 + iy) i \, dy = \left(3iy - \frac{y^2}{2} \right)_1^3 = -4 + 6i$$

(c) C_2 yörüngesi $y = x$ ve $x : 1 \rightarrow 3$ doğru parçasıdır. O halde, $dy = dx$ ve $z = x + ix$ ve $dz = (1 + i) \, dx$ olur.

$$\int_{C_2} z \, dz = \int_1^3 (1 + i)^2 x \, dx = 2i \left(\frac{x^2}{2} \right)_1^3 = 8i$$

(d) $\int_{C+C_1-C_2} z \, dz = (4 + 2i) + (-4 + 6i) + (-8i) = 0$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

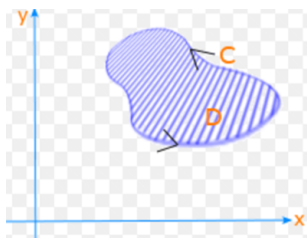
Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Kompleks İntegraller 3: Cauchy Teoremi

Önceki sorunun (d) şıkında bulduğumuz sonuç geneldir. Bunu Cauchy teoremi olarak veriyoruz.



Kompleks düzlemde D bölgesinde ve bunu çevreleyen kapalı C eğrisi üzerinde analitik olan $f(z)$ fonksiyonunun bu C kapalı eğrisi üzerinden integrali her zaman sıfırdır.

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Soru: $e^{3zi} = -1 + i$ bağıntısını sağlayan tüm z değerlerini bulunuz.

Çözüm: Öncelikle $-1 + i$ kompleks sayısını $re^{i(\theta+2\pi k)}$ biçiminde yazalım.

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad , \quad \theta = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

O halde

$$e^{3zi} = 2^{1/2} e^{i(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k)} \quad \Rightarrow \quad 3zi = \frac{1}{2} \ln 2 + i \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \right)$$

yazabiliriz. Son olarak z yi çekersek sonuç şu olur.

$$z = \left(\frac{\pi}{4} + k \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{i}{6} \ln 2 \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Soru: Reel kısmı $u(x, y) = e^{-x} \sin y - \frac{x}{x^2 + y^2}$ olan $f(z)$ kompleks fonksiyon, analitik olabilir mi? Gösteriniz. Eğer "evet" ise, analitik fonksiyonu bulunuz.

Çözüm: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonunun analitik olabilmesi için hem u hem de v iki-boyutlu Laplace denklemini sağlamalıdır. Kontrol edelim.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x} \sin y + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x} \sin y + \frac{6xy^2 - 2x^3}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x} \cos y + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-x} \sin y + \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Evet! Gerçekten $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ sağlanıyor. O halde, analitik $f(z)$ vardır. Şimdi, $v(x, y)$ belirlemek için Cauchy-Riemann şartlarını kullanalım.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow v(x, y) = -\int \frac{\partial u}{\partial y} \partial x \\ v(x, y) &= -\int \left[e^{-x} \cos y + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right] \partial x \\ &= e^{-x} \cos y + \frac{y}{x^2 + y^2} + C(y)\end{aligned}$$

x e göre kısmi türevden integrale geçtiğimiz için integral sabiti y ye bağlı olabilir: $C = C(y)$. Şimdi de C nin y bağımlılığını belirlemek için Cauchy-Riemann şartlarından diğerini kullanalım:



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{dC(y)}{dy} = 0$$

Yani $C(y)$ niceliği y 'ye bağlı değil, gerçekten bir sabitmiş! O halde,

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{-x} \sin y - \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left[e^{-x} \cos y + \frac{y}{x^2 + y^2} \right] + C \\ &= e^{-x} i (\cos y - i \sin y) - \frac{x - iy}{x^2 + y^2} + C \\ &= ie^{-x} e^{-iy} - \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} + C \\ &= ie^{-(x+iy)} - \frac{1}{x + iy} + C \\ &= ie^{-z} - \frac{1}{z} + C \end{aligned}$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

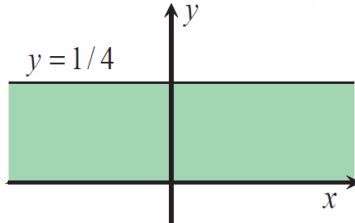
Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Soru: $f(z) = 1/z$ fonksiyonuna göre z -düzlemindeki $y = 1/4$ doğrusunun w -düzlemindeki tasvirini bulunuz ve şekil çiziniz. z -düzleminde şekilde gösterilen taralı şerit şeklindeki bölge w -düzleminde hangi bölgeye haritalanır? Şekil çizerek gösteriniz.



Çözüm: Öncelikle u ile v 'yi x ve y cinsinden yazalım.

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow u + iv = \frac{1}{x + iy} \Rightarrow u + iv = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

O halde,

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Her ikisinde de $y = 1/4$ yazalım.

$$u = \frac{x}{x^2 + 1/16}, \quad v = \frac{-1/4}{x^2 + 1/16}$$

Şimdi de taraf tarafa bölelim.

$$x = \frac{-u}{4v}$$

Bu sonucu bir üst satırda u 'da veya v 'de kullanırsak u ile v arasında

$$u^2 + v^2 + 4v = 0$$

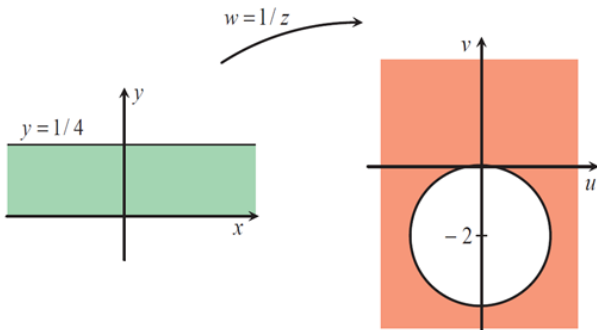
bağıntısını elde ederiz. Bunu da tam kare biçiminde yazarsak



Sorular ve Çözümler

$$u^2 + (v + 2)^2 = 2^2$$

sonucuna ulaşırız ki bu denklem merkezi $(u, v) = (0, -2)$ noktasında olan 2 br yarıçaplı bir çemberi tanımlar. Buna göre şeridin iç bölgesi bu dairenin dış bölgesine haritalanmıştır. Aşağıdaki şekle bakınız.





BÖLÜM 4

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

**İntegral
Hesapları**

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

İNTEGRAL HESAPLARI



Temel İntegral Bilgimiz

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

- Toplama işleminin ters işlemi çıkarma işlemidir.
- Çarpma işleminin ters işlemi bölme işlemidir.
- Türev işleminin ters işlemi integral işlemidir.
- Geometrik olarak türev, bir eğrinin (ya da fonksiyonun) teğetinin eğimini verir.
- Geometrik olarak integral, bir eğriyle (ya da fonksiyonla) eksen arasında kalan bölgenin alanını hesaplatır.
- c keyfi bir sabit olmak üzere
$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + c \text{ ise } \frac{df}{dx} = 6x^2 - 8x$$
- $\int \frac{df}{dx} dx = \int (6x^2 - 8x) dx = 2x^3 - 4x^2 + c = f(x)$
- $\int dx = x + c$ veya $\int dt = t + c$ veya $\int dx^2 = x^2 + c$.
Yani, $\int d(\text{birsey}) = (\text{birsey}) + c$
- $a = sbt$ olmak üzere $\int dv = \int a dt \Rightarrow v = v_0 + at$
burada v_0 integral sabitidir.



İntegral Alma Teknikleri

İntegral hesaplarını kabaca aşağıdaki şekilde gruplayabiliriz.

Belirsiz İntegraller	Belirli İntegraller
Değişken atama Kısmi integrasyon	Belirsiz integralde sınırları yerleştirme Bilinen integrallerin kullanılması Rezidü teoreminin kullanılması

Örnek: Değişken Atama Yöntemi

$$I = \int \frac{x dx}{x^2+1} = ?$$

Burada $x^2 + 1 = y$ diyelim. $2x dx = dy$ olduğu için $x dx = dy/2$ yazarız.

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \ln y + c = \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + c$$

Burada c 'ye integral sabiti denir.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Kısmi İntegrasyon

$$I = \int x^2 \sin x \, dx = ?$$

Çözüm: $d(uv) = du \, v + u \, dv$ ise $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ eşitliğine kısmi integrasyon denir.

Sorumuzda $u = x^2$ ve $dv = \sin x \, dx$ dersek $du = 2x \, dx$ ve $v = -\cos x$. O halde, I şöyle olur.

$$I = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx$$

Sağdaki ikinci terimde tekrar kısmi integrasyon yapalım.

$u = x$ ve $dv = \cos x \, dx$ dersek $du = dx$ ve $v = \sin x$ olur.

$$\begin{aligned} I &= -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x \, dx \right) \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c \end{aligned}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Belirsiz İntegralde Sınırları Koy

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$$

Önce bunu belirsiz integral olarak hesap edelim. Değişken dönüşümü yaparak hesaba başlayabiliriz.

$x = \sin \theta$ dersek $dx = \cos \theta d\theta$ ve $0 \leq x \leq 1$ iken $0 \leq \theta \leq \pi/2$ olur.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}}$$

Burada $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ise $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ kullanalım.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta} = \int_0^{\pi/2} d\theta = \theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$



Bilinen İntegrallerin Kullanılması

Örnek: Koordinat Sistemini Değiştirme 1

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = ?$$

Çözüm: $0 \leq x \leq \infty$ olduğu için bu integral, xy -düzleminin sağ yarı bölgesinde çizgisel integraldir.

$x \rightarrow y$ yazalım; $I = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$. Bu da xy -düzleminin üst yarı bölgesinde çizgisel integraldir. O halde,

$$I^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Bu integral, xy -düzleminin sağ üst çeyrek bölgesinde yüzey integralidir. Kutupsal koordinatlara geçelim.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad dA = (dx)(dy) = (dr)(rd\theta)$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Koordinat Sistemini Değiştirme 2

Üst sağ çeyrek bölge: $0 \leq r \leq \infty$ ve $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

$$I^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \, dr d\theta$$

Burada $\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi/2$ hesap edilir.

$$I^2 = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \, dr$$

Değişken değiştirelim; $r^2 = u$ ise $r dr = du/2$.

$$I^2 = \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} e^{-u} du = -\frac{\pi}{4} \left(e^{-u} \right)_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$$

Bunun karekökünü alalım.

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Gauss İntegrali

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = ? \quad \text{burada } \alpha > 0 \text{ sabit.}$$

Bu integrali iki integralin toplamı olarak yazalım.

$$I = \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha x^2} dx + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$$

İlk integralde $x \rightarrow -x$ yazalım.

$$I = - \int_{\infty}^0 e^{-\alpha x^2} dx + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$$

Şimdi de $\sqrt{\alpha}x = y$ diyelim. $I = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Sonuçta;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Simetrilerin Kullanımı 1

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x^5 e^{-\alpha x^2} dx = ? \quad \text{burada } \alpha > 0 \text{ sabit.}$$

İntegrali iki parçaya ayıralım.

$$I = \int_{-\infty}^0 x^5 e^{-\alpha x^2} dx + \int_0^{+\infty} x^5 e^{-\alpha x^2} dx$$

İlk integralde $x \rightarrow -x$ yazalım.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\infty}^0 (-x)^5 e^{-\alpha(-x)^2} d(-x) + \int_0^{+\infty} x^5 e^{-\alpha x^2} dx \\ &= \int_{\infty}^0 x^5 e^{-\alpha x^2} dx + \int_0^{+\infty} x^5 e^{-\alpha x^2} dx \\ &= - \int_0^{\infty} x^5 e^{-\alpha x^2} dx + \int_0^{+\infty} x^5 e^{-\alpha x^2} dx = 0 \end{aligned}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Simetrilerin Kullanımı 2

En genelde

$f(-x) = -f(x)$ antisimetrik (veya tek) fonksiyon,
 $g(-x) = +g(x)$ simetrik (veya çift) fonksiyon olmak üzere

$$\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 0$$

$$\int_{-a}^{+a} f(x)g(x) dx = 0$$

$$\int_{-a}^{+a} g(x) dx = 2 \int_0^{+a} g(x) dx$$

$$\int_{-a}^{+a} f^2(x) dx = 2 \int_0^{+a} f^2(x) dx$$

Burada a bir sabit.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Kompleks Değişkenlerin Kullanımı

α pozitif ve λ keyfi sabitler ise

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos(\lambda x) dx = ?$$

Burada $\cos(\lambda x) = \operatorname{Re} [e^{i\lambda x}]$ yazalım.

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} e^{i\lambda x} dx = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha - i\lambda)x} dx \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{-1}{\alpha - i\lambda} e^{-(\alpha - i\lambda)x} \right]_0^{\infty} \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{-1}{\alpha - i\lambda} e^{-\alpha x} (\cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x)) \right]_0^{\infty} \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{\alpha - i\lambda} = \operatorname{Re} \frac{\alpha + i\lambda}{\alpha^2 + \lambda^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2} \end{aligned}$$

Bilgi: $\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ burada $n > 0$ ve $\alpha > 0$ sabitler.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: İntegralin Parametreye Göre Türevi

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$I = \int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = ?$$

Önce α parametresine bağlı bir integral tanımlayalım.

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx \quad \text{öyle ki} \quad I(1) = I$$

Şu integrali biliyoruz; $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

Bu eşitliğin α 'ya göre iki defa kısmi türevini alalım.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \right) &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) \\ \int_0^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx &= \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} \end{aligned}$$

Sonuçta,

$$I(\alpha) = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} \quad \Rightarrow \quad I(1) = \int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}$$



Örnek: Kareye Tamamlama 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

a pozitif ve b keyfi sabitler olsun. Hatta b saf sanal bile olabilir; yani $b \rightarrow ib$ olabilir.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx} dx = ?$$

Burada üssüyü düzenleyelim.

$$\begin{aligned} -ax^2 + bx &= -a \left(x^2 - \frac{b}{a}x \right) = -a \left[\left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] \\ &= -a \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

Bunu integrale yerleştirelim.



Örnek: Kareye Tamamlama 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

**İntegral
Hesapları**

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4a}\right]} dx \\ &= e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2} dx \end{aligned}$$

Değişken değiştirelim; $x - \frac{b}{2a} = y$ ise $dx = dy$ ve $-\infty \leq y \leq +\infty$.

$$I = e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy$$

Buradaki Gauss integralinin sonucunu biliyoruz.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a}$$



Örnek: Sabit Vektörlü İntegral 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

μ pozitif, A keyfi sabitler ve $\vec{k}$ sabit bir vektör olsun.

$$I = \int \frac{A}{r} e^{-\mu r} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} = ?$$

Burada sadece bir tane integral işareti görsek de $d^3\vec{r}$ terimi bu integralin üç katlı olduğunu gösterir. İntegrantın içinde r gördüğümüz için küresel koordinatlarda çalışırız.

$$d^3\vec{r} = (dr)(r d\theta)(r \sin \theta d\phi) = (r^2 dr)(\sin \theta d\theta d\phi) = r^2 dr d\Omega$$

Burada $d\Omega$ 'ya katı açı elemanı ve $d^3\vec{r}$ hacim elemanı denir.

$$I = A \int_0^\infty dr \frac{r^2}{r} e^{-\mu r} \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \int_0^{2\pi} d\phi$$



Örnek: Sabit Vektörlü İntegral 2

$\mathbb{R}^3$ uzayında eksen takımını seçmekte serbestiz. Eğer sabit bir vektör $\vec{k}$ varsa, z-eksenini bu vektöre paralel seçmek işlemleri çok sadeleştirir ama genellikle hiçbir şey kaybettirmez.

Böylece, z-ekseni $\parallel \vec{k}$ olduğu için $\vec{k} \cdot \vec{r} = kr \cos \theta$ olur.

$$I = A \int_0^\infty dr r e^{-\mu r} \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{ikr \cos \theta} \int_0^{2\pi} d\phi$$

Burada ϕ integrali kolayca $I_\phi = \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$ çıkar.

θ integralinde değişken dönüşümü yapalım; $\cos \theta = u$ ise $\sin \theta d\theta = -du$

$$\begin{aligned} I_\theta &= \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{ikr \cos \theta} = - \int_{+1}^{-1} du e^{ikru} \\ &= \frac{1}{ikr} \left[e^{ikru} \right]_{u=-1}^{u=+1} = \frac{2}{kr} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2i} = \frac{2}{kr} \sin(kr) \end{aligned}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Sabit Vektörlü İntegral 3

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Bu iki sonucu integralimize yerleştirelim.

$$I = \frac{4\pi A}{k} \int_0^\infty dr e^{-\mu r} \sin(kr)$$

Burada diğer tüm parametreler reel olduğu için $\sin(kr) = \text{Im}[e^{ikr}]$ kullanabiliriz.

$$\begin{aligned} I &= \frac{4\pi A}{k} \text{Im} \int_0^\infty dr e^{-\mu r} e^{ikr} \\ &= \frac{4\pi A}{k} \text{Im} \frac{\mu + ik}{\mu^2 + k^2} = \frac{4\pi A}{k} \frac{k}{\mu^2 + k^2} \\ &= \frac{4\pi A}{\mu^2 + k^2} \end{aligned}$$

Burada k ile $\vec{k}$ 'nin boyunu gösteriyoruz.



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Soru: Aşağıdaki integrali hesaplayınız.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Çözüm: I 'yı reel α parametresinin bir fonksiyonu olarak yazalım.

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx$$

O halde, $I = I(0)$ olur. Yani, önce $I(\alpha)$ 'yı hesaplayacağız. En son, $\alpha = 0$ yerleştirerek cevabı elde edeceğiz. $I(\alpha)$ 'yı hesap edebilmek için önce $I(\alpha)$ 'nın α 'ya göre türevini alalım.

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = - \int_0^{\infty} \sin x e^{-\alpha x} dx$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$\begin{aligned}\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} &= - \int_0^{\infty} (\operatorname{Im} e^{ix}) e^{-\alpha x} dx = -\operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{ix} e^{-\alpha x} dx \\ &= -\operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-i)x} dx = -\operatorname{Im} \frac{1}{\alpha-i} = -\frac{1}{\alpha^2+1}\end{aligned}$$

Böylece $I(\alpha)$ 'yı hesaplarız.

$$I(\alpha) = - \int \frac{d\alpha}{\alpha^2+1} = C - \arctan \alpha$$

İntegral sabiti C 'yi belirlemek için $I(\infty) = 0$ kullanırız;
 $0 = C - \arctan(\infty)$ ise $C = \pi/2$. Böylece,

$$I = I(0) = \frac{\pi}{2} - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$



Sorular ve Çözümler

Soru: Aşağıdaki integrali hesaplayınız.

$$I = \int_0^{\infty} x^2 e^{-3x^2} dx$$

Çözüm: Önce $\alpha > 0$ sabiti cinsinden bilindik bir integral yazalım.

$$I_{\alpha} = \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$$

O halde, $I_3 = I$ olur. Yani, önce I_{α} integralini hesaplayacağız. En son, $\alpha = 3$ yerleştirerek cevabı elde edeceğiz.

$$I_{\alpha} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = \frac{1}{4\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Burada $\alpha = 3$ yerleştirerek cevaba ulaşırız.

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-3x^2} dx = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

MATRİSLER



Matris Nedir?

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Eski Latince'de matrix, matric "rahim" sözcüğünden, yeni Latince'de matrix "içi boş kalıp, matematikte matris" sözcüğünden alıntıdır.

Bugün bizim için matris, sayıların veya terimlerin dikdörtgen çerçeve içine dizilmiş halidir; Dizgi, diziliş, tablo.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & A_{ij} & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

Burada A_{ij} 'lere A matrisinin elemanları veya bileşenleri denir. Bu matris $m \times n$ matristir, yani m tane satır ve n tane sütun vardır; $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$.



Matrislerde Toplama ve Çarpma

Eğer $m = n$ ise A matrisine kare matris adı verilir.

Not: $A_{ij} \in \mathbb{R}$ veya $A_{ij} \in \mathbb{C}$ olabilir.

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij} \quad \text{burada} \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Notlar:

- 1 $AB \neq BA$ çarpma komutatif olmayabilir.
- 2 AB 'de A 'nın satırı ile B 'nin sütunu çarpılır.
- 3 AB 'nin tanımlı olması için A 'nın sütun sayısı ile B 'nin satır sayısı aynı olmalıdır.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Sıfır Matrisi ve Birim Matris

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Sıfır Matrisi: Bütün elemanları 0 olan matris.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Birim matris: Köşegen elemanları 1 diğer elemanları sıfır olan matris.

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \delta_{ij} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Yani, $\mathbb{I}_{ij} = \delta_{ij}$ Kronecker deltası



Örnek: İki Matrisin Toplamı ve Çarpımı

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -i \end{pmatrix}$$

ise **(a)** $6iA = ?$ **(b)** $A + B = ?$ **(c)** $AB = ?$

Çözüm: **(a)** $6iA = \begin{pmatrix} 12i & -6 \\ 0 & 6i \end{pmatrix}$

(b) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & -2 + i \\ 3 & 1 - i \end{pmatrix}$

(c) $AB = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -i \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (2)(1) + (i)(3) & (2)(-2) + (i)(-i) \\ (0)(1) + (1)(3) & (0)(-2) + (1)(-i) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 + 3i & -3 \\ 3 & -i \end{pmatrix}$$



Temel Bazı İşlemler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Bir matriste aşağıdaki temel işlemler tanımlıdır.

Matris	Bileşenler	Örnek
A	A_{ij}	$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$
Transpoz A^T	$(A^T)_{ij} = A_{ji}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i & 2 \end{pmatrix}$
Kompleks eşlenik A^*	$(A^*)_{ij} = A_{ij}^*$	$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$
Hermitsel eşlenik veya adjoint $A^\dagger =$ $(A^T)^* = (A^*)^T$	$(A^\dagger)_{ij} = (A_{ji})^*$	$\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$



Matrisin Determinantı 1

2×2 matrisin determinatı

$$\det A = \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

3×3 matrisin determinatı

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{12} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix}$$

En genelde $n \times n$ matrisin determinantını şöyle ifade edebiliriz.

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} A_{1i} \text{Minör}[A_{1i}]$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Matrisin Determinantı 2

Burada Minör $[A_{1i}]$ niceliği A matrisinin 1-inci satırı ve i -yinci sütunu silinerek elde edilen $(n - 1) \times (n - 1)$ altmatrisin determinantıdır.

Not: A matrisinin 1-inci satırı olmak zorunda değil. Satırlardan birini alabiliriz. Hatta herhangi bir sütunu alarak da determinantı yazabiliriz.

Özellikler

- 1 Bir matrisin iki satırı veya iki sütunu yer değiştirirse, determinatın işareti değişir.
- 2 Bir matrisin iki satırı veya iki sütunu aynıysa, determinatı sıfırdır.
- 3 $\det(ABC) = (\det A)(\det B)(\det C)$
- 4 $\det(A^T) = \det A$
- 5 $\det(A^\dagger) = (\det A)^*$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Matrisin İzi

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

A matrisinin köşegeni üzerindeki elemanların toplamına A matrisinin izi denir ve Tr ile gösterilir. İngilizce trace: iz demektir.

$$\text{Tr}A = A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{nn} = \sum_{i=1}^n A_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} A_{ij}$$

Özellikler:

- 1 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$
- 2 $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB) = \text{Tr}(BCA)$
- 3 $\text{Tr}(A^\dagger) = (\text{Tr}A)^*$



Matrisin Tersi 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

A matrisinin tersi A^{-1} aşağıdaki bağıntıyla tanımlıdır.

$$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{I} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^n (A^{-1})_{ik} A_{kj} = \delta_{ij}$$

Burada A_{kj} ve δ_{ij} içindeki n^2 tane sayıyı biliyoruz ama $(A^{-1})_{ik}$ içinde n^2 tane bilinmeyen var. Bu n^2 tane bilinmeyeni olan n^2 tane denklem çözüldüğünde aşağıdaki pratik sonuca ulaşılır.

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det A} \text{Minör}[A_{ji}]$$

Dikkat! Soldaki ij dizilişine karşın sağda ji dizilişi var.



Matrisin Tersi 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Minör $[A_{ji}]$: A matrisinin j -yinci satırını ve i -yinci sütununu silerek elde edilen altmatrisin determinantıdır. “Minör” yerine bazen “kofaktör” de denir.

Not: Bazı kitaplarda $(-1)^{i+j}$ Minör $[A_{ji}]$ terimine Minör $[A_{ji}]$ yazar. Yani, ± 1 çarpanı minör tanımı içine konulur.

Özellikler:

- 1 $\det A = 0$ ise A^{-1} yoktur. Bu durumda A 'ya tekil matris denir.
- 2 $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
- 3 $\det(A^{-1}A) = \det \mathbb{I} \Rightarrow \det(A^{-1}) \det(A) = 1$
Böylece, $\det A^{-1} = 1/\det A$



Örnek: Matrisin Tersini 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & -i & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ise} \quad A^{-1} = ?$$

Çözüm: Önce determinantı hesap edelim.

$$\begin{aligned} \det A &= (2) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -i & -2 \end{vmatrix} - (i) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (0) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -i \end{vmatrix} \\ &= (2)(-2 + 5i) - (i)(-6 - 0) + 0 \\ &= -4 + 16i \end{aligned}$$

$\det A \neq 0$ olduğu için A^{-1} vardır.

Şimdi de minörleri hesap edelim.

$$\text{Min}[A_{11}] = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -i & -2 \end{vmatrix} = -2 + 5i$$



Örnek: Matrisin Tersi 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$\text{Min}[A_{12}] = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad \text{Min}[A_{13}] = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -i \end{vmatrix} = -3i$$

$$\text{Min}[A_{21}] = \begin{vmatrix} i & 0 \\ -i & -2 \end{vmatrix} = -2i, \quad \text{Min}[A_{22}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\text{Min}[A_{23}] = \begin{vmatrix} 2 & i \\ 0 & -i \end{vmatrix} = -2i, \quad \text{Min}[A_{31}] = \begin{vmatrix} i & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5i$$

$$\text{Min}[A_{32}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10, \quad \text{Min}[A_{33}] = \begin{vmatrix} 2 & i \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3i$$

Bu sonuçları $(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det A} \text{Minör}[A_{ji}]$ bağıntısına yerleştirelim.



Örnek: Matrisin Tersisi 3

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \text{Min}[A_{11}] & -\text{Min}[A_{21}] & \text{Min}[A_{31}] \\ -\text{Min}[A_{12}] & \text{Min}[A_{22}] & -\text{Min}[A_{32}] \\ \text{Min}[A_{13}] & -\text{Min}[A_{23}] & \text{Min}[A_{33}] \end{pmatrix}$$

Sonuçta, $A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & -i & -2 \end{pmatrix}$ matrisinin tersi yazılır.

$$A^{-1} = \frac{1}{-4 + 6i} \begin{pmatrix} -2 + 5i & 2i & 5i \\ 6 & -4 & -10 \\ -3i & 2i & 2 - 3i \end{pmatrix}$$



İlave Matris Özellikleri

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

- ① Eğer $A^* = A$ ise A reel matristir.
- ② Eğer $A^* = -A$ ise A saf sanal matristir.
- ③ Eğer $A^T = A$ ise A simetrik matristir.
- ④ Eğer $A^T = -A$ ise A anti-simetrik matristir.
- ⑤ Eğer $A^\dagger = A$ ise A hermitsel matristir.
- ⑥ Eğer $A^\dagger = -A$ ise A anti-hermitsel matristir.
- ⑦ Eğer $A^T = A^{-1}$ ise A ortogonal (dik) matristir.
- ⑧ Eğer $A^\dagger = A^{-1}$ ise A üniter (birimsel) matristir.
- ⑨ Eğer $i \neq j$ için $A_{ij} = 0$ (veya $A_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$) ise A köşegen matristir.
- ⑩ Eğer $A^2 = A$ ise A idempotent (eşgüçlü) matristir.



Vektörlerin Matris Gösterimi 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} = (\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k}) \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Koordinat sistemi değişmediği sürece baz vektörlerimiz değişmiyordu. Bu durumda bu uzaydaki bütün vektörleri sadece bileşenleri ile temsil edebiliyorduk.

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \equiv \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

İki vektörün skaler çarpımını yazalım.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = (A_x \quad A_y \quad A_z) \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

O halde,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \Rightarrow A^T B = B^T A$$



Vektörlerin Matris Gösterimi 2

Not: Eğer vektörler kompleks vektörlerse skaler çarpımda sıra önemlidir.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^\dagger B \quad \text{ve} \quad \vec{B} \cdot \vec{A} = B^\dagger A \quad \Rightarrow \quad \vec{A} \cdot \vec{B} \neq \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Örnek: $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ ve $\vec{B} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ olsun.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^\dagger B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + i$$

$$\vec{B} \cdot \vec{A} = B^\dagger A = \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} = 2 - i$$

Özellik: $\vec{A} \cdot \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{A})^*$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Vektörlerin Matris Gösterimi 3

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

İki vektörün vektörel çarpımını determinat yardımıyla yazabiliriz.

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x)\end{aligned}$$

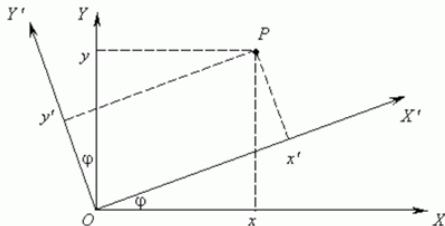
Benzer olarak vektörün rotasyonelini de yazabiliriz.

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$



Lineer Koordinat Dönüşümleri 1

Somut bir örnek olarak $\mathbb{R}^2$ 'de iki tane kartezyen koordinat sistemi (eksen takımı) çizelim.



$X'Y'$ eksen takımı XY eksen takımına göre ters saat yönünde φ kadar dönmüş. Ya da, XY eksen takımı $X'Y'$ eksen takımına göre saat yönünde φ kadar dönmüş.

Nasıl isterseniz öyle söyleyiniz. Konuların somut olması için biz birinciyi söyleyeceğiz.



Lineer Koordinat Dönüşümleri 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Keyfi bir P noktasının koordinatlarını iki eksen takımında da yazalım; $P : (x, y)$ ve $P : (x', y')$.

Şekli inceleyerek üssülü ve üssüsüz koordinatlar arasında aşağıdaki lineer bağıntıları yazabiliriz.

$$x' = \cos \varphi x + \sin \varphi y$$

$$y' = -\sin \varphi x + \cos \varphi y$$

Bu iki lineer denklemi bir tane matris denklemi olarak yazabiliriz.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{“koordinat dönüşümü”}$$

Sağdaki 2×2 matrise dönüşüm matrisi denir, genellikle R ile gösterilir ve ortogonal bir matristir; yani $R R^T = R^T R = \mathbb{I}$.



Lineer Koordinat Dönüşümleri 3

Koordinatların artış yönünü birim vektörler ile göstermiştik.

$\hat{i}$: x koordinatının artış yönü

$\hat{j}$: y koordinatının artış yönü

$\hat{i}'$: x' koordinatının artış yönü

$\hat{j}'$: y' koordinatının artış yönü

O halde,

$$\begin{pmatrix} \hat{i}' & \hat{j}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^T \quad \text{"baz dönüşümü"}$$

Eğer baz vektörleri değişirse, vektörün bileşenleri de değişir.

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} = A'_x \hat{i}' + A'_y \hat{j}' + A'_z \hat{k}'$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

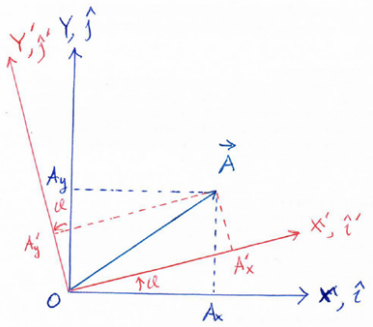
Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Lineer Koordinat Dönüşümleri 4

Şekile bakarak bileşenler arasında bağıntılar yazabiliriz.



$$A'_x = \cos \varphi A_x + \sin \varphi A_y$$

$$A'_y = -\sin \varphi A_x + \cos \varphi A_y$$

Bu iki lineer denklemi bir tane matris denklemi olarak yazalım.

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \quad \text{"vektör dönüşümü"}$$

Ortogonal dönüşümde $|\vec{A}'| = |\vec{A}|$, yani $\sqrt{\vec{A}' \cdot \vec{A}'} = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$



Lineer Koordinat Dönüşümleri 5

Buna benzer lineer koordinat dönüşümlerini farkında olarak ya da olmayarak fizik derslerinde kullanırız. Örneğin;

- Eğik düzlem problemlerinde eksenlerden birini eğik düzlem yüzeyine paralel seçeriz, diğeri de bu yüzeye dik olur. Bu durumda aşağı doğru olan yerçekimi ivmesini, $g_x = 0$ ve $g_y = -g$, yeni koordinat sisteminde $g'_x = -g \sin \varphi$ ve $g'_y = -g \cos \varphi$ olarak bileşenlerine ayırırız. Burada φ eğik düzlemin açısıdır.
- Bağıl hareketi incelerken aşağıdaki gibi koordinat dönüşümleri yaparız. $x'y'$ eksen takımı, xy eksen takımına göre x -koordinatı yönünde v hızıyla hareket etsin.

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$t = 0$ anında iki koordinat sistemin orijinleri çakışacak şekilde kronometreyi başlattık!

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Matrisin Özdeğerleri ve Özvektörleri 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Bir kare matris (operatör) bir sütun matrisine (vektöre) etki ederse onu yeni bir sütun matrisine (vektöre) dönüştürür.

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{"matris denklemi"}$$

Bu bağıntıyı kısaca ve soyut olarak şöyle yazarız.

$$A\vec{x} = \vec{y} \quad \text{"matris denklemi"}$$

Şimdi özel bir şey isteyelim. Yeni vektör eski vektörle orantılı olsun. Yani, $\vec{y} = \lambda\vec{x}$. Burada $\lambda \in \mathbb{R}$ veya $\lambda \in \mathbb{C}$ bir sabit.



Matrisin Özdeğerleri ve Özvektörleri 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \text{"özdeğer denklemi"}$$

λ : A matrisinin özdeğeri

$\vec{x}$: A matrisinin λ özdeğerli özvektörü

Eğer A matrisi $n \times n$ bir matris ise n tane özdeğer olabilir.
Bazen bu özdeğerler çakışık olabilir.

Teori: *Hermitsel bir matrisin özdeğerleri reeldir ve farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörler biri birilerine diktir.*

Örnek: Aşağıdaki matrisin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2i \\ 4 & -2i & 0 \end{pmatrix}$$



Örnek: Matrisin Özdeğer Problemi 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$A^\dagger = A$ olduğu görülüyor. O sebeple, özdeğerleri reel olmalıdır.

Özdeğer denklemini, $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, açıkça yazalım.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2i \\ 4 & -2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2i \\ 4 & -2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 4 \\ 0 & 1 - \lambda & 2i \\ 4 & -2i & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bu denklemi soyut olarak $(A - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = 0$ şeklinde ifade ederiz.



Örnek: Matrisin Özdeğer Problemi 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Eğer $\det(A - \lambda \mathbb{I}) \neq 0$ olursa $x = y = z = 0$, yani $\vec{x} = 0$, olur. Bu aşıkâr çözümü istemiyoruz. O nedenle, $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$ yapan λ değerlerini buluruz.

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 4 \\ 0 & 1 - \lambda & 2i \\ 4 & -2i & -\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda + 4)(\lambda - 5) = 0$$

Böylece özdeğerlerimiz $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = 5$ olarak çıkar. Hepsi de reel!

Şimdi her bir λ_i için $\vec{x}_i$ özvektörünü hesap edelim.

İlk olarak $\lambda_1 = 1$ özdeğerini yukarıda özdeğer denklemine yerleştirelim.



Örnek: Matrisin Özdeğer Problemi 3

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2i \\ 4 & -2i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Buradan aşağıdaki üç denklemi yazabiliriz.

$$4z_1 = 0, \quad 2iz_1 = 0, \quad 4x_1 - 2iy_1 - z_1 = 0$$

İlk iki denklem aynı sonucu verir; $z_1 = 0$. Bunu üçüncü denkleme yerleştiririz; $y_1 = -2ix_1$. O halde, ilk özvektörümüzü yazalım.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2ix_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Not: Her zaman denklem sayısı bilinmeyen sayısından bir eksik olur. Son denklem normalizasyondan gelir; $|\vec{x}| = 1$.



Örnek: Matrisin Özdeğer Problemi 4

$\vec{x}_1$ özvektörünü normalize ederek x_1 'i belirleyelim.

$$|\vec{x}_1| = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & 2ix_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ -2ix_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$x_1^2 + 4x_1^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1/\sqrt{5}$$

En sonunda $\lambda_1 = 1$ özdeğerine karşılık gelen normalize özvektörü yazabiliriz.

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Benzer adımları takip ederek diğer iki normalize özvektörü de hesaplarız.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Matrisin Özdeğer Problemi 5

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$\lambda_2 = -4 \quad \text{için normalize özvektör} \quad \vec{x}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2i \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = +5 \quad \text{için normalize özvektör} \quad \vec{x}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bu üç tane özvektörün ortogonalliklerini (dikliklerini) kontrol edelim.

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = \frac{1}{15} (1 \quad 2i \quad 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 2i \\ -5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}} (1 \quad 2i \quad 0) \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$



Örnek: Matrisin Özdeğer Problemi 6

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_3 = \frac{1}{9\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 & -2i & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Buna göre $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ vektörleri ortonormal bir baz kümesi oluşturur;

$$\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = \delta_{ij} \quad \text{“ortonormallik”}$$

Teorem: *Hermitsel bir matrisin normalize özvektörlerinden oluşturulan matris, üniter bir matristir.*

Örneğin, çözdüğümüz sorunun normalize özvektörlerini kullanalım.

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2i}{\sqrt{5}} & \frac{2i}{3\sqrt{5}} & \frac{i}{3} \\ 0 & \frac{-5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow U^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2i}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{-2i}{3\sqrt{5}} & \frac{-5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-i}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



Matrisin Köşegenleştirilmesi 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Bu iki matrisi çarparsak $UU^\dagger = \mathbb{I}$ olduğunu görürüz. Yani $U^\dagger = U^{-1}$ olduğu için U üniter bir matristir.

Teorem: *Hermitsel bir A matrisinin normalize özvektörlerinden oluşturulan U üniter matrisi, $U^\dagger AU$ çarpımıyla A matrisini köşegen yapar ve köşegen üzerinde A 'nın özdeğerleri olur.*

Örnek sorumuza uygulayalım.

$$\begin{aligned} A' &= U^\dagger AU \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2i}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{-2i}{3\sqrt{5}} & \frac{-5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-i}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2i \\ 4 & -2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2i}{\sqrt{5}} & \frac{2i}{3\sqrt{5}} & \frac{i}{3} \\ 0 & \frac{-5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Matrisin Köşegenleştirilmesi 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2i}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{-2i}{3\sqrt{5}} & \frac{-5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-i}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-16}{3\sqrt{5}} & \frac{10}{3} \\ \frac{-2i}{\sqrt{5}} & \frac{-8i}{3\sqrt{5}} & \frac{5i}{3} \\ 0 & \frac{20}{3\sqrt{5}} & \frac{10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Soru: A ile A' matrislerinin determinantlarını ve izlerini hesap ediniz.

$$\det A = -20 = \det A' \text{ ve } \text{Tr} A = 2 = \text{Tr} A'$$

Soru: U matrisi özvektörleri nasıl dönüştürür?

$$\vec{x}_1' = U^\dagger \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2' = U^\dagger \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3' = U^\dagger \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bu sonuçlar esasında çok daha geneldir. Koordinat sistemi değiştiğinde baz vektörlerimiz değişiyordu. Baz vektörler değişince bir vektörün bileşenleri de değişiyordu. Bu durumda bir matrisin bileşenleri de değişir.



Benzerlik Dönüşümü 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Eski koordinat sisteminde (bazda) A matrisi $\vec{x}$ vektörünü $\vec{y}$ vektörüne dönüştürsün.

$$A\vec{x} = \vec{y} \quad \text{eski bazda vektör dönüşümü}$$

Not: Buradaki bütün denklemler birer matris denklemdir.

Şimdi S matrisi ile yeni bir baza (koordinat sistemine) geçelim.

$$\vec{x}' = S\vec{x} \quad \text{ve} \quad \vec{y}' = S\vec{y} \quad \text{koordinat (baz) dönüşümü}$$

Vektör dönüşüm denklemi yeni bazda aşağıdaki gibi olacaktır.

$$A'\vec{x}' = \vec{y}' \quad \text{yeni bazda vektör dönüşümü}$$

Burada $\vec{x}'$, $\vec{y}'$ vektörlerini $\vec{x}$, $\vec{y}$ vektörleri cinsinden yazalım.

$$A'S\vec{x} = S\vec{y} \quad \Rightarrow \quad S^{-1}A'S\vec{x} = \vec{y} \quad \Rightarrow \quad A = S^{-1}A'S$$



Benzerlik Dönüşümü 2

O halde, bir koordinat (baz) dönüşümü S , vektörleri

$$\vec{x}' = S\vec{x}$$

olarak dönüştürürken, matrisleri

$$A' = SAS^{-1}$$

olarak dönüştürür. Bu dönüşüme benzerlik dönüşümü denir.

$$\begin{aligned}\det A' &= (\det S)(\det A) (\det S^{-1}) = (\det S) (\det S^{-1}) (\det A) \\ &= [\det (SS^{-1})] (\det A) = (\det \mathbb{I})(\det A) = \det A\end{aligned}$$

$$\text{Tr} A' = \text{Tr} (SAS^{-1}) = \text{Tr} (S^{-1}SA) = \text{Tr} (\mathbb{I}A) = \text{Tr} A$$

$$|\vec{x}'|^2 = \vec{x}'^\dagger \vec{x}' = (S\vec{x})^\dagger (S\vec{x}) = \vec{x}^\dagger S^\dagger S \vec{x} = |\vec{x}|^2, \quad \left[S^\dagger = S^{-1} \text{ ise} \right]$$

Son satırda eğer $S^\dagger S = \mathbb{I}$, yani S üniter matris, ise vektörün boyu (normu) her iki koordinat sisteminde aynı kalır.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Sorular ve Çözümler

Soru: Aşağıdaki matrisin özdeğerlerini ve her özdeğere karşılık gelen bire boylandırılmış (normalize) özvektörlerini bulunuz.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Çözüm: Önce özdeğer denklemini hatırlayalım: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ veya $(A - \lambda I)\vec{x} = 0$ olarak ifade edelim. Bunun matris biçimi şöyle olur.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

a, b, c bileşenlerinin sıfırdan farklı olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \pm\sqrt{2}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Sorular ve Çözümler

Önce $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ özdeğerine karşı gelen $\vec{x}_1$ özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow c_1 = a_1 = \frac{-b_1}{\sqrt{2}}$$

Normalizasyon $|a_1|^2 + |b_1|^2 + |c_1|^2 = 1.$

Birlikte $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/2 \end{pmatrix}$

Şimdi de $\lambda_2 = 0$ özdeğerine karşı gelen $\vec{x}_2$ özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow c_2 = -a_2, \quad b_2 = 0$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Normalizasyon $|a_2|^2 + |b_2|^2 + |c_2|^2 = 1.$

Birlikte $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Son olarak $\lambda_3 = +\sqrt{2}$ özdeğerine karşı gelen $\vec{x}_3$ özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow c_3 = a_3 = \frac{b_3}{\sqrt{2}}$$

Normalizasyon $|a_3|^2 + |b_3|^2 + |c_3|^2 = 1.$

Birlikte $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Soru: (a) Aşağıdaki A matrisinin hermitsel olduğunu gösteriniz. (b) A 'nın özdeğerlerini ve her özdeğere karşılık gelen normalize özvektörü bulunuz. (c) Bu özvektörlerin ortogonal (dik) olduklarını gösteriniz. (d) Aşağıda verilen $\vec{S}$ vektörünü normalize ederek bulduğunuz ortonormal vektörler cinsinden yazınız ve bileşenleri (katsayıları) hesap ediniz.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \vec{S} = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Çözüm: (a) Eğer A hermitsel ise $A^\dagger = (A^T)^* = A$ olmalıdır.

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^T)^* = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = A$$



Sorular ve Çözümler

(b) Önce özdeğer denklemini hatırlayalım: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ veya $(A - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = 0$ olarak ifade edelim. Bunun matris biçimi şöyle olur.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

a, b bileşenlerinin sıfırdan farklı olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = +1$$

Önce $\lambda_1 = -1$ özdeğerine karşı gelen $\vec{x}_1$ özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow b_1 = -ia_1$$

Normalizasyon $|a_1|^2 + |b_1|^2 = 1$. Birlikte $\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Şimdi de $\lambda_2 = +1$ özdeğerine karşı gelen $\vec{x}_2$ özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad b_2 = ia_2$$

Normalizasyon $|a_2|^2 + |b_2|^2 = 1$. Birlikte $\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

(c) $\vec{x}_1$ ile $\vec{x}_2$ vektörlerinin biri birine dik olması için skaler çarpımları sıfır olmalıdır.

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \vec{x}_1^\dagger \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad i) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 + i^2) = 0$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

(d) $\vec{S} = N \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$ burada N normalizasyon katsayısı.

Normalizasyon $(\vec{S}, \vec{S}) = 1$.

$$N^2 \begin{pmatrix} -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} = 5N^2 \Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Şimdi bunu $\vec{x}_1$ ve $\vec{x}_2$ cinsinden yazalım.

$$\vec{S} = c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2$$

$$c_1 = (\vec{x}_1, \vec{S}) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3i}{\sqrt{10}}$$

$$c_2 = (\vec{x}_2, \vec{S}) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-i}{\sqrt{10}}$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Soru: Aşağıda verilen A matrisini düşünelim. **(a)** $H = \frac{1}{2}(A + A^\dagger)$ hermitsel matrisini oluşturunuz. **(b)** H matrisinin özdeğerlerinin -1 ve 4 olduğunu gösteriniz. **(c)** Her özdeğere karşılık gelen bire boylandırılmış (normalize) özvektörleri bulunuz. **(d)** Bu vektörlerin dik olduğunu gösteriniz.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4i \\ 0 & 3 + 2i \end{pmatrix}$$

Çözüm: **(a)** $A^\dagger = (A^*)^T$ matrisini oluşturup iki matrisi toplayacağız.

$$H = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 4i \\ 0 & 3 + 2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4i & 3 - 2i \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

(b) Özdeğer denklemini hatırlayalım: $H\vec{x} = \lambda\vec{x}$ veya $(H - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = 0$ olarak ifade edelim. Bunun matris biçimi şöyle olur.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 2i \\ -2i & 3 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

a ve b bileşenlerinin her ikisinin de sıfır olmaması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2i \\ -2i & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1 \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = 4$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

(c) Önce $\lambda_1 = -1$ özdeğerine karşı gelen $\vec{x}_1$ özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -2ib_1$$

Normalizasyon $|a_1|^2 + |b_1|^2 = 1$. Birlikte $\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$

Şimdi de $\lambda_2 = 4$ özdeğerine karşı gelen $\vec{x}_2$ özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} -4 & 2i \\ -2i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad b_2 = -2ia_2$$

Normalizasyon $|a_2|^2 + |b_2|^2 = 1$. Birlikte $\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

(d) İki vektörün skaler çarpımı sıfır ise diktirler.

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} (2i \ 1) \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} = \frac{1}{5} (2i - 2i) = 0$$



Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

DİFERANSİYEL DENKLEMLER



Bağımsız ve Bağımlı Değişken

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Evrenin yasaları matematik dilinde yazılır. Cebir, bir çok statik problemi çözmek için yeterlidir.

Ancak, en ilginç doğa olayları, değişim içerir ve değişen nicelikleri biri birine bağlayan bağıntılar (fonksiyonlar) ile tanımlanırlar. Örneğin, bir boyutta hareket eden cismin konumu, x , zaman, t , içinde değişir. O zaman, konum ile zaman arasında bir bağıntı yazarız.

$$x = f(t) \quad \text{veya kısaca} \quad x = x(t)$$

burada t bağımsız değişken, x bağımlı değişken (bilinmeyen fonksiyon) ve f bilinmeyen fonksiyon adını alır.

$$x' \equiv \frac{dx}{dt} \quad x\text{'in } t\text{'ye göre adi türevi}$$

Aslında, x 'in t 'ye göre değişim oranıdır.



Diferansiyel Denklemler Nedir?

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Tanım: Bir bilinmeyen fonksiyonun türevlerinden en az birini içeren denklemlere *diferansiyel denklem* denir.

Örnekler;

① $\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2$

burada bağımsız değişken t , bağımlı değişken x

② $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 7y = 0$

burada bağımsız değişken x , bağımlı değişken y

③ $\frac{d^3b}{da^3} - \left(\frac{db}{da}\right)^2 + 7a = 0$

burada bağımsız değişken a , bağımlı değişken b

Cebirde çözüm sayılardan oluşur. Diferansiyel denklemde çözüm fonksiyonlardan oluşur.



Diferansiyel Denklemin İncelenmesi

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Diferansiyel denklemi incelemede üç aşama vardır;

- i. Fiziksel olayı tarif eden diferansiyel denklemi bulmak.
- ii. Bu diferansiyel denklemi çözmek.
- iii. Bulunan çözümü yorumlamak.

Örnek: Gergin bir ip üzerinde hareket eden bir böcek eşit zaman aralıklarında aynı miktarda ilerlemektedir. Bu gözlemsel sonucu ifade eden diferansiyel denklemi yazınız, çözünüz ve yorumlayınız.

Adım 1: $\frac{dx}{dt} = v$ burada v bir sabit

Adım 2: $x = x_0 + vt$ burada x_0 integral sabiti

Adım 3: x_0 ilk konum, x son konum



Örnek: Fonksiyondan Denklem Türetme

Soru: C bir sabit olmak üzere $y(x) = Ce^{x^2}$ fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklemi bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = C 2x e^{x^2} = 2x \left(Ce^{x^2} \right) = 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0 \quad \text{diferansiyel denklem}$$

Not: $y(x) = Ce^{x^2}$ fonksiyonuna “bir-parametrelili çözüm ailesi” denir, çünkü her C değeri bir çözüm verir.

$y(0) = 1$ başlangıç şartını (veya sınır şartını) kullanarak C 'yi sabitlersek $y(x) = e^{x^2}$ fonksiyonuna “özel çözüm” denir.

Dikkat! Her diferansiyel denklem bir çözüme sahip olmak zorunda değildir.

$$(y')^2 + y^2 = -1 \quad \text{burada} \quad y' \equiv dy/dx$$

diferansiyel denkleminin reel değerli çözümü yoktur.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Diferansiyel Denklemin Mertebesi, Derecesi

Tanım: Bir diferansiyel denklemin mertebesi, denklemde görülen en yüksek türevin mertebesidir ve derecesi de en yüksek mertebeli türevin kuvvetidir. Örneğin;

$$\left(y^{(4)}\right)^3 + x^2 y^4 y^{(1)} + x^5 y^4 = \sin x \quad \text{burada} \quad y^{(n)} \equiv \frac{d^n y}{dx^n}$$

Bağımsız değişken x

Bağımlı değişken y

Denklemin mertebesi 4

Denklemin derecesi 3

En genelde n . mertebe bir diferansiyel denklem iki türlü ifade edilebilir.

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \quad \text{kapalı biçim}$$

$$y^{(n)} = G\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right) \quad \text{normal biçim}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Adi ve Kısmi Diferansiyel Denklem

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Tanım: Bilinmeyen fonksiyon yalnızca bir tane bağımsız değişkene bağlıysa diferansiyel denklem “adi diferansiyel denklem” adını alır.

Şu ana kadar gördüğümüz tüm diferansiyel denklemler bu türdendir.

Tanım: Eğer bağımlı değişken iki ya da daha çok bağımsız değişkenin bir fonksiyonuysa diferansiyel denkleme “kısmi türevli denklem” veya “kısmi diferansiyel denklem” denir.

Örneğin, k bir sabit olmak üzere

$$u = u(x, t) \quad \text{ise} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

kısmi diferansiyel denklemi bir boyutta difüzyon denklemidir.

Dikkat! Bu bölümde hep adi diferansiyel denklemlerle karşılaşacağız ve sadece “diferansiyel denklem” diyeceğiz.



Başlangıç Değer Problemi

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Tanım: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ve $y(x_0) = y_0$ türündeki problemlere “başlangıç değer problemi” denir.

Örnek: $dy/dx = 2x + 3$, $y(1) = 2$ başlangıç değer problemini çözünüz.

$$\int dy = \int (2x + 3)dx \Rightarrow y(x) = x^2 + 3x + C$$

Burada C keyfi bir sabit olduğu için bu çözüme “bir parametrelili çözüm” veya “genel çözüm” denir.

Başlangıç şartı: $y(1) = 2$

$$1 + 3 + C = 2 \Rightarrow C = -2.$$

O halde, $y(x) = x^2 + 3x - 2$ çözümüne “özel çözüm” denir.



Değişkenlerine Ayrılabilen Dif Denklemler 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin genel olarak çözüm tekniklerine bakacağız.

Eğer $dy/dx = H(x, y)$ denkleminde $H(x, y) = g(x)h(y)$ şeklinde yazılabiliyorsa bu denkleme “birinci mertebe değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem” denir.

Örnek: $dy/dx = -6xy$, $y(0) = 7$, başlangıç değer problemini çözünüz.

$$dy = -6xydx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -6xdx \Rightarrow \ln |y| = -3x^2 + C$$

Başlangıç koşulu: $y(0) = 7$ ise $C = \ln 7$ olur.

$$\ln |y| - \ln 7 = -3x^2 \Rightarrow \frac{|y|}{7} = e^{-3x^2} \Rightarrow y(x) = 7e^{-3x^2}$$

Bütün x için $7e^{-3x^2}$ pozitif olduğundan $|\cdot|$ kaldırdık.



Değişkenlerine Ayrılabilen Dif Denklemler 2

Örnek: $\frac{dy}{dx} = \frac{4-2x}{3y^2-5}$ denklemini çözünüz.

$$\int (3y^2 - 5) dy = \int (4 - 2x) dx$$
$$y^3 - 5y = 4x - x^2 + C \quad \text{kapalı çözüm}$$

Bu ifade x 'in açık bir fonksiyonu olarak y 'ye göre çözülemez.
Bu tür çözümlere “kapalı çözüm” denir.

Bu durumda, çözüm eğrisi şöyle de yazılır.

$$H(x, y) = x^2 - 4x + y^3 - 5y = C$$

Her başlangıç şartı yeni bir C verir. Bunun $x - y$ eksen takımında grafiği çizilir. Her farklı C için de farklı bir eğri çizeriz.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Birinci Mertebe Lineer Dif Denklemler 1

Genel olarak aşağıdaki gibi yazılabilen denkleme

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

birinci mertebe lineer diferansiyel denklem denir.

Not: Her terimde bağımlı değişken y 'nin sadece birinci kuvveti var.

Çözüm için her terim $\rho(x) = e^{\int P(x)dx}$ ile çarpılır.

$$\frac{dy}{dx} e^{\int P(x)dx} + P(x) e^{\int P(x)dx} y(x) = Q(x) e^{\int P(x)dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left[y(x) e^{\int P(x)dx} \right] = Q(x) e^{\int P(x)dx}$$

$$y(x) e^{\int P(x)dx} = \int \left[Q(x) e^{\int P(x)dx} \right] dx + C$$

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \left\{ \int \left[Q(x) e^{\int P(x)dx} \right] dx + C \right\}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Birinci Mertebe Lineer Dif Denklemler 2

Örnek: $(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + 3xy = 6x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Denklemi standart formda yazalım; $\frac{dy}{dx} + \frac{3x}{x^2+1}y = \frac{6x}{x^2+1}$

İntegral çarpanını hesap edelim.

$$\rho(x) = e^{\int \frac{3x}{x^2+1} dx} = e^{\frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx} = e^{\ln(x^2+1)^{3/2}} = (x^2 + 1)^{3/2}$$

Standart formdaki denklemi bununla çarp.

$$(x^2 + 1)^{3/2} \frac{dy}{dx} + 3x(x^2 + 1)^{1/2}y = 6x(x^2 + 1)^{1/2}$$

$$\frac{d}{dx} \left[(x^2 + 1)^{3/2} y \right] = 6x(x^2 + 1)^{1/2}$$

$$(x^2 + 1)^{3/2} y = \int 6x(x^2 + 1)^{1/2} dx = 3 \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{3/2} + C$$

$$y(x) = 2 + C(x^2 + 1)^{-3/2}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Değişken Dönüşümü Yapmak 1

Birinci mertebe diferansiyel denklemler çoğunlukla değişkenlerine ayıramazlar veya lineer olmazlar. Bu durumlarda denklemi çözülebilecek başka bir denkleme dönüştürmek işe yarar.

$$\frac{dy}{dx} = F(ax + by + c) \text{ burada } a, b, c \text{ sabit}$$

biçimindeki denklemlerde $v = ax + by + c$ değişken dönüşümü yapmak, denklemleri değişkenelerine ayrılabilir hale getirir.

Örnek: $\frac{dy}{dx} = (x + y + 3)^2$ denklemini çözünüz.

$v = x + y + 3$ yapalım. $y = v - x - 3$ ve

$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dv} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dv}{dx} - 1$. Diferansiyel denklem şöyle olur.

$$\frac{dv}{dx} - 1 = v^2 \Rightarrow \int \frac{dv}{1 + v^2} = \int dx \Rightarrow \arctan v + C = x$$

$$v = \tan(x - C) \Rightarrow x + y + 3 = \tan(x - C)$$

$$y(x) = \tan(x - C) - x - 3$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Değişken Dönüşümü Yapmak 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

biçimindeki denklemlere “homojen diferansiyel denklemler” denir. Çözüm için $v = y/x$ değişken dönüşümü yapılarak denklem değişkenlerine ayrılabilir hale getirilir.

Doğrulama: $v = y/x$ ise $y = vx$ olur.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial x} = x \frac{dv}{dx} + v$$

Diferansiyel denklem aşağıdaki hale gelir.

$$x \frac{dv}{dx} + v = F(v) \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = F(v) - v \Rightarrow \frac{dv}{F(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

Bu değişkenlerine ayrılmış bir diferansiyel denklemdir.



Değişken Dönüşümü Yapmak 3

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \neq 0 \text{ ve } n \neq 1 \text{ olan sabit}$$

türündeki denklemlere Bernoulli diferansiyel denklemleri denir. Çözüm için $v = y^{1-n}$ dönüşümüyle denklem lineer diferansiyel denklem haline getirilir.

Doğrulama: $v = y^{1-n}$ ise $y = v^{\frac{1}{1-n}}$ olur.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{1-n} v^{\left(\frac{1}{1-n}-1\right)} \frac{dv}{dx} + 0 = \frac{v^{\frac{n}{1-n}}}{1-n} \frac{dv}{dx}$$

Bunu diferansiyel denkleme yerleştirelim ve düzenleyelim.

$$\frac{v^{\frac{n}{1-n}}}{1-n} \frac{dv}{dx} + P(x)v^{\frac{1}{1-n}} = Q(x)v^{\frac{n}{1-n}}$$
$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$$

Bu da birinci mertebe lineer diferansiyel denklemdir.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Tam Diferansiyel Denklemler 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

denkleminde $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ sağlanıyorsa bu denkleme “tam diferansiyel denklem” denir.

Çözüm için soldaki denklemi $dF(x, y) = 0$ olarak yazabiliriz.

Buradan da $F(x, y) = C$ gibi bir kapalı çözüm elde ederiz.

Burada $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ koşulu $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ anlamına gelir.

Örnek: $y^3 dx + 3xy^2 dy = 0$ denklemini çözünüz.

$$\frac{\partial (y^3)}{\partial y} = 3y^2 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial (3xy^2)}{\partial x} = 3y^2$$

O halde, bu bir tam diferansiyel denklemdir ve $dF(x, y) = 0$ olarak yazılabilir.

$$dF(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$



Tam Diferansiyel Denklemler 2

Bunu sorudaki denklemle karşılaştırarak şunu yazarız.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^3 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3xy^2$$

Önce ilk denklemi kullanalım.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^3 \quad \Rightarrow \quad F(x, y) = \int y^3 dx = xy^3 + f(y)$$

$f(y)$ 'yi belirlemek için bunun y 'ye göre türevini alalım ve yukarıdaki ikinci denkleme eşitleyelim.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3xy^2 + \frac{df}{dy} = 3xy^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dy} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(y) = sbt$$

Sonuçta, $F(x, y) = C$ kapalı çözümünü açıkça yazabiliriz.

$$xy^3 = C \quad \text{veya} \quad x = C/y^3$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



İkinci Mertebe Diferansiyel Denklemler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Tanım: $F(x, y, y', y'') = 0$ türündeki denkleme “ikinci mertebe diferansiyel denklem” denir.

Denklemde x veya y açıkça yoksa bir dönüşümle mertebe indirilir.

y İçermeyen Denklemler

$F(x, y', y'') = 0$ denkleminde $y' = p$ yazılır, $y'' = p'$ olur. Şimdi denklem birinci mertebe diferansiyel denklem haline gelir.

$$F(x, p, p') = 0$$

Önce $p(x)$ bulunur, sonra da $y = \int p(x)dx$ ile $y(x)$ hesap edilir.



Örnek: y İçermeyen Dif Denk

$$xy'' + 2y' = 6x \quad \text{denklemini çözünüz.}$$

Önce $y' = p$ ve $y'' = p'$ yazalım.

$$xp' + 2p = 6x \quad \Rightarrow \quad p' + \frac{2}{x}p = 6$$

Şimdi bu lineer birinci mertebe diferansiyel denklemdir.

İntegral çarpanı $\rho = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = x^2$ olur.

$$x^2 p = \int 6x^2 dx \quad \Rightarrow \quad x^2 p = 2x^3 + C_1 \quad \Rightarrow \quad p = 2x + C_1 x^{-2}$$

Son olarak $y = \int p dx$ kullanalım.

$$y = \int (2x + C_1 x^{-2}) dx = x^2 - C_1 x^{-1} + C_2$$

Not: İki tane integral sabiti yazdık; C_1, C_2 . Bu geneldir.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



x İçermeyen Diferansiyel Denklemler

x içermeyen $F(y, y', y'') = 0$ türündeki bir denklemde $y' = p$ yazılır, $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ olur. Şimdi denklem birinci mertebe diferansiyel denklem haline gelir.

$$F(y, p, dp/dy) = 0$$

Önce $p(y)$ bulunur, sonra da $x = \int \frac{dy}{p}$ ile $x(y)$ hesap edilir.

Örnek: $yy'' = (y')^2$ “nonlinear” diferansiyel denklemi çözüünüz.

$$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

$$yp \frac{dp}{dy} = p^2 \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow p(y) = C_1 y$$

$$\frac{dy}{dx} = p = C_1 y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int C_1 dx$$

$$\ln y = C_1 x + \ln C_2 \Rightarrow y = C_2 e^{C_1 x}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



2. Mertebe Lineer Diferansiyel Denklemler 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Tanım: Bağımlı değişkenin sadece sıfırinci kuvvetini veya birinci kuvvetini içeren bir diferansiyel denkleme “lineer diferansiyel denklem” denir.

İkinci mertebeden böyle bir denklem en genelde aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x)$$

- $F(x) = 0$ ise homojen diferansiyel denklem
- $F(x) \neq 0$ ise homojen olmayan diferansiyel denklem
- A, B, C 'lerden hiçbiri x 'e bağlı değilse, sabit katsayılı diferansiyel denklem
- A, B, C 'lerden en az biri x 'e bağlıysa, değişken katsayılı diferansiyel denklem



2. Mertebe Lineer Diferansiyel Denklemler 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

İkinci mertebe diferansiyel denklemlerin genel çözümleri iki tane keyfi integral sabiti içerir. Bu sabitler başlangıç şartları veya sınır şartları ile belirlenir.

Tanım: Bir diferansiyel denklemi ve yarı kapalı aralığın başlangıç noktasında, $a \leq x$, verilen değerleri sağlayan fonksiyonun bulunması problemine “başlangıç değer problemi” denir.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = c_1 \quad \text{ve} \quad y'(a) = c_2$$

Tanım: Bir diferansiyel denklemi ve kapalı aralığın kenarlarında, $a \leq x \leq b$, verilen değerleri sağlayan fonksiyonun bulunması problemine “sınır değer problemi” denir.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = c_3 \quad \text{ve} \quad y(b) = c_4$$

Burada c_1, c_2, c_3, c_4 verilen sabitler.



2. Mertebe Lineer Homojen Dif Denklemler

Teorem: Lineer homojen bir diferansiyel denklemde iki çözümün lineer toplamı da bir çözümdür.

Gösterelim. y_1 ve y_2 iki çözüm olsun. Çözüm, denklemi sağlar.

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$$

Birinci denklemi c_1 sabitiyle, ikinci denklemi c_2 sabitiyle çarpalım ve taraf tarafa toplayalım.

$$[c_1y_1 + c_2y_2]'' + p(x)[c_1y_1 + c_2y_2]' + q(x)[c_1y_1 + c_2y_2] = 0$$

Burada $y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$ lineer toplam.

$$y_3'' + p(x)y_3' + q(x)y_3 = 0$$

Sonuçta y_3 fonksiyonu da bir çözümdür.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



2. Mertebe Lineer Homojen Sabit Katsayılı 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

a, b, c reel veya kompleks sabitler olmak üzere

$$ay'' + by' + cy = 0$$

türündeki denklemlerle fizikte sıklıkla karşılaşırız.

Çözüm için α reel veya kompleks bir sabit olmak üzere $y = e^{\alpha x}$ fonksiyonunu öneririz. Sonra türevlerini alırız.

$$y = e^{\alpha x} \Rightarrow y' = \alpha e^{\alpha x} \Rightarrow y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$$

Bunları diferansiyel denkleme yerleştiririz.

$$(a\alpha^2 + b\alpha + c)e^{\alpha x} = 0 \Rightarrow a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

karakteristik denklemi elde ederiz.



2. Mertebe Lineer Homojen Sabit Katsayılı 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Karakteristik denklemden iki tane kök buluruz, α_1 ve α_2 . İki durum olabilir.

Ⓐ $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ise denklemin genel çözümü şöyle yazılır.

$$y(x) = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$$

Ⓑ $\alpha_1 = \alpha_2$ ise denklemin genel çözümü şöyle yazılır.

$$y(x) = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 x e^{\alpha_1 x}$$

Burada C_1 ile C_2 keyfi integral sabitleridir. Çakışık kök durumuna dikkat ediniz.

Not: İkinci mertebe lineer denklemin genel çözümü lineer bağımsız iki fonksiyonun lineer toplamı olarak yazılır.



Fonksiyonların Lineer Bağımsızlığı

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Tanım: $fg' - f'g$ niceliğine f ile g 'nin Wronskiye denir ve $W(f, g)$ ile gösterilir.

$$W(f, g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - gf'$$

Tanım: $W(f, g) \neq 0$ ise $f(x)$ ile $g(x)$ “lineer bağımsızdır” deriz.

Örnek: $e^{\alpha_1 x}$ ile $e^{\alpha_2 x}$ lineer bağımsız mıdır?

$$W = \begin{vmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \alpha_2 e^{\alpha_2 x} \end{vmatrix} = (\alpha_2 - \alpha_1)e^{(\alpha_1 + \alpha_2)x}$$

Eğer $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ise, $W \neq 0$ olduğu için $e^{\alpha_1 x}$ ile $e^{\alpha_2 x}$ lineer bağımsız olur.

Ödev: $e^{\alpha_1 x}$ ile $xe^{\alpha_1 x}$ lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.



Örnek: Basit Harmonik Salıncıklar

$\dot{x} \equiv dx/dt$ olmak üzere $\ddot{x} + 4x = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Önce $x = e^{\alpha t}$ önerelim. $\ddot{x} = \alpha^2 e^{\alpha t}$ olur.

$$\alpha^2 + 4 = 0 \quad \text{karakteristik denklem}$$

İki farklı kök; $\alpha_1 = 2i$ ve $\alpha_2 = -2i$. Genel çözüm şöyle olur.

$$x(t) = C_1 e^{i2t} + C_2 e^{-i2t}$$

Euler formülüyle; $e^{\pm i2t} = \cos(2t) \pm i \sin(2t)$.

$$x(t) = a_1 \cos(2t) + a_2 \sin(2t)$$

Şu bağıntıyla; $\cos(2t + \phi) = \cos(2t) \cos \phi - \sin(2t) \sin \phi$.

$$x(t) = A \cos(2t + \phi)$$

İntegral sabitleri biri birileri cinsinden yazılır.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Hiperbolik Fonksiyonlar

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$\psi' \equiv d\psi/dx$ olmak üzere $\psi'' - 9\psi = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Önce $\psi = e^{\alpha x}$ önerelim. $\psi'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$ olur.

$$\alpha^2 - 9 = 0 \quad \text{karakteristik denklem}$$

İki farklı kök; $\alpha_1 = 3$ ve $\alpha_2 = -3$. Genel çözüm şöyle olur.

$$\psi(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$$

Şu formülle; $e^{\pm 3x} = \cosh(3x) \pm \sinh(3x)$.

$$\psi(x) = a_1 \cosh(3x) + a_2 \sinh(3x)$$

İntegral sabitleri biri birileri cinsinden yazılır.



Örnek: Çakışık Kök

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$y' \equiv dy/dx$ olmak üzere $y'' - 8y' + 16y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Önce $y = e^{\alpha x}$ önerelim. Türevleri alalım;
 $y' = \alpha e^{\alpha x}$ ve $y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$.

$$\alpha^2 - 8\alpha + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha - 4)^2 = 0$$

Çakışık kök; $\alpha_1 = \alpha_2 = 4$. Genel çözüm şöyle olur.

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} \\ &= (C_1 + C_2 x) e^{4x} \end{aligned}$$

Burada C_1 ve C_2 keyfi integral sabitleri.



Örnek: Sönümlü Serbest Salınım 1

m, c, k reel pozitif sabitler ve $\dot{x} \equiv dx/dt$ olmak üzere aşağıdaki denklemleri çözünüz.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Bu denklem, viskozluğu c ile orantılı bir sıvı içinde Hooke sabiti k olan yaya bağlı m kütleli cismin yaptığı hareketin denklemdir.

Çözüm: Önce denklemleri standart formda yazalım;

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$p = c/2m$ sönüm katsayısı ve $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ doğal frekans.

$x = e^{\alpha t}$ önerisiyle karakteristik denklemleri yazalım.

$$\alpha^2 + 2p\alpha + \omega_0^2 = 0$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Sönümlü Serbest Salınımalar 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Kökleri hesap edelim; $\alpha_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$. Üç durum olabilir.

- *Durum 1:* $p^2 > \omega_0^2$, yani $c > \sqrt{4km}$, olsun.

$$\alpha_1 = -\left(p - \sqrt{p^2 - \omega_0^2}\right) < 0$$

$$\alpha_2 = -\left(p + \sqrt{p^2 - \omega_0^2}\right) < 0$$

$$x(t) = C_1 e^{-(p - \sqrt{p^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(p + \sqrt{p^2 - \omega_0^2})t}$$

Bu durumda $x = 0$ yapan sadece $t \rightarrow \infty$ vardır.

Aşırı sönüm vardır. Salınıcı viskozluğu çok yüksek bir akışkan içinde.



Örnek: Sönümlü Serbest Salınımalar 3

- *Durum 2:* $p^2 = \omega_0^2$, yani $c = \sqrt{4km}$, olsun.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -p < 0$$
$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-pt}$$

Bu durumda $x = 0$ yapan $t \rightarrow \infty$ var ve eğer C_1 ile C_2 zıt işaretliyse $t = -C_1/C_2$ olabilir.

Kritik sönüm vardır. Salınıcı kritik bir viskozluğa sahip bir akışkan içinde.

- *Durum 3:* $p^2 < \omega_0^2$, yani $c < \sqrt{4km}$, olsun.

$$\alpha_1 = -p + i\sqrt{\omega_0^2 - p^2} = -p + i\omega_1$$

$$\alpha_2 = -p - i\sqrt{\omega_0^2 - p^2} = -p - i\omega_1$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Sönümlü Serbest Salınımalar 4

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Burada $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2}$ tanımladık; $\omega_1 < \omega_0$ veya periyot T cinsinden $\omega = 2\pi/T$ ile $T_1 > T_0$.

Şimdi $x(t)$ 'yi yazalım.

$$\begin{aligned}x(t) &= C_1 e^{(-p+i\omega_1)t} + C_2 e^{(-p-i\omega_1)t} \\&= e^{-pt} (C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t}) \\&= e^{-pt} [a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \sin(\omega_1 t)] \\&= A e^{-pt} \cos(\omega_1 t + \phi)\end{aligned}$$

Bu durumda kosinüsün bir çok sıfırı olduğu için $x = 0$ yapan çok sayıda t vardır. Genliği, $A e^{-pt}$, zamanla ekponansiyel azalan salınım hareketi. Salınıcı viskozluğu düşük bir akışkan içinde.



2. Mertebe Lineer İnhomojen Dif Denk 1

$y_h(x)$ ile $y_o(x)$ fonksiyonları aşağıdaki denklemleri sağlasın.

$$y_o'' + p(x)y_o' + q(x)y_o = f(x)$$

$$y_h'' + p(x)y_h' + q(x)y_h = 0$$

Bu iki denklemi taraf tarafa toplayalım.

$$[y_h + y_o]'' + p(x)[y_h + y_o]' + q(x)[y_h + y_o] = f(x)$$

O halde, aşağıdaki homojen olmayan lineer diferansiyel denklemin

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

genel çözümünü şöyle olur.

$$y(x) = y_h(x) + y_o(x)$$

$y_o(x)$ özel çözüm ve $y_h(x)$ homojen (tamamlayıcı) çözüm

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



2. Mertebe Lineer İnhomojen Dif Denk 2

Geçen sayfalarda homojen denklemi

$$y_h'' + p(x)y_h' + q(x)y_h = 0$$

nasıl çözeceğimizi öğrendik. Bu durumda tek yapılacak iş, özel çözümü belirlemektir. İki yöntem göreceğiz; tahmin yöntemi ve sabitlerin değişimi yöntemi.

Tahmin Yöntemi

Eğer $f(x)$ 'in türevleri $f(x)$ ile aynı biçimdeyse, o zaman $y_o(x)$ için bir tahmin yapabiliriz.

$f(x)$	$y_o(x)$
Polinom	Polinom
üstel	üstel
$\sin x, \cos x$	$\sin x, \cos x$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Özel Çözüm 1

$y'' + 3y' + 4y = 3x + 2$ denkleminin özel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $f(x) = 3x + 2$ fonksiyonu birinci derece polinom olduğu için $y_o(x) = Ax + B$ öneriyoruz. Burada A ve B belirsiz katsayılar.

$$y_o = Ax + B \Rightarrow y'_o = A \Rightarrow y''_o = 0$$

Önerilen çözüm inhomojen denklemi sağlamalıdır.

$$0 + 3A + 4(Ax + B) = 3x + 2$$

$$4Ax + (3A + 4B) = 3x + 2$$

Polinom denkleğinden;

$$x^1: 4A = 3 \text{ ise } A = 3/4$$

$$x^0: 3A + 4B = 2 \text{ ise } B = -1/16. \text{ O halde,}$$

$$y_o(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{16} \quad \text{özel çözüm}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Özel Çözüm 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$y'' - 4y = 2e^{3x}$ denkleminin özel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $f(x) = 2e^{3x}$ fonksiyonu üstel olduğu için $y_o(x) = Ae^{3x}$ öneriyoruz. Burada A belirsiz katsayı.

$$y_o = Ae^{3x} \Rightarrow y'_o = 3Ae^{3x} \Rightarrow y''_o = 9Ae^{3x}$$

Önerilen çözüm inhomojen denklemi sağlamalıdır.

$$9Ae^{3x} - 4Ae^{3x} = 2e^{3x} \Rightarrow A = \frac{2}{5}$$

O halde,

$$y_o(x) = \frac{2}{5}e^{3x} \quad \text{özel çözüm}$$



Örnek: Özel Çözüm 3

$3y'' + y' - 2y = 2 \cos x$ denkleminin özel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $f(x) = \cos x$ fonksiyonundan dolayı $y_o(x) = A \cos x + B \sin x$ öneriyoruz. Burada A ile B belirsiz katsayılar.

$$y'_o = -A \sin x + B \cos x$$

$$y''_o = -A \cos x - B \sin x$$

Bunları inhomojen denkleme yerleştir, ortak paranteze al.

$$(-5A + B) \cos x + (-A - 5B) \sin x = 2 \cos x$$

O halde, $-5A + B = 2$ ve $A + 5B = 0$ denklemlerinden $A = -5/13$ ve $B = 1/13$ hesaplanır.

$$y_o(x) = -\frac{5}{13} \cos x + \frac{1}{13} \sin x \quad \text{özel çözüm}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



DİKKAT! Örnek: Özel Çözüm 4

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$y'' - 4y = 2e^{2x}$ denkleminin özel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $f(x) = 2e^{2x}$ fonksiyonundan dolayı $y_o(x) = Ae^{2x}$ öneriyoruz. Burada A belirsiz katsayı.

$$y_o = Ae^{2x} \Rightarrow y'_o = 2Ae^{2x} \Rightarrow y''_o = 4Ae^{2x}$$

Önerilen çözüm inhomojen denklemi sağlamalıdır.

$$4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} = 2e^{2x}$$

$$0 = 2e^{2x} \quad \text{sorun var!}$$

Sorun var, çünkü e^{2x} fonksiyonu homojen çözümlerinden biri.

Dikkat! Önerdiğimiz özel çözüm, homojen çözümlerden farklı olmalıdır.



DİKKAT! Örnek: Özel Çözüm 5

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

İlk akla gelen yeni öneri $y_o = Axe^{2x}$.

$$y_o = Axe^{2x} \Rightarrow y'_o = A(1 + 2x)e^{2x} \Rightarrow y''_o = 4A(1 + x)e^{2x}$$

Önerilen çözüm inhomojen denklemi sağlamalıdır.

$$4A(1 + x)e^{2x} - 4Axe^{2x} = 2e^{2x}$$

$$4A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Sonuçta,

$$y_o(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} \quad \text{özel çözüm}$$



Örnek: Özel Çözüm 6

Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözünüz.

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x} - 10 \cos(3x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

Çözüm: Önce homojen denklemi $y'' - 3y' + 2y = 0$ çözelim.

$$y_h = e^{\alpha x} \Rightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2$$

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \quad \text{homojen çözüm}$$

C_1 ve C_2 keyfi integral sabitleri. $f(x) = 3e^{-x} - 10 \cos(3x)$ olduğu için özel çözüm olarak şunu öneriyoruz.

$$y_o = Ae^{-x} + B \cos(3x) + C \sin(3x)$$

A, B, C belirsiz katsayılar. Bu noktada, y_o 'nün içindeki fonksiyonlar ve türevleri y_h 'de olmadığı için böyle devam edebiliriz.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Özel Çözüm 7

Önerilen özel çözüm inhomojen diferansiyel denklemi sağlamak zorunda.

$$y_o = Ae^{-x} + B \cos(3x) + C \sin(3x)$$

$$y'_o = -Ae^{-x} - 3B \sin(3x) + 3C \cos(3x)$$

$$y''_o = Ae^{-x} - 9B \cos(3x) - 9C \sin(3x)$$

Bunları denkleme yerleştir ve ortak paranteze al.

$$\begin{aligned} 6Ae^{-x} + (-7B - 9C) \cos(3x) \\ + (9B - 7C) \sin(3x) = 3e^{-x} - 10 \cos(3x) \end{aligned}$$

Polinom denkliğinden;

$$6A = 3, \quad 7B + 9C = 10, \quad 9B - 7C = 0$$

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{7}{13}, \quad C = \frac{9}{13}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Özel Çözüm 8

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

O halde, özel çözümü yazabiliriz.

$$y_o = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{7}{13}\cos(3x) + \frac{9}{13}\sin(3x)$$

Şimdi de genel çözümü yazabiliriz.

$$\begin{aligned}y(x) &= y_h(x) + y_o(x) \\ &= C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{7}{13}\cos(3x) + \frac{9}{13}\sin(3x)\end{aligned}$$

Başlangıç şartı için $y'(x)$ hesap edelim.

$$y'(x) = C_1e^x + 2C_2e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{21}{13}\cos(3x) + \frac{27}{13}\sin(3x)$$



Örnek: Özel Çözüm 9

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Başlangıç şartları;

$$y(0) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 + \frac{1}{2} + \frac{7}{13} = 1$$

$$y'(0) = 2 \Rightarrow C_1 + 2C_2 - \frac{1}{2} + \frac{27}{13} = 2$$

İki bilinmeyenli iki lineer denklem sisteminden C_1 ile C_2 çözülür.

$$C_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad C_2 = \frac{6}{13}$$

En sonunda istenen çözüm yazılır.

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{6}{13}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{7}{13}\cos(3x) + \frac{9}{13}\sin(3x)$$



Örnek: Sönümlü Zorlanmış Salınımlar 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Bir akışkan içinde serbestçe hareket eden yaya bağlı cisim problemini incelemiştik ve adına “sönümlü serbest salınım” demiştik. Şimdi bu cisme ilave bir dış kuvvet uygulayalım. Bu kuvvet $F_{dış} = F_0 \cos \omega t$ olsun. Burada ω dış kuvvetin frekansı ve F_0 dış kuvvetin genliği. Yeni duruma “sönümlü zorlanmış salınım” adını veriyoruz. Cismin hareket denklemi şöyle olur.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

Homojen çözümü bulmuştuk.

$$x_h = C_1 e^{-\left(\frac{c}{2m} - \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right)t} + C_2 e^{-\left(\frac{c}{2m} + \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right)t}$$

Üç durum söz kousuydu; $c > \sqrt{4km}$ aşırı sönüm, $c = \sqrt{4km}$ kritik sönüm, $c < \sqrt{4km}$ sönümlü salınım.



Örnek: Sönümlü Zorlanmış Salınımlar 2

Üç durumda da $t \rightarrow \infty$ iken $x_h \rightarrow 0$ idi. Bu nedenle, bu çözüme “geçici çözüm” de denir. Sonuçta yeterince beklenirse, baskın (kararlı) çözüm özel çözümden gelir.

$$x_o(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$\dot{x}_o(t) = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$$

$$\ddot{x}_o(t) = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t$$

Bunları inhomejen diferansiyel denkleme yerleştirelim ve $\cos \omega t$ ile $\sin \omega t$ parantezine alalım. Polinom denkliğinden iki denklem yazarız.

$$\begin{aligned}(k - m\omega^2) A + c\omega B &= F_0 \\ -c\omega A + (k - m\omega^2) B &= 0\end{aligned}$$

A ile B çözülür.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Sönümlü Zorlanmış Salınımlar 3

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$A = \frac{(k - m\omega^2) F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \quad \text{ve} \quad B = \frac{c\omega F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}$$

Artık matematiksel olarak inhomojen diferansiyel denklemin genel çözümünü yazabiliriz, $x(t) = x_h(t) + x_o(t)$.

$$\begin{aligned} x(t) = & C_1 e^{-\left(\frac{c}{2m} - \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right)t} + C_2 e^{-\left(\frac{c}{2m} + \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right)t} \\ & + \left[\frac{(k - m\omega^2) F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \right] \cos \omega t \\ & + \left[\frac{c\omega F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \right] \sin \omega t \end{aligned}$$

Bu haliyle bu çözümü fiziksel olarak yorumlamak çok zor. O yüzden, çözümü farklı bir formda yazalım.



Örnek: Sönümlü Zorlanmış Salınımlar 4

Öncelikle yeterince beklediğimizi varsayarak geçici (homojen) çözümü ihmal edelim.

$$\begin{aligned}x(t) &= x_h(t) + x_o(t) \simeq x_o(t) \\&\simeq A \cos \omega t + B \sin \omega t \\&\simeq C \cos(\omega t - \phi) \quad \text{kararlı çözüm}\end{aligned}$$

Bu da genliği C , frekansı ω olan basit harmonik salınımdır. ϕ faz sabiti olup bu örnekte fiziksel önemi yoktur. C ile ϕ 'yi A ile B cinsinden biliyoruz.

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = , \quad \cos \phi = \frac{A}{C} , \quad \sin \phi = \frac{B}{C}$$

Şimdi $\omega_0^2 = k/m \rightarrow k = m\omega_0^2$ yazalım.

$$x(t) \simeq \frac{F_0}{\sqrt{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Sönümlü Zorlanmış Salınımlar 5

Kararlı salınım hareketinin genliği dış kuvvetin frekansına bağlı, $C(\omega)$. O sebeple, C_{max} yapan ω 'yı hesap edelim.

$$\frac{dC}{d\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2}$$

- $\omega_0^2 \leq \frac{c^2}{2m^2}$, yani $c > \sqrt{2km}$, ise $\omega = 0$ 'da $C = F_0/k$ 'dan başlayarak genlik ω 'ya göre düzgün azalır. C_{max} yok.
- $\omega_0^2 > \frac{c^2}{2m^2}$, yani $c < \sqrt{2km}$, ise genlik $\omega = 0$ 'da F_0/k ile başlıyor, sonra $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - c^2/2m^2}$ değerinde C_{max} olana kadar artıyor, daha sonra da sifıra doğru azalıyor.

Not: $c = 0$ olursa, $\omega = \omega_0$ 'da $C \rightarrow \infty$. Bu duruma “rezonans” denir. ω_0 sistemin iç (doğal) frekansı, ω dış kuvvetin frekansı. Rezonans, mekanik sistemlerde yıkıcı olurken, elektrik devrelerinde arzu edilir.

Giriş

Vektörler

Kompleks Sayılar ve Fonksiyonlar

İntegral Hesapları

Matrisler

Diferansiyel Denklemler

Özel Fonksiyonlar

Kaynaklar



y_h 'deki Sabitlerin Değişimi Yöntemi 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Özel çözümü bulurken *tahmin yöntemi* her zaman çalışmaz.
Örneğin aşağıdaki denkleme bakalım.

$$y'' + y = \tan x$$

Burada $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun türevleri

$$\sec^2 x, \quad 2 \sec^2 \tan x, \quad 4 \sec^2 \tan^2 x + 2 \sec^4, \quad \dots$$

gibi $\tan x$ 'i tekrarlamayan yeni fonksiyonlar içeriyor. Bu nedenle tahmin yöntemi bu denklemi çözmede işe yaramaz.

Yeni yöntemde önce homojen çözümdeki belirsiz integral sabitlerini $C_1 \rightarrow u_1(x)$ ve $C_2 \rightarrow u_2(x)$ ile değiştiririz.

Sonra, diferansiyel denklemin mertebesini düşürecek şekilde $u_i(x)$ 'ler üzerinde koşullar koyarız.



y_h 'deki Sabitlerin Değişimi Yöntemi 2

$p(x)$ ile $q(x)$ açık bir I aralığında sürekli olsun.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad \text{inhomojen denklem}$$

“değişken” katsayılı ikinci mertebe lineer diferansiyel denklemin homojen çözümlerini, $y_1(x)$ ve $y_2(x)$, biliyoruz.

“Sabit katsayılı” olsa da bu yöntem geçerlidir. İlk önce,

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad \text{homojen çözüm}$$

Şimdi C_i 'leri $u_i(x)$ 'lerle değiştirerek özel çözümü yazarız.

$$y_o(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \quad \text{özel çözüm} \quad (1)$$

Bunun türevini alırsak.

$$y_o' = [u_1 y_1' + u_2 y_2'] + \underbrace{[y_1 u_1' + y_2 u_2']}_{=0}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



y_h 'deki Sabitlerin Değişimi Yöntemi 3

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Amacımız $u_i(x)$ 'lerde birinci mertebe diferansiyel denklem elde etmek olduğu için ikinci köşeli parantezi sıfırlıyoruz.

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \quad (2)$$

Kalanı yazalım.

$$y_o' = u_1 y_1' + u_2 y_2' \quad (3)$$

Bunun türevini alalım.

$$y_o'' = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'' \quad (4)$$

(1), (3) ve (4) denklemlerini baştaki inhomojen denkleme yerleştirelim ve düzenleyelim.

$$y_1' u_1' + y_2' u_2' + \underbrace{(y_1'' + p y_1' + q y_1)}_{=0} u_1 + \underbrace{(y_2'' + p y_2' + q y_2)}_{=0} u_2 = f(x)$$



y_h 'deki Sabitlerin Değişimi Yöntemi 4

Dikkat! y_1 ile y_2 homojen diferansiyel denklemin çözümü olduğu için iki parantez de sıfıra eşittir. Kalanı yazalım.

$$y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x) \quad (5)$$

Artık (2) ile (5) denklemleri u_1' ile u_2' için iki tane lineer denklemdir.

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0$$

$$y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(x)$$

Bu iki denklemden u_1' ile u_2' çözülür. Sonra elde edilen iki tane birinci mertebe diferansiyel denklem çözülür.

Dikkat! Özel çözüm hesap ettiğimiz için u_1' ile u_2' integralinde belirsiz integral sabitlerini yazmayız.

$$y(x) = y_h(x) + y_o(x) \quad \text{genel çözüm}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Sabitlerin Değişimi Yöntemi

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$y'' + y = \tan x$ inhomojen denklemi çözünüz.

$$y_h'' + y_h = 0 \Rightarrow y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$y_o = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x$$

$$u_1' \cos x + u_2' \sin x = 0$$

$$u_1'(\cos x)' + u_2'(\sin x)' = \tan x$$

$$\text{Buradan } u_2' = \sin x \Rightarrow u_2(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

Şimdi $u_1' = -u_2' \sin x / \cos x$ ise $u_1(x) = \int -\frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int (\cos x - \sec x) dx = \sin x - \ln |\sec x + \tan x|$. Sonuçta, genel çözümü yazarız, $y = y_h + y_o$.

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \cos x \ln |\sec x + \tan x|$$



Değişken Katsayılı 2. Mertebe Dif Denk

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Şimdiye kadar “sabit” katsayılı, ikinci mertebe, lineer, homojen ya da inhomojen diferansiyel denklemlerle çalıştık.

Şimdi de “değişken” katsayılı, ikinci mertebe, lineer, homojen ya da inhomojen diferansiyel denklemleri inceleyelim.

Bunu üç adımda ele alacağız. Birincisi fizik eğitiminde sıkça karşılaştığımız Euler-Cauchy diferansiyel denklemi, ikincisi Abel yöntemi (ya da mertebe indirme yöntemi) ve son olarak sonsuz seri çözüm yöntemi.



Euler-Cauchy Diferansiyel Denklemi 1

a, b, c sabitler olmak üzere

$$ax^2y'' + bxy' + cy = f(x)$$

Euler-Cauchy diferansiyel denklemdir. Çözüm için iki yol izlenebilir.

- 1 $x = e^t$ dönüşümüyle denklem sabit katsayılı diferansiyel denklem haline getirilir.

$$a \frac{d^2y(t)}{dt^2} + (b - a) \frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = f(t)$$

- 2 Homojen Euler-Cauchy diferansiyel denklemine $y = x^m$ önerilerek m için $am^2 + (b - a)m + c = 0$ karakteristik denkleminde m_1 ile m_2 elde edilir ve homojen çözüm yazılır.

$$y_h(x) = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Euler-Cauchy Diferansiyel Denklemleri 2

- Eğer $m_1 = m_2$ olursa, homojen çözüm şöyle yazılır.

$$y_h(x) = C_1 x^{m_1} + C_2 \ln x x^{m_1}$$

İnhomojen denklemin genel çözümü için gerekli olan özel çözüm geçen derslerde anlattığımız “tahmin etme” yöntemiyle ya da “sabitlerin değişimi” yöntemiyle hesap edilerek genel çözüm yazılır.

$$y(x) = y_h(x) + y_o(x)$$

Not: Biz ikinci yöntemi takip edeceğiz.

Not: $m = i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, olduğunda şunu kullanırız.

$$\begin{aligned} y = x^{i\beta} &\Rightarrow \ln y = i\beta \ln x \Rightarrow \\ y &= e^{i(\beta \ln x)} = \cos(\beta \ln x) + i \sin(\beta \ln x) \end{aligned}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: İnhomojen Euler-Cauchy Denklemi 1

$x^2 y'' - xy' - 3y = \ln x/x$ genel çözümü bulunuz, $x > 0$.

Çözüm: Homojen çözüm;

$$y = x^m \Rightarrow y' = mx^{m-1} \Rightarrow y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

$$(m^2 - 2m - 3)x^m = 0 \Rightarrow m_1 = -1, m_2 = 3$$

$$y_h = C_1 x^{-1} + C_2 x^3$$

Özel çözüm için denklemi standart formda yazarak

$$y'' - \frac{1}{x}y' - \frac{3}{x^2}y = \frac{\ln x}{x^3}$$

$f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$ görelim. Şimdi de y_h 'de $C_i \rightarrow u_i(x)$ yapalım.

$$y_o(x) = u_1(x)/x + x^3 u_2(x)$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: İnhomojen Euler-Cauchy Denklemi 2

Böylece u_1' ve u_2' için iki denklem şöyle olur.

$$\begin{aligned}u_1'/x + x^3 u_2' &= 0 \\ -u_1'/x^2 + 3x^2 u_2' &= \ln x/x^3\end{aligned}$$

Buradan $u_1' = -\frac{\ln x}{4x}$ ve $u_2' = \frac{\ln x}{4x^5}$ ile u_1 ve u_2 hesaplanır.

$$\begin{aligned}u_1 &= -\frac{1}{4} \int \frac{\ln x}{x} dx = -\frac{1}{8} \ln^2 x \\ u_2 &= \frac{1}{4} \int \frac{\ln x}{x^5} dx = -\frac{1}{16x^4} \left(\ln x + \frac{1}{4} \right)\end{aligned}$$

En sonunda genel çözümü yazarız. $C_1' = C_1 - \frac{1}{16}$ diyerek

$$y = \frac{C_1'}{x} + C_2 x^3 - \frac{1}{16x} (2 \ln^2 x + \ln x)$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Abel Yöntemi (Mertebe Düşürme) 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Eğer lineer ikinci mertebe diferansiyel denklemin bir tane “homojen” çözümünü $y_1(x)$ bulabilirsek $y = u(x)y_1(x)$ atamasıyla (homojen veya inhomojen) diferansiyel denklem, birinci mertebe lineer diferansiyel denkleme dönüşür. Buradan $y_1(x)$ ’den lineer bağımsız olan $y_2(x)$ hesap edilir. Sonuçta genel çözüm yazılır.

Örnek: Aşağıdaki denklemin genel çözümünü bulunuz.

$$y'' + xy' - y = x^2$$

Çözüm: Homojen denklemin $y'' + xy' - y = 0$ bir çözümünün $y_1(x) = x$ olduğu kontrol edilebilir. Şimdi inhomojen denklemde $y = xu(x)$ dönüşümü yapalım.

$$y = xu \quad \Rightarrow \quad y' = u + xu' \quad \Rightarrow \quad y'' = 2u' + xu''$$



Abel Yöntemi 2

Bunları inhomojen denkleme yerleştirelim.

$$u'' + \left(\frac{2}{x} + x\right) u' = x$$

Şimdi $u' = p$ ataması yapalım, $u'' = p'$.

$$\frac{dp}{dx} + \left(\frac{2}{x} + x\right) p = x$$

Birinci mertebe lineer difreansiyel denklem ve çözümünü biliyoruz. Önce integral çarpanını hesap ederiz.

$$\rho = e^{\int \left(\frac{2}{x} + x\right) dx} = e^{\ln x^2} e^{x^2/2} = x^2 e^{x^2/2}$$

Bununla denklemi çarpalım.

$$x^2 e^{x^2/2} \frac{dp}{dx} + x^2 e^{x^2/2} \left(\frac{2}{x} + x\right) p = x x^2 e^{x^2/2}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Abel Yöntemi 3

Ve düzenleyelim.

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 e^{x^2/2} p \right) = x^3 e^{x^2/2} \Rightarrow x^2 e^{x^2/2} p = \int x^3 e^{x^2/2} dx$$

İntegralde $x^2/2 = t$ atayalım, $x dx = dt$.

$$x^2 e^{x^2/2} p = \int 2te^t dt = 2te^t - 2 \int e^t dt = 2e^t(t - 1) + C_2$$

İkinci adımda kısmi integral yaptık; $u = 2t$ ve $dv = e^t dt$.

Sonuçta

$$x^2 e^{x^2/2} p = e^{x^2/2} (x^2 - 2) + C_2$$

$$p(x) = \left(1 - \frac{2}{x^2} \right) + C_2 \frac{e^{-x^2/2}}{x^2}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Abel Yöntemi 4

$p = du/dx$ demiştik. $u(x) = \int p(x)dx$ ile $u(x)$ 'i bulalım.

$$\begin{aligned} u(x) &= \int \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) dx + C_2 \int \frac{e^{-x^2/2}}{x^2} dx \\ &= x + \frac{2}{x} + C_2 \int \frac{e^{-x^2/2}}{x^2} dx + C_1 \end{aligned}$$

Son olarak $y = xu(x)$ kullanılarak genel çözüm yazılır.

$$y(x) = x^2 + 2 + C_2 x \int \frac{e^{-x^2/2}}{x^2} dx + C_1 x$$

Homojen denklemin iki tane lineer bağımsız çözümü y_1 ve y_2 ile özel çözümü y_o şudur.

$$y_1 = x \quad \text{ve} \quad y_2 = x \int \frac{e^{-x^2/2}}{x^2} dx \quad \text{ve} \quad y_o = x^2 + 2$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Diferansiyel Denklemlerin Seri Çözümleri

Lineer homojen değişken katsayılı ikinci mertebe bir diferansiyel denklem verilmiş olsun.

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0$$

Burada $f_1(x)$ ile $f_2(x)$ denklemde açıkça verilen kesirli fonksiyonlar olabilir.

Bu türdeki denklemlere sonsuz kuvvet serisi biçiminde çözümler arayabiliriz. Bulunan sonsuz serinin yakınsaklığı ayrıca incelenir. Ama önce diferansiyel denklemin tekil nokta yapılarını inceleyelim, çünkü önereceğimiz seriler bu tekil noktaların yapısıyla ilgili olacak.

Diferansiyel Denklemin Tekil Nokta Yapısı

Tanım: Eğer $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonları bir x_0 noktasında düzgünse (tekil değilse), x_0 'a diferansiyel denklemin “düzgün noktası” denir.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Diferansiyel Denklemin Tekil Nokta Yapısı

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Tanım: Eğer $f_1(x)$ veya $f_2(x)$ fonksiyonu bir x_0 noktasında düzgün değilse (tekilse), fakat

$$(x - x_0)f_1(x) \quad \text{ve} \quad (x - x_0)^2 f_2(x)$$

fonksiyonları x_0 'da düzgünse, o zaman x_0 'a diferansiyel denklemin “düzgün tekil noktası” denir.

Tanım: Eğer $f_1(x)$ veya $f_2(x)$ fonksiyonu bir x_0 noktasında düzgün değilse (tekilse), aynı zamanda

$$(x - x_0)f_1(x) \quad \text{ve} \quad (x - x_0)^2 f_2(x)$$

fonksiyonlarından en az biri x_0 'da hala düzgün değilse, o zaman x_0 'a diferansiyel denklemin “düzgün olmayan tekil noktası” denir.



Tekillik Yapısının Çözümle İlgisi 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Durum 1: x_0 düzgün nokta ise diferansiyel denklemin x_0 civarındaki çözümü aşağıdaki gibi bir sonsuz kuvvet serisi olarak yazılabilir.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

Bu çözüm önerisini denkleme yerleştirerek c_n katsayıları arasında bir bağıntı buluruz. Buna tekralama bağıntısı denir. Bu sonsuz serinin yakınsama aralığı x_0 'a en yakın tekil noktaya kadardır. Yani, $|x - x_0| < |x_s - x_0|$ yazarız, burada x_s denklemin x_0 'a en yakın tekil noktasıdır.



Tekillik Yapısının Çözümle İlgisi 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Durum 2: x_0 düzgün tekil nokta ise diferansiyel denklemin x_0 civarındaki çözümü aşağıdaki gibi bir sonsuz kuvvet serisi olarak yazılabilir.

$$y = (x - x_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

Burada m serbest indis, n toplam indisidir. Bu çözüm önerisini denkleme yerleştirerek m için indis denklemi, c_n katsayıları için de tekrarlama bağıntısı buluruz. Bu sonsuz serinin yakınsama aralığı $|x - x_0| < |x_s - x_0|$ ile verilir, burada x_s denklemin x_0 'a en yakın tekil noktasıdır.

Durum 3: x_0 düzgün olmayan tekil nokta ise diferansiyel denklemin x_0 civarında sonsuz kuvvet serisinin varlığı garanti değildir.



Düzgün Nokta Etrafında Açılımlar

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Fizikte ve mühendislikte aşağıdaki diferansiyel denklemle sıkça karşılaşırız.

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dy}{d\theta} + \ell(\ell + 1)y = 0$$

Burada θ bağımsız değişkeni $0 \leq \theta \leq \pi$ aralığında değişen küresel koordinattır ve ℓ şimdilik keyfi bir sabittir. Şimdi $x = \cos \theta$ ataması yaparak aşağıdaki diferansiyel denklemi elde ederiz.

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \ell(\ell + 1)y = 0 \quad \text{Legendre dif denk.}$$

x 'in tanım aralığı $-1 \leq x \leq +1$. Eğer $\ell = 0, 1, 2, \dots$ olursa buna Legendre diferansiyel denklemi ve çözümlerine de Legendre polinomları denir ve $P_\ell(x)$ ile gösterilir.



Legendre Diferansiyel Denklemi 1

Not: Başta ℓ keyfi bir sabittir. Sonsuz serinin $x = \pm 1$ noktalarında yakınsak olmasını şart koşunca ℓ sabiti bir doğal sayı olmak zorunda olacak¹.

Legendre diferansiyel denklemini standart biçimde yazalım.

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{\ell(\ell+1)}{1-x^2}y = 0$$

Buna göre $f_1 = -\frac{2x}{1-x^2}$ ve $f_2 = \frac{\ell(\ell+1)}{1-x^2}$ fonksiyonları $x = \pm 1$ noktalarında düzgün değildir, yani $x_s = \pm 1$ tekil noktalardır.

Şimdi de tekilliklerin yapısına karar vermek için $(x - x_s)f_1$ ve $(x - x_s)^2f_2$ fonksiyonlarının x_s 'daki davranışlarına bakalım.

$$x_s = +1'de \quad \begin{cases} (x-1)f_1 = -(x-1)\frac{2x}{1-x^2} = 1 & \text{sonlu} \\ (x-1)^2f_2 = -(x-1)^2\frac{\ell(\ell+1)}{1-x^2} = 0 & \text{sonlu} \end{cases}$$

¹Literatürde 0'ın bir doğal sayı olduğu konusunda fikir birliği yoktur. Biz 0'ı dahil ediyoruz.



Legendre Diferansiyel Denklemi 2

O halde, $x_s = +1$ düzgün tekil noktadır. Benzer olarak, $x_s = -1$ de düzgün tekil noktadır.

$$x_s = -1' \text{de} \quad \begin{cases} (x+1)f_1 = -(x+1)\frac{2x}{1-x^2} = 1 & \text{sonlu} \\ (x+1)^2 f_2 = -(x+1)^2 \frac{\ell(\ell+1)}{1-x^2} = 0 & \text{sonlu} \end{cases}$$

Şimdi Legendre diferansiyel denkleminin çözümü olarak $x_0 = 0$ düzgün noktası civarında kuvvet serisi yazalım.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

Bunun türevlerini alalım.

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad \Rightarrow \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Legendre Diferansiyel Denklemini 3

Bunları diferansiyel denkleme yerleştirelim ve x^{n-2} ile x^n parantezine alalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} [-n(n-1) - 2n + \ell(\ell+1)] c_n x^n = 0$$

İlk toplamda $n = 0$ ve $n = 1$ terimleri $n(n-1)$ çarpanından dolayı sıfır olduğu için bu toplamı $n = 2$ 'den başlatabiliriz.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} [-n^2 - n + \ell^2 + \ell] c_n x^n = 0$$

Şimdi sadece ilk toplamda $n \rightarrow n+2$ atayalım.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}x^n \\ + \sum_{n=0}^{\infty} [(\ell^2 - n^2) + (\ell - n)] c_n x^n = 0 \end{aligned}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Legendre Diferansiyel Denklemini 4

x^n ortak parantezine alalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1)(n+2)c_{n+2} + (\ell-n)(\ell+n+1)c_n\} x^n = 0$$

Polinom denkleğinden $\{\bullet\} = 0$ olmalıdır. Yani,

$$c_{n+2} = \frac{(n-\ell)(n+\ell+1)}{(n+1)(n+2)} c_n \quad \text{“tekrarlama bağıntısı”}$$

Buna göre çift katsayılar c_0 cinsinden, tek katsayılar c_1 cinsinden yazılır.

$n = 0, 2, 4, \dots$ için bir çözüm yazalım.

$$n = 0 \text{ için} \quad c_2 = -\frac{\ell(\ell+1)}{2!} c_0$$

$$\begin{aligned} n = 2 \text{ için} \quad c_4 &= \frac{(2-\ell)(2+\ell+1)}{3 \cdot 4} c_2 \\ &= \frac{(\ell-2)\ell(\ell+1)(\ell+3)}{4!} c_0 \end{aligned}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Legendre Diferansiyel Denklemi 5

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Buradan çift çözümü yazabiliriz. Buna birinci çözüm deriz.

$$\begin{aligned} y_1 &= c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \dots \\ &= c_0 \left\{ 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{2!} x^2 + \frac{(\ell-2)\ell(\ell+1)(\ell+3)}{4!} x^4 - + \dots \right\} \end{aligned}$$

$n = 1, 3, 5, \dots$ için de bir çözüm yazalım.

$$\begin{aligned} n = 1 \text{ için } c_3 &= -\frac{(\ell-1)(\ell+2)}{3!} c_1 \\ n = 3 \text{ için } c_5 &= \frac{(3-\ell)(3+\ell+1)}{4 \cdot 5} c_3 \\ &= \frac{(\ell-3)(\ell-1)(\ell+2)(\ell+4)}{5!} c_1 \end{aligned}$$

Buradan da tek çözümü, yani ikinci çözümü, yazarız.



Legendre Diferansiyel Denklemi 6

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$\begin{aligned} y_2 &= c_1 + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \dots \\ &= c_1 \left\{ \frac{x}{1!} - \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{3!} x^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\ell-3)(\ell-1)(\ell+2)(\ell+4)}{5!} x^5 - + \dots \right\} \end{aligned}$$

Özellikler:

- Her iki sonsuz seri de $-1 < x < +1$ aralığında yakınsak, fakat $x = \pm 1$ noktalarında ıraksaktır. Her bir serinin diferansiyel denklemin bir çözümü olması için $x = \pm 1$ noktalarında da yakınsak olmasını isteriz. İraksak olan bu iki sonsuz serinin $x = \pm 1$ noktalarında yakınsak olabilmelerinin tek yolu $\ell = 0, 1, 2, \dots, n$ yaparak sonsuz seriyi sonlu bir terimde kesmektir. Böylece her bir seri bir polinom olur.



Legendre Diferansiyel Denklemini 7

- ℓ 'nin her bir değeri için c_0 ile c_1 sabitlerini $y(x=1) = 1$ olacak şekilde belirlersek, elde edilen polinoma Legendre polinomu denir ve $P_\ell(x)$ ile gösterilir, $\ell = 0, 1, 2, \dots$.

- i $\ell = 0, 2, 4, \dots$ ise y_1 bir polinomdur ve yakınsaktır, fakat y_2 bir sonsuz seridir ve $x = \pm 1$ değerlerinde ıraksaktır, yani $y_2(\pm 1) = \infty$.

Örneğin, $\ell = 0$ olsun.

$$y_1(x) = c_0$$

$$y_2(x) = c_1 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) = \frac{c_1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

- ii $\ell = 1, 3, 5, \dots$ ise bu sefer y_2 bir polinomdur ve yakınsaktır, fakat y_1 bir sonsuz seridir ve $x = \pm 1$ değerlerinde ıraksaktır, yani $y_1(\pm 1) = \infty$.

Örneğin, $\ell = 1$ olsun.

$$y_1(x) = c_0 \left(1 - \frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{3} - \dots \right) = c_0 \left[1 - \frac{x}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right]$$

$$y_2(x) = c_1 x$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Legendre Diferansiyel Denklemi 8

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

- Diferansiyel denklemin genel çözümü şöyle yazılır.

$$y(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x)$$

- a $a_2 = 0$ ve $\ell = 0, 2, 4, \dots$ ise $y(x) = A_\ell P_\ell(x)$ polinomu $-1 \leq x \leq +1$ aralığında denklemin yakınsak olan genel çözümüdür.
- b $a_1 = 0$ ve $\ell = 1, 3, 5, \dots$ ise $y(x) = A_\ell P_\ell(x)$ polinomu $-1 \leq x \leq +1$ aralığında denklemin yakınsak olan genel çözümüdür.



Düzgün Tekil Nokta Civarında Açılımlar

ν keyfi bir sabit olmak üzere aşağıdaki denkleme Bessel diferansiyel denklemi denir.

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad \text{Bessel dif denk}$$

Bunu standart formda yazalım.

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}y = 0$$

$x_0 = 0$ noktasında tekillik görünüyor. Tekilliğin yapısını araştıralım.

$$x_0 = 0 \text{ da } \begin{cases} xf_1 = x \frac{1}{x} = 1 & \text{sonlu} \\ x^2 f_2 = x^2 \frac{x^2 - \nu^2}{x^2} = -\nu^2 & \text{sonlu} \end{cases}$$

O halde, $x_0 = 0$ noktası düzgün tekil noktadır. Başka tekil nokta görünmüyor. Ama $x = \infty$ noktasına bakalım.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Denklemin Sonsuzdaki Tekilliği

Bunun için $z = 1/x$ dönüşümü yaparız. $x \rightarrow \infty$ giderken $z \rightarrow 0$ gider. Yani, yeni denklemin $z_0 = 0$ noktasını inceleyeceğiz.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz} = -z^2 \frac{dy}{dz} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \left[\frac{d}{dz} \left(-z^2 \frac{dy}{dz} \right) \right] \frac{dz}{dx} = z^4 \frac{d^2y}{dz^2} + 2z^3 \frac{dy}{dz}\end{aligned}$$

Şimdi Bessel denklemi şöyle olur.

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \frac{z^2 - \nu^2}{z^4} y = 0$$

Buna göre $z_0 = 0$ 'da bir tekil noktadır. Türüne karar verelim.

$$z_0 = 0 \text{'da} \quad \begin{cases} z f_1 = z \frac{1}{z} = 1 & \text{sonlu} \\ z^2 f_2 = z^2 \frac{z^2 - \nu^2}{z^4} = \infty & \text{sonlu değil} \end{cases}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Bessel Diferansiyel Denklemleri 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Sonuçta, $z_0 = 0$ (yani $x_0 = \infty$) noktası, düzgün olmayan tekil noktadır. Bu durumda, $x_0 = 0$ düzgün tekil noktasına en yakın tekil nokta $x_s = \infty$ olduğu için $x_0 = 0$ civarındaki sonsuz serinin yakınsama aralığı $-\infty < x < +\infty$ olur.

Şimdi Bessel diferansiyel denklemine $x_0 = 0$ düzgün tekil noktası civarında kuvvet serisi çözümü yazalım.

$$y = x^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+m}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) c_n x^{n+m-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1) c_n x^{n+m-2}$$

Burada n toplam indisi ve m serbest indis.



Bessel Diferansiyel Denklemini 2

Bunları Bessel diferansiyel denklemine yerleştirelim ve düzenleyelim.

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+m)^2 - \nu^2] c_n x^{n+m} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+m+2} = 0$$

İlk toplamda $n \rightarrow n+2$ atayalım. Yeni toplam $n = -2$ 'den başlar.

$$\sum_{n=-2}^{\infty} [(n+m+2)^2 - \nu^2] c_{n+2} x^{n+m+2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+m+2} = 0$$

İlk toplamda $n = -2$ ile $n = -1$ değerlerini açıkça yazalım ve toplamı $n = 0$ 'dan itibaren yazalım.

$$\begin{aligned} & [m^2 - \nu^2] c_0 x^m + [(m+1)^2 - \nu^2] c_1 x^{m+1} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+m+2)^2 - \nu^2] c_{n+2} x^{n+m+2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+m+2} = 0 \end{aligned}$$



Bessel Diferansiyel Denklemleri 3

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

İkinci satırı ortak parantezde yazalım.

$$\underbrace{[m^2 - \nu^2] c_0 x^m}_{=0} + \underbrace{[(m+1)^2 - \nu^2] c_1 x^{m+1}}_{=0} + \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\{[(n+m+2)^2 - \nu^2] c_{n+2} + c_n\}}_{=0} x^{n+m+2} = 0$$

Eğer $x_0 = 0$ düzgün nokta olsaydı, o zaman ilk satır otomatik olarak düşecekti ve elimizde sadece c_n ile c_{n+2} 'yi ilişkilendiren bir tekrarlama bağıntısı kalacaktı. Ama $x_0 = 0$ düzgün tekil nokta olduğu için birinci satır düşmedi. Ancak, şimdi de elimizde birinci satırı sıfırlamak için serbest indis m var.

Polinom denkliği üç tane bağıntı verir.



Bessel Diferansiyel Denklemini 4

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$\left. \begin{aligned} [m^2 - \nu^2] c_0 &= 0 \\ [(m+1)^2 - \nu^2] c_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{indis denklemi}$$

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+m+2)^2 - \nu^2} \quad \text{tekrarlama bağıntısı}$$

Çözüm için dört olasılık var.

- Eğer $c_0 = 0$ ve $c_1 = 0$ olursa, bütün $c_n = 0$ olur ve $y = 0$ aşıkâr çözümüne ulaşırız. Aşıkâr olmayan çözümler istenir.
- Eğer $c_0 \neq 0$ ve $c_1 \neq 0$ olursa, indis denkleminden $\nu^2 = m^2 = (m+1)^2$ buluruz. $m \neq m+1$ olduğu için bu olasılık tutarsızdır ve kullanılamaz.
- Eğer $c_0 = 0$ ve $c_1 \neq 0$ olursa, indis denkleminden $m = -1 \pm \nu$ olur. Her bir m kökü bir çözüm verir.
- Eğer $c_0 \neq 0$ ve $c_1 = 0$ olursa, indis denkleminden $m = \pm \nu$ olur. Her bir m kökü bir çözüm verir.



Bessel Diferansiyel Denklemleri 5

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Son iki olasılık çözüm olabilir. Biz dördüncüyle devam edelim. Yani, birinci çözüm için $m_1 = +\nu$ indis kökü ile $c_1 = 0$ şartını kullanalım.

$$y_1(x) = x^\nu (c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \cdots)$$

Bu durumda tekrarlama bağıntısı şöyle olur.

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= - \frac{c_n}{(n+m+2)^2 - \nu^2} \Big|_{m=\nu} \\ &= - \frac{c_n}{[(n+m+2) + \nu][(n+m+2) - \nu]} \Big|_{m=\nu} \\ &= - \frac{c_n}{(n+2\nu+2)(n+2)} \end{aligned}$$



Bessel Diferansiyel Denklemi 6

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$n = 0, 2, 4, \dots$ için bir hesap yapalım.

$$n = 0 \text{ için } c_2 = -\frac{c_0}{(2 + 2\nu)(2)} = -\frac{c_0}{2^2(1 + \nu)}$$

$$n = 2 \text{ için } c_4 = -\frac{c_2}{(4 + 2\nu)(4)} = \frac{c_0}{2^4(1.2)(1 + \nu)(2 + \nu)}$$

$\vdots$

$$n = 2p \text{ için } c_{2p} = \frac{(-1)^p c_0}{2^{2p}(p!)(1 + \nu)(2 + \nu) \cdots (p + \nu)}$$

burada $p = 1, 2, 3, \dots$. Bunları yukarıdaki $y_1(x)$ 'de yerleştirelim.



Bessel Diferansiyel Denklemi 7

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$y_1(x) = c_0 x^\nu \left[1 - \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{1!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(1+\nu)(2+\nu)} \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - + \cdots + \frac{(-1)^n}{(1+\nu)(2+\nu) \cdots (n+\nu)} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \right]$$

Burada $c_0 = \frac{1}{2^\nu \nu!}$ yazılırsa, bu sonsuz seriye “1. Tür Bessel Fonksiyonu” denir ve $J_\nu(x)$ ile gösterilir.

İkinci çözüm $m_2 = -\nu$ indis kökünden elde edilir. Birinci indis kökünde takip edilen adımlar tekrar edilerek $y_2(x)$ elde edilir. Ya da bu örnekte kısaca $y_1(x)$ 'de $\nu \rightarrow -\nu$ yazarak $y_2(x)$ hızlıca yazılabilir.



Bessel Diferansiyel Denklemini 8

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$y_2(x) = \frac{c_0}{x^\nu} \left[1 - \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{1!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(1-\nu)(2-\nu)} \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - + \dots + \frac{(-1)^p}{(1-\nu)(2-\nu) \cdots (p-\nu)} \frac{1}{p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \right]$$

Bu seri de uygun bir şekilde normalize edilirse “2. Tür Bessel Fonksiyonu” denir ve $J_{-\nu}(x)$ ile gösterilir. Bazı kaynaklarda $N_\nu(x)$ veya $Y_\nu(x)$ ile gösterilir ve Neumann fonksiyonu veya Weber fonksiyonu denir. ν pozitif tam sayı olursa payda da sıfırlar olduğuna dikkat!

Sonuçta, Bessel diferansiyel denkleminin genel çözümü $y(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x)$ olur. Eğer $\nu > 0$ ise, o zaman $x = 0$ 'da $y_2(x)$ patlıyor (ıraksaktır).

Not: $m_1 = m_2$ veya m_1 ile m_2 tam sayı olması durumlarında, $y_2(x)$ fonksiyonu $y_1(x)$ 'den lineer bağımsız olmaz. Bu durumlarda ikinci çözüm aşağıdaki teoriyle elde edilir.



Fuchs Teoremi

İkinci mertebe lineer diferansiyel denklemin x_0 düzgün tekil noktası etrafındaki çözümü şöyle yazılır.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+m}$$

Serbest indis m için bir indis denklemi ve c_n için de tekrarlama bağıntısı bulunur.

- a) Eğer $m_1 \neq m_2$ ve m_1 ile m_2 tam sayı değil ise, o zaman her bir indis kökü biri birinden lineer bağımsız iki çözüm verir. Genel çözüm bu ikisinin toplamıdır.
- b) Eğer $m_1 \neq m_2$ ve m_1 ile m_2 tam sayı ise, o zaman m_1 kökü bir çözüm verirken m_2 'nin verdiği diğer çözüm ilkinelineer bağımlıdır. Yani, bir tane çözüm bulmuş oluruz.
- c) Eğer $m_1 = m_2$ ise, o zaman yalnızca bir tane çözüm bulmuş oluruz.



Fuchs Teoremi (dvm 1)

(b) ve (c) durumlarında ilk çözümden lineer bağımsız olan ikinci çözüm “Abel yöntemi” veya “Frobenius yöntemi” ile bulunur. Abel yöntemiyle diferansiyel denklemin mertebesi düşürülerek birinci çözümden lineer bağımsız ikinci çözüm elde ediliyordu, daha önce gördük.

Frobenius Yöntemi:

(b) Eğer m_1 ve m_2 tam sayı ise

- i İndis kökü kullanılmadan yalnızca tekrarlama bağıntısından yararlanılarak bir seri çözümü yazılır, $y = y(x, m)$.
- ii $m_1 > m_2$ ise birinci çözüm büyük kökle bulunur. $y_1(x) = y(x, m_1)$
- iii $y_1(x)$ 'den bağımsız olan ikinci çözüm şöyle elde edilir.

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial m} [(m - m_2)y(x, m)] \Big|_{m=m_2}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Fuchs Teoremi (dvm 2)

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

(c) Eğer $m_1 = m_2$ ise

- i İndis kökü kullanılmadan yalnızca tekrarlama bağıntısından yararlanılarak bir seri çözümü yazılır, $y = y(x, m)$.
- ii Birinci çözüm $y_1(x) = y(x, m_1)$ ile elde edilir.
- iii $y_1(x)$ 'den lineer bağımsız olan ikinci çözüm şöyle elde edilir.

$$y_2(x) = \left. \frac{\partial y(x, m)}{\partial m} \right|_{m=m_1}$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Soru : Aşağıdaki diferansiyel denklemlerde bağımsız değişkeni, bağımlı değişkeni, denklemin mertebesini ve denklemin derecesini alttaki tabloda uygun yerlere yazın.

(a) $y^{(3)} - xy - e^x + 1 = 0$, (b) $s^2 \frac{d^2 t}{ds^2} + st \frac{dt}{ds} = s + \pi$,

(c) $3 \left(\frac{d^4 b}{da^4} \right)^2 + 2 \left(\frac{db}{da} \right)^{10} + b^7 - b^5 = 0$

Çözüm:

	Bsız Değişken	Blı Değişken	Mertebe	Derece
(a)	x	y	3	1
(b)	s	t	2	1
(c)	a	b	4	2



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Soru: $x'' + 2x' + 26x = 82 \cos(4t)$; $x(0) = 6$, $x'(0) = 0$, başlangıç değer problemini çözün.

Çözüm: Homojen çözüm:

$$x = e^{rt} \Rightarrow r^2 + 2r + 26 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm 5i$$

$$x_h = e^{-t}(c_1 \cos 5t + c_2 \sin 5t)$$

Özel çözüm: $x_o = A \cos 4t + B \sin 4t$. Türevlerini alalım.

$$x_o' = -4A \sin 4t + 4B \cos 4t$$

$$x_o'' = -16A \cos 4t - 16B \sin 4t$$

Bunları inhomojen denkleme yerleştirerek şunu elde ederiz.

$$A = 5 \quad \text{ve} \quad B = 4 \Rightarrow x_o = 5 \cos 4t + 4 \sin 4t$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Genel çözüm: $x = x_h + x_o$ ve türevi şöyle olur.

$$x(t) = e^{-t}(c_1 \cos 5t + c_2 \sin 5t) + 5 \cos 4t + 4 \sin 4t$$

$$x'(t) = e^{-t}[(5c_2 - c_1) \cos 5t - (5c_1 + c_2) \sin 5t] \\ - 20 \sin 4t + 16 \cos 4t$$

Başlangıç şartlarıyla c_1 ve c_2 yi belirleyelim.

$$(i) \quad x(0) = 6 \quad \Rightarrow \quad c_1 + 5 = 6 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1$$

$$(ii) \quad x'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5c_2 - c_1 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -3$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Soru: m, b, g pozitif reel sabitler olmak üzere aşağıdaki başlangıç değer problemini düşünelim.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} - mg = 0, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0$$

$dx/dt = v$ atamasıyla diferansiyel denklemin mertebesini düşürerek bu problemi çözüünüz.

Cevap: $dx/dt = v$ atamasıyla diferansiyel denklem şu hale gelir.

$$m \frac{dv}{dt} + bv - mg = 0$$

Bu diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılabilir.

$$\frac{mdv}{mg - bv} = dt \quad \Rightarrow \quad m \int \frac{-bdv}{mg - bv} = -b \int dt$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Her iki integral de kolayca çözülebilir.

$$\ln(mg - bv) = \frac{c_1 - bt}{m} \implies v(t) = \frac{mg}{b} - e^{\frac{c_1 - bt}{m}}$$

Başlangıç şartlarından birini, $v(0) = 0$, uygulayarak integral sabiti c_1 'i belirleyelim.

$$e^{c_1/m} = \frac{mg}{b} \implies v(t) = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-bt/m}\right)$$

Şimdi de $dx/dt = v$ kullanarak $x(t) = \int v(t)dt$ bağımlı değişkenini hesaplayalım.

$$x(t) = \frac{mg}{b} \int \left(1 - e^{-bt/m}\right) dt = \frac{mg}{b}t + \frac{m^2g}{b^2}e^{-bt/m} + c_2$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Diğer başlangıç şartını, $x(0) = 0$, kullanarak ikinci integral sabiti c_2 'yi belirleyelim.

$$0 + \frac{m^2 g}{b^2} + c_2 = 0 \quad \implies \quad c_2 = -\frac{m^2 g}{b^2}$$

Sonuçta başlangıç değer probleminin tam çözümü şöyle olur.

$$x(t) = \frac{mg}{b}t - \frac{m^2 g}{b^2} \left(1 - e^{-bt/m}\right)$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Soru: (a) E bir sabit olmak üzere $\psi'' + (E - x^2)\psi = 0$ diferansiyel denkleminin $x = \infty$ daki tekilliğini araştırınız. (b) $\psi(x) = e^{-x^2/2}y(x)$ dönüşümüyle

$$y'' - 2xy' + (E - 1)y = 0$$

diferansiyel denklemini elde ediniz. Şimdi bu yeni denklemin $x = 0$ noktası civarındaki genel çözümünü *en az üçer* terim tutarak yazınız. Çözümün bir polinom olması (yani, belirli bir terimden sonra serinin diğer terimlerinin sıfırlanması) için E 'nin sağlaması gereken koşulu bulunuz.

Cevap: (a) Diferansiyel denklemde $x = 1/z$ ataması yaparak yeni denklemde $z = 0$ noktasını inceleriz.

$$\psi_{zz} + \frac{2}{z}\psi_z + \frac{1}{z^4}\left(E - \frac{1}{z^2}\right)\psi = 0$$



Sorular ve Çözümler

Buna göre

$$z = 0 \text{ 'da } f_1(z) = \frac{2}{z} = \infty \quad \text{fakat} \quad zf_1(z) = \text{sonlu}$$

$$z = 0 \text{ 'da } f_2(z) = \frac{1}{z^4} \left(E - \frac{1}{z^2} \right) = \infty \quad \text{ve} \quad z^2 f_2(z) = \infty$$

olduğu için $z = 0$, yani $x = \infty$, düzgün olmayan tekil noktadır.

(b) $\psi(x) = e^{-x^2/2} y(x)$ atamasıyla

$$\psi' = e^{-x^2/2} (y' - xy)$$

$$\psi'' = e^{-x^2/2} [y'' - 2xy' + (x^2 - 1)y]$$

olur ve diferansiyel denklem şu hale gelir;

$$y'' - 2xy' + (E - 1)y = 0$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Burada $x = 0$ noktası bu diferansiyel denklem için “düzgün nokta” olduğu için $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ biçiminde seri çözümü ararız.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

Bunları diferansiyel denkleme yerleştirelim ve x 'in kuvvetlerine göre düzenleyelim.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} [-2n c_n + (E-1) c_n] x^n = 0$$

İlk toplamda $n(n-1)$ çarpanından dolayı toplamı $n = 2$ 'den başlatabiliriz.



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (E-1-2n)c_n x^n = 0$$

Şimdi de ilk toplamda toplam indisini $n \rightarrow n+2$ olarak değiştirelim.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (E-1-2n)c_n x^n = 0$$

Artık x^n ortak parantezine alabiliriz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)c_{n+2} + (E-1-2n)c_n] x^n = 0$$

Buradan tekrarlama bağıntısını yazarız.

$$c_{n+2} = -\frac{E-1-2n}{(n+1)(n+2)}c_n$$



Sorular ve Çözümler

İlk altı katsayıyı yazalım.

$$\begin{aligned}c_0 \neq 0 &\Rightarrow c_2 = -\frac{E-1}{2!}c_0 \Rightarrow c_4 = \frac{(E-1)(E-5)}{4!}c_0 \\c_1 \neq 0 &\Rightarrow c_3 = -\frac{E-3}{3!}c_1 \Rightarrow c_5 = \frac{(E-3)(E-7)}{5!}c_1\end{aligned}$$

Sonuçta seri çözümü $y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$ şu hale gelir.

$$\begin{aligned}y(x) = & \underbrace{c_0 \left[1 + \frac{1-E}{2!}x^2 + \frac{(1-E)(5-E)}{4!}x^4 + \dots \right]}_{y_1(x)} \\& + c_1 \underbrace{\left[x + \frac{3-E}{3!}x^3 + \frac{(3-E)(7-E)}{5!}x^5 + \dots \right]}_{y_2(x)}\end{aligned}$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$x \rightarrow \pm\infty$ iken hem $y_1(x)$ hem de $y_2(x)$ ıraksaktır. Bu çözümü yakınsak yapmak için sonsuz seri belli bir terimde kesilmelidir. Yani, $E = 2n + 1$ burada $n = 0, 1, 2, \dots$ olmalıdır.

$$E = 1, 5, 9, \dots \quad \text{iken} \quad c_0 \neq 0 \quad \text{ve} \quad c_1 = 0$$

$$E = 3, 7, 11, \dots \quad \text{iken} \quad c_0 = 0 \quad \text{ve} \quad c_1 \neq 0$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Soru: Aşağıdaki diferansiyel denklemin iki çözümünü $x = 0$ civarında seri olarak en az üç terim tutarak yazınız.

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

Cevap: $x = 0$ noktası düzgün tekil nokta olduğu için $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+m}$ önerelim. Bunu diferansiyel denkleme yerleştirelim.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4(n+m)(n+m-1)c_n x^{n+m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+m)c_n x^{n+m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+m} = 0$$

Ortak paranteze alalım.



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\{(n+m)[2(n+m)-1]\}c_n x^{n+m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+m} = 0$$

Birinci toplamda $n \rightarrow n+1$ yazalım. Bu durumda yeni toplam $n = -1$ den başlar.

$$\sum_{n=-1}^{\infty} 2\{(n+m+1)[2(n+m+1)-1]\}c_{n+1} x^{n+m} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+m} = 0$$

Birinci toplamda $n = -1$ yazıp, toplamı $n = 0$ dan başlatalım.

$$2C_0 m(2m-1)x^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+m+1)(2n+2m+1)c_{n+1} + c_n]x^{n+m} = 0$$



Sorular ve Çözümler

Buradan indis kökleri ve tekrarlama bağıntısı şöyle olur.

$$m_1 = 0, m_2 = \frac{1}{2} \text{ ve } c_{n+1} = \frac{-c_n}{2(n+m+1)(2n+2m+1)}$$

Her bir indis kökü bir çözüm verir. Buna göre birinci çözüm için tekrarlama bağıntısında $m = 0$ yerleştiririz:

$$c_{n+1} = \frac{-c_n}{(2n+1)(2n+2)}$$

O halde, $c_1 = -c_0/2!$, $c_2 = c_0/4!$, $\dots$ olur. Sonuçta,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 \left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - + \dots \right) \\ &= c_0 \cos \sqrt{x} \end{aligned}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

İkinci çözüm için tekrarlama bağıntısında $m = 1/2$ yerleştiririz:

$$c_{n+1} = \frac{-c_n}{(2n+2)(2n+3)}$$

O halde, $c_1 = -c_0/3!$, $c_2 = C_0/5!$, $\dots$ olur ve sonuçta,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 \left(x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3!} + \frac{x^{5/2}}{5!} - + \dots \right) \\ &= c_0 \sin \sqrt{x} \end{aligned}$$



Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

ÖZEL FONKSİYONLAR



Ortonormal Vektör Uzayı

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Eğer $V^n = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_i, \dots, \vec{u}_n\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, kümesinin elemanları lineer bağımsızlarsa, V^n kümesine n -boyutlu vektör uzayı denir. İlaveten bu vektörler aşağıdaki skaler çarpım kuralını sağarlarsa,

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ ise} \\ 0 & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

o zaman, $\vec{u}_i$ 'ler ortonormal vektörlerdir deriz. Bu durumda herhangi bir $\vec{A} \in V^n$ vektörünü bu vektörler cinsinden yazabiliriz.

$$\vec{A} = A_1 \vec{u}_1 + A_2 \vec{u}_2 + \dots + A_n \vec{u}_n = \sum_{i=1}^n A_i \vec{u}_i$$

Burada $\vec{u}_i$ 'ye ortonormal baz vektörü, A_i 'ye $\vec{A}$ 'nın i -yinci bileşeni denir. $\vec{u}_i$ bir vektör, fakat A_i bir skalerdir.



Bir Vektörün Bileşenleri

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Tanım: Eğer $A_i \in \mathbb{R}$ ise V^n 'ye “reel” vektör uzayı, $A_i \in \mathbb{C}$ ise “kompleks” vektör uzayı denir.

A_i 'yi hesaplamak için yukarıdaki açılımı $\vec{u}_i$ ile skaler çarparız.

$$\vec{u}_i \cdot \vec{A} = \sum_{j=1}^n A_j \underbrace{\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j}_{\delta_{ij}} = \sum_{j=1}^n A_j \delta_{ij} = A_i$$

Hatırlatma: Kompleks vektör uzayında, vektörlerin skaler çarpımında sıra önemlidir!

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left(\vec{B} \cdot \vec{A} \right)^*$$

Bunu matrisler başlığı altında somut olarak görmüştük.

O halde, iki vektörün skaler çarpımını dikkatlice tanımlayalım.



İki Vektörün Skaler Çarpımı

Tanım: $\vec{A}, \vec{B} \in V^n$ vektörlerinin skaler çarpımını şöyle yazarız.

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &:= (\vec{A}, \vec{B}) = \left(\sum_{i=1}^n A_i \vec{u}_i, \sum_{j=1}^n B_j \vec{u}_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_i^* B_j (\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_i^* B_j \delta_{ij}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\vec{A}, \vec{B}) &:= \sum_{i=1}^n A_i^* B_i \\ &= A_1^* B_1 + A_2^* B_2 + \cdots + A_n^* B_n\end{aligned}$$

Dikkat! Skaler çarpım için notasyon değişti.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \longrightarrow (\vec{A}, \vec{B})$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



İki Fonksiyonun Skaler Çarpımı

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Şimdi kesikli i -parametresi sürekli x -parametresiyle ve $\sum_i$ işlemi $\int dx$ işlemiyle yer değiştirsin. Dolayısıyla A_i nesnesi $A(x)$ nesnesiyle yer değiştirir. $1 \leq i \leq n$ aralığı da $a \leq x \leq b$ aralığıyla yer değiştirsin.

$$(A(x), B(x)) := \int_a^b A^*(x)B(x)dx \quad \text{skaler çarpım}$$

Bu işleme $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı $A(x)$ ile $B(x)$ kompleks fonksiyonlarının skaler çarpımı denir. Skaler çarpımın sonucu, tanım gereği bir sayıdır. Bu sayı reel veya kompleks olabilir.

Herhangi bir $A(x)$ fonksiyonunun (vektörünün) normu veya boyu her zaman pozitif reel sayı olur.

$$|A(x)| = \sqrt{(A(x), A(x))} \in \mathbb{R}^+$$

Daha doğrusu $|A(x)| \geq 0$ olur.



Fonksiyonlardan Oluşan Vektör Uzayı

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$\vec{A} \in V^n$ vektörünü cebirsel gösterimde bileşenleriyle temsil ederiz.

$$\vec{A} = (A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n)$$

$$\vec{A} := A_i \longrightarrow A(x)$$

O halde, $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı bütün fonksiyonlardan oluşan küme, $V^\infty = \{A(x), B(x), \dots, f(x), g(x), \dots\}$, bir vektör uzayı oluşturur. Vektör uzayının elemanlarına vektör dendiği için fonksiyonlara artık zaman zaman vektör diyeceğiz.

$a \leq x \leq b$ aralığında x -parametresi sonsuz tane değer alabileceği için V^∞ kümesinin sonsuz tane elemanı vardır. Yani, fonksiyonlardan oluşan bir vektör uzayının boyutu sonsuzdur. O nedenle, V^∞ kümesinde ∞ sembolü kullandık.



Örnek: Ortonormal Fonksiyonlar 1

Aşağıdaki fonksiyonların $0 \leq x \leq 1$ aralığında ortonormal olmaları için reel c_i sabitlerini belirleyiniz.

$$f(x) = c_1, \quad g(x) = c_2 + c_3x$$

Çözüm: Önce f 'nin boyunu 1 yapalım, yani normalize edelim.

$$(f, f) = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 |f|^2 dx = \int_0^1 c_1^2 dx = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1$$

Şimdi de bu normalize f 'yi g 'ye dik (ortogonal) yapalım.

$$\begin{aligned}(f, g) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 f^* g dx &= \int_0^1 (1)(c_2 + c_3x) dx = 0 \\ \left(c_2x + \frac{c_3}{2}x^2 \right)_0^1 &= 0 \\ c_2 + \frac{c_3}{2} &= 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = -2c_2\end{aligned}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Ortonormal Fonksiyonlar 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Son olarak g 'yi normalize edelim.

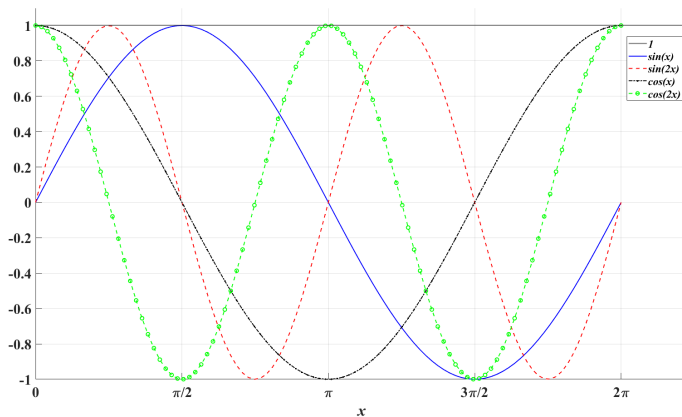
$$\begin{aligned}(g, g) = 1 &\Rightarrow \int_0^1 |g|^2 dx = 1 \\&\int_0^1 (c_2^2 + 2c_2c_3x + c_3^2x^2) dx = 1 \\&\left(c_2^2x - 2c_2^2x^2 + \frac{4c_2^2}{3}x^3 \right)_0^1 = 1 \\c_2 &= \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad c_3 = -2\sqrt{3}\end{aligned}$$

Sonuçta , $f(x) = 1$ ve $g(x) = \sqrt{3}(1 - 2x)$ fonksiyonları $0 \leq x \leq 1$ aralığında ortonormal iki tane fonksiyondur.



Sin(nx) ve Cos(nx) Fonksiyonları 1

$n, m = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $0 \leq x \leq 2\pi$ aralığında $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}$ kümesinin elemanlarını düşünelim.





Sin(nx) ve Cos(nx) Fonksiyonları 2

Bunlar arasındaki skaler çarpımların sonuçları şöyledir.

$$\int_0^{2\pi} (1^*)(1)dx = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^*(nx) \sin(mx)dx = \pi\delta_{nm}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^*(nx) \cos(mx)dx = \pi\delta_{nm}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^*(nx) \cos(mx)dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} (1^*) \sin(nx)dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} (1^*) \cos(nx)dx = 0$$

diklik
(ortogonallik)
bağıntıları

Burada $\sin^*(nx) = \sin(nx)$ ve $\cos^*(nx) = \cos(nx)$ ve $1^* = 1$.



Sin(nx) ve Cos(nx) Fonksiyonları 3

Doğrulamak için şu bağıntıları kullanabiliriz.

$$\sin(nx) \sin(mx) = \frac{1}{2} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]$$

$$\cos(nx) \cos(mx) = \frac{1}{2} [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x]$$

$$\sin(nx) \cos(mx) = \frac{1}{2} [\sin(n-m)x + \sin(n+m)x]$$

Diklik bağıntıları yardımıyla ortonormal bir küme yazabiliriz;

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right\}. \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right] dx = 1$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(mx) \right] dx = \delta_{nm}$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(mx) \right] dx = \delta_{nm} \quad \text{ortonormallik}$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(mx) \right] dx = 0$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Sin(nx) ve Cos(nx) Fonksiyonları 4

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Bölümün başında yaptığımız gibi $0 \leq x \leq 2\pi$ aralığında tanımlı herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunu, bu ortonormal fonksiyonlar cinsinden yazabiliriz.

$$f(x) = a'_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a'_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) + b'_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\}$$

Not: Bu açılımı temel vektör analizinden bildiğimiz aşağıdaki basit ve temel bağıntıya benzetebilirsiniz.

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

Yani, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$ fonksiyonları $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 'ler gibi ortonormal baz vektörler ve a'_0, a'_n, b'_n katsayıları da A_x, A_y, A_z 'ler gibi bileşenlerdir.



Sin(nx) ve Cos(nx) Fonksiyonları 5

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Burada henüz bilmediğimiz a'_0 , a'_n ve b'_n bileşenleri yerine $a'_0/\sqrt{2\pi} = a_0$, $a'_n/\sqrt{\pi} = a_n$ ve $b'_n/\sqrt{\pi} = b_n$ ataması yaparsak bu açılım şu hale gelir.

$$f(x) = a_0 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}$$

Bu açılıma “Fourier serisi” denir. Buradaki a_0 , a_n , b_n katsayılarını bulmaya da Fourier analizi adı verilir.

Yukarıdaki diklik bağıntıları yardımıyla a_0 , a_n , b_n katsayıları hızlıca hesap edilebilir.



Sin(nx) ve Cos(nx) Fonksiyonları 6

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} (1, f(x)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} (\cos(nx), f(x)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} (\sin(nx), f(x)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Not: $\sin(nx)$ ile $\cos(nx)$ fonksiyonları

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + n^2 y = 0$$

diferansiyel denkleminin çözümleridir.



Sin(nx) ve Cos(nx) Fonksiyonları 7

Tekrarlama Bağlılıları

Aşağıdaki biçimde verilen ifadelerle tekrarlarba bağıntıları denir.

- $\cos(2nx) = \cos^2(nx) - \sin^2(nx)$
- $\sin(2nx) = 2 \sin(nx) \cos(nx)$
- $\cos[(n + m)x] = \cos(nx) \cos(mx) - \sin(nx) \sin(mx)$
- $\sin[(n + m)x] = \sin(nx) \cos(mx) + \cos(nx) \sin(mx)$
- $\cos^2(nx) + \sin^2(nx) = 1$
- $\cos'(nx) = -n \sin(nx)$
- $\sin'(nx) = n \cos(nx)$

Bu bağıntılar, sinüs ve cosinüs içeren integrallerde sıkça kullanılır. Örneğin, diklik bağıntılarını bunlar yardımıyla doğrulamıştık.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Kompleks Fourier Serisi

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ olmak üzere $\{e^{inx}\}$ kümesi, $0 \leq x \leq 2\pi$ aralığında biri birine dik (ortogonal) fonksiyonlar kümesidir.

$$\int_0^{2\pi} (e^{imx})^* e^{inx} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx = 2\pi \delta_{nm} \quad \text{diklik}$$

Diklik bağıntısı yardımıyla ortonormal bir küme oluşturabiliriz, $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}$. O halde, yine 2π periyodlu herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunu e^{inx} fonksiyonlarının toplamı olarak yazabiliriz.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \quad \Longleftrightarrow \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Yine, e^{inx} fonksiyonları $y'' + n^2 y = 0$ diferansiyel denkleminin çözümleridir. Burada $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$, $c_0 = a_0$, $c_n + c_{-n} = a_n$ ve $i(c_n - c_{-n}) = b_n$ yazarsak yukarıdaki Fourier serisini elde ederiz.

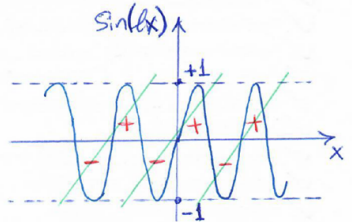
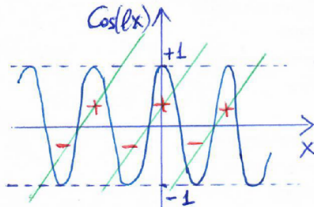


Kompleks Fourier Serisinin Ötesi

Şimdi de kesikli n -parametresi, sürekli k -parametresi ile yer değiştirsin. Bu durumda $-\infty \leq k \leq +\infty$ olmak üzere $-\infty \leq x \leq +\infty$ aralığında e^{ikx} fonksiyonları bir ortogonallik bağıntısı sağlarlar.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{ik'x} \right)^* e^{ikx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-k')x} dx = \begin{cases} \infty & k = k' \text{ ise} \\ 0 & k \neq k' \text{ ise} \end{cases}$$

$k \neq k'$ olduğunda integralin sıfıra eşit olmasını $e^{i(k-k')x} = e^{i\ell x} = \cos(\ell x) + i \sin(\ell x)$, $\ell \neq 0$, yazarak aşağıdaki şekilden görebiliriz.





Dirac Delta Fonksiyonu $\delta(x-x')$

Kesikli i -parametresinden sürekli x -parametresine geçtiğimizde

$$A_i \longrightarrow A(x), \quad \sum_i \longrightarrow \int dx, \quad \delta_{ij} \longrightarrow \delta(x - x')$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ ise} \\ 0 & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad \delta(x - x') = \begin{cases} \infty & x = x' \text{ ise} \\ 0 & x \neq x' \text{ ise} \end{cases}$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

$$\delta(x - x') = \delta(x' - x)$$

$$\sum_i A_i \delta_{ij} = A_j$$

$$\int A(x) \delta(x - x') dx = A(x')$$

$$\sum_j \delta_{ij} = 1$$

$$\int \delta(x - x') dx = 1$$

$\delta(x - x')$ fonksiyonu $x = x'$ noktasında yüksekliği sonsuz, genişliği “sıfır” ve altında kalan alanı 1 olan tuhaf bir Gauss (çan) eğrisi gibi davranıyor. Dirac delta fonksiyonu, integral işlemi altında “iyi” davranışlı olan ilginç bir fonksiyondur.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Fourier Dönüşümü

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

e^{ikx} fonksiyonlarının dikliğini (ortogonalliğini) artık $\delta(k - k')$ ile ifade edebiliriz.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{ik'x}\right)^* e^{ikx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-k')x} dx = 2\pi\delta(k - k')$$

Bu durumda $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$ fonksiyonları ortonormaldirler. Böylece, $-\infty \leq x \leq +\infty$ aralığında tanımlı periyodik olmayan (veya periyodu ∞ olan) herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunu bunların “toplamı” olarak yazabiliriz.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k)e^{ikx} dk$$

Buna $g(k)$ 'nin Fourier dönüşümü denir. Burada $g(k)$ 'yi $f(x)$ fonksiyonunun k -bileşeni gibi görebiliriz. $g(k)$ 'yi bulmak için $f(x)$ 'i $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$ ile skaler çarpalım.



Ters Fourier Dönüşümü

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$g(k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, f(x) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx$$

Buna ters Fourier dönüşümü adı verilir. İki dönüşümün ve tanımların tutarlılığını şöyle kontrol ederiz.

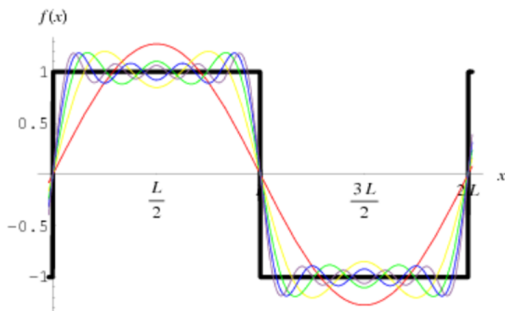
$$\begin{aligned} g(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k') e^{ik'x} dk' dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k') \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k'-k)x} dx \right\} dk' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k') 2\pi \delta(k - k') dk' = g(k) \end{aligned}$$

Not: Diklik bağıntısında normalizasyon çarpanı olan 2π 'yi biz $1/\sqrt{2\pi}$ olarak her iki integrale koyduk. Bazı kaynaklar $1/2\pi$ 'yi sadece x-integraline, bazıları da sadece k-integraline koyar.



Örnek: Fourier Serisi 1

Uygulamalarda $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}$ kümesinin elemanlarını 2π periyodlu $f(x)$ fonksiyonunu sonsuz seri olarak yazmak için kullanırız; $f(x + 2\pi) = f(x)$. Genel olarak, $x \rightarrow 2\pi x/T$ dönüşümüyle T periyodlu yeni bir ortogonal küme elde ederiz; $\{1, \sin(\frac{n2\pi x}{T}), \cos(\frac{n2\pi x}{T})\}$. Örneğin $2L$ periyodlu aşağıdaki kare dalgayı inceleyebiliriz.





Örnek: Fourier Serisi 2

A bir sabit olmak üzere $2L$ periyodlu aşağıdaki kare dalga fonksiyonunu $-L \leq x \leq +L$ aralığında Fourier serisine açınız.

$$f(x) = \begin{cases} -A, & -L \leq x < 0 \text{ ise} \\ +A, & 0 < x \leq +L \text{ ise} \end{cases}$$

Dikkat! Bu fonksiyon antisimetrik; $f(-x) = -f(x)$.

Çözüm: Önce $-L \leq x \leq +L$ aralığında biri birine dik sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını belirleyelim. $\int_{-L}^{+L} 1 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0$,
 $\int_{-L}^{+L} 1 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0$, $\int_{-L}^{+L} 1 dx = 2L$,

$$\int_{-L}^{+L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = L\delta_{nm}$$

$$\int_{-L}^{+L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = L\delta_{nm}$$

$$\int_{-L}^{+L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Fourier Serisi 3

Not: $-L \leq x \leq +L$ aralığında bunlardan başka ortogonal sinüs ve kosinüs fonksiyonları olabilir. Biz burada $x \rightarrow 2\pi x/2L$ dönüşümü yardımıyla diklik bağıntıları elde ettik. Bunu şuna benzetebiliriz; bir vektör uzayında birden fazla ortonormal baz bulabiliriz.

$f(x)$ fonksiyonunu seçtiğimiz ortogonal fonksiyonlar cinsinden yazabiliriz.

$$f(x) = a_0 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

a_0 'ı belirlemek için her terimi 1 ile skaler çarpalım.

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{+L} f(x) dx &= a_0 \int_{-L}^{+L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{+L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{+L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Örnek: Fourier Serisi 4

Soldaki integrali hesaplarız, sağdakileri diklik bağıntılarından yazarız. $f(x)$ tek fonksiyon olduğu ve integral simetrik aralıkta alındığı için sol taraf sıfır olur.

$$0 = a_0 2L + 0 + 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

a_m 'yi belirlemek için her terimi $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ ile skaler çarpalım.

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= a_0 \int_{-L}^{+L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{+L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{+L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$



Örnek: Fourier Serisi 5

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Eşitliğin solundaki integral simetrik aralıkta ve $f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ tek fonksiyon olduğu için sonucu sıfırdır. Sağındakilerin sonuçlarını doğrudan diklik bağıntılarından yazarız.

$$0 = 0 + \sum_n a_n L \delta_{nm} + 0 \quad \Rightarrow \quad a_m = 0$$

Son olarak, b_m 'yi belirlemek için her terimi $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ ile skaler çarpalım.



Örnek: Fourier Serisi 6

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{+L} f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= a_0 \int_{-L}^{+L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{+L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{+L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx\end{aligned}$$

Eşitliğin solundaki integral simetrik aralıkta ve $f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ çift fonksiyon olduğu için aşağıdaki gibi yazabiliriz.

Sağındakilerin sonuçlarını doğrudan diklik bağıntılarından yazabiliriz.

$$2 \int_0^L A \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0 + 0 + \sum_n b_n L \delta_{nm}$$



Örnek: Fourier Serisi 7

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Böylece,

$$\frac{2AL}{m\pi} [1 - (-1)^m] = Lb_m \quad \Rightarrow \quad b_m = \frac{2A}{m\pi} [1 - (-1)^m]$$
$$b_m = \begin{cases} \frac{4A}{m\pi} & m = 1, 3, 5, \dots \quad \text{ise} \\ 0 & m = 2, 4, 6, \dots \quad \text{ise} \end{cases}$$

Sonuçta, bize verilen $f(x)$ fonksiyonu şöyle yazılabilir.

$$f(x) = b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + b_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + b_5 \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) + \dots$$
$$= \frac{4A}{\pi} \left[\frac{1}{1} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) + \dots \right]$$



Örnek: Fourier Dönüşümü

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0}$ normalize fonksiyonunun Fourier dönüşümünü hesap ediniz. x_0 bir sabit.

Çözüm:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0} e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x_0)} dk \\ &= \delta(x - x_0) \end{aligned}$$



Legendre Polinomları 1

Aşağıdaki polinomlara Legendre polinomları denir.

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$$

$$\vdots$$

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell \quad \text{Rodrigues formülü}$$

Bu polinomlar, $-1 \leq x \leq +1$ tanım bölgesinde Legendre diferansiyel denkleminin çözümleridir.

$$(1 - x^2)P_\ell'' - 2xP_\ell' + \ell(\ell + 1)P_\ell = 0$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

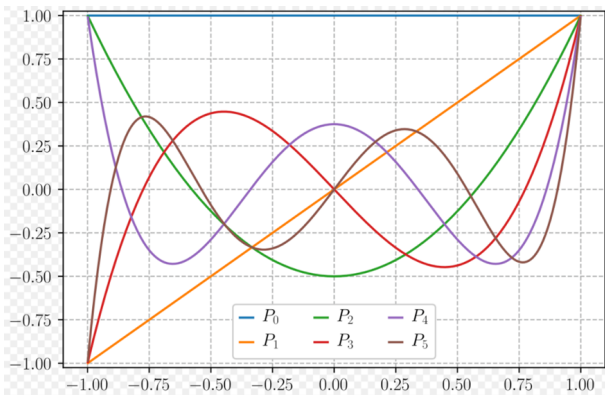
Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Legendre Polinomları 2

$P_\ell(x)$ polinomları, bu diferansiyel denklemin $x = 0$ noktası civarındaki yakınsak seri çözümünün $y(x = 1) = 1$ şartıyla elde edilen halidir. Normalizasyon katsayısı, $\frac{1}{2^\ell \ell!}$, bu koşulla elde edilir.





Legendre Polinomları 3

$P_\ell(x)$, ℓ -yinci derece polinomdur ve belli bir paritesi vardır.

$$P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x) \quad \Rightarrow \quad P_\ell(-1) = \begin{cases} +1, & \ell = \text{çift} \\ -1, & \ell = \text{tek} \end{cases}$$

Ayrıca, $\ell = \text{tek}$ ise $P_\ell(0) = 0$, fakat $\ell = \text{çift}$ ise $P_\ell(0) \neq 0$.

Üretici Fonksiyon

Legendre polinomlarını elde etmenin Rodrigues formülünden başka bir yolu da üretici fonksiyon kullanmaktır. $|t| < 1$ olmak üzere $\phi(x, t) = 1/\sqrt{1+t^2-2tx}$ fonksiyonu $P_\ell(x)$ 'in üretici fonksiyonudur. $\phi(x, t)$ fonksiyonu t 'ye göre $t=0$ civarında Taylor serisine açılırsa, t^ℓ 'nin katsayısı $P_\ell(x)$ 'i verir.

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tx}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x) t^\ell \quad \text{üretici fonksiyon}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Legendre Polinomları 4

Tekrarlama Bağlılıkları

$P_\ell(x)$ ile diğer $P_{\ell-1}(x)$, $P_{\ell+1}(x)$, $P'_\ell(x)$, $\dots$ polinomlarının arasındaki ilişkilere denir.

$$(i) \quad (\ell + 1)P_{\ell+1}(x) - (2\ell + 1)xP_\ell(x) + \ell P_{\ell-1}(x) = 0$$

$$(ii) \quad \frac{dP_{\ell+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{\ell-1}(x)}{dx} - (2\ell + 1)P_\ell(x) = 0$$

$$(iii) \quad \frac{dP_{\ell+1}(x)}{dx} - x \frac{dP_\ell(x)}{dx} + (\ell + 1)P_\ell(x) = 0$$

$$(iv) \quad (x^2 - 1) \frac{dP_\ell(x)}{dx} - \ell x P_\ell(x) - \ell P_{\ell-1}(x) = 0$$

$$(v) \quad \frac{dP_\ell(x)}{dx} - 2x \frac{dP_{\ell-1}(x)}{dx} + \frac{dP_{\ell-2}(x)}{dx} - P_{\ell-1}(x) = 0$$

$$(vi) \quad x \frac{dP_\ell(x)}{dx} - \frac{dP_{\ell-1}(x)}{dx} - \ell P_{\ell-1}(x) = 0$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Legendre Polinomları 5

Bu bağıntıları elde etmek için üretici fonksiyonun seri açılım ifadesi, Rodrigues formülü ve daha önce elde edilen üretici fonksiyonlar kullanılabilir.

Diklik Bağıntısı

$$\int_{-1}^{+1} P_{\ell}(x) P_{\ell'}(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell\ell'} = \begin{cases} \frac{2}{2\ell + 1} & \ell = \ell' \text{ ise} \\ 0 & \ell \neq \ell' \text{ ise} \end{cases}$$

Bu durumda $\mathcal{P}_{\ell}(x) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{2}} P_{\ell}(x)$ polinomları ortonormaldir.

$$\int_{-1}^{+1} \mathcal{P}_{\ell}(x) \mathcal{P}_{\ell'}(x) dx = \delta_{\ell\ell'}$$

$-1 \leq x \leq +1$ aralığında tanımlı olan $P_{\ell}(x)$ polinomları ortogonal (dik) oldukları için bu aralıkta tanımlı herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu $P_{\ell}(x)$ 'lerin toplamı olarak yazılabilir.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Legendre Polinomları 6

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} P_{\ell}(x)$$

Bunu $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ ifadesine benzetebiliriz. Yani, c_{ℓ} katsayıları birer bileşen gibidirler. Bunları bulmak için $f(x)$ fonksiyonunu (vektörünü) $P_m(x)$ ile skaler çarpıp ve diklik bağıntısını kullanırız.

$$\int_{-1}^{+1} f(x) P_m(x) dx = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} \int_{-1}^{+1} P_{\ell}(x) P_m(x) dx$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell m}$$

$$= \frac{2}{2m + 1} c_m$$

$$c_m = \frac{2m + 1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_m(x) dx$$



Legendre Polinomları 7

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

İkinci Tür Legendre Fonksiyonları

$P_\ell(x)$ polinomları Legendre diferansiyel denkleminin birinci çözümleridir. Diferansiyel denklem ikinci mertebe olduğu için $P_\ell(x)$ 'den lineer bağımsız bir çözüm daha vardır. Abel yöntemiyle bunlar elde edilebilir. Bu çözümler $Q_\ell(x)$ ile gösterilirler. Örneğin

$$P_0(x) = 1 \quad \text{ için } \quad Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

$$P_1(x) = x \quad \text{ için } \quad Q_1(x) = \frac{1}{2} x \ln \frac{x+1}{x-1} - 1$$

$Q_\ell(x)$ fonksiyonları $x = \pm 1$ noktalarında ıraksak oldukları için fiziksel problemlerin çözümlerinde hiç yazılmazlar.



Asosiye Legendre Fonksiyonları 1

$$(1 - x^2)P_\ell'' - 2xP_\ell' + \ell(\ell + 1)P_\ell = 0, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

Legendre diferansiyel denkleminin m -kere türevini alırsak ve

$$\frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m} = (1 - x^2)^{-m/2} P_\ell^m(x)$$

atamasını yaparsak, o zaman diferansiyel denklem aşağıdaki biçime gelir.

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_\ell^m}{dx^2} - 2x \frac{dP_\ell^m}{dx} + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] P_\ell^m = 0$$

Buna asosiye (bağlantılı) Legendre diferansiyel denklemi denir. Bu denklemin çözümü olan $P_\ell^m(x)$ 'lere de asosiye Legendre fonksiyonları adı verilir.

$$P_\ell^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m}, \quad m \leq \ell$$

Not: $m = 0$ için $P_\ell^0(x) = P_\ell(x)$ olur.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Asosiye Legendre Fonksiyonları 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Burada $P_\ell(x)$ 'in ℓ -yinci derece polinom olduğunu hatırlarsak $m > \ell$ için $P_\ell^m(x) = 0$ olduğunu görürüz.

Dikkat! $m \rightarrow -m$ yazarsak diferansiyel denklem değişmiyor. O halde, negatif m sayılarını da içerecek şekilde asosiye Legendre fonksiyonlarını daha dikkatli yeniden yazıyoruz.

$$P_\ell^{|m|}(x) = (1 - x^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|} P_\ell(x)}{dx^{|m|}}$$
$$P_\ell^{-|m|}(x) = (-1)^{|m|} \frac{(\ell - |m|)!}{(\ell + |m|)!} P_\ell^{|m|}(x)$$

Burada $\ell = 0, 1, 2, \dots$ ve $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$.

Asosiye Legendre diferansiyel denkleminin $P_\ell^m(x)$ 'lerden lineer bağımsız ikinci çözümü de vardır ve $Q_\ell^m(x)$ ile gösterilir.

Ancak, bu çözümler $x = \pm 1$ noktalarında ıraksak oldukları için fiziksel problemlerin çözümlerinde hiç kullanılmazlar.



Asosiy Legendre Fonksiyonları 3

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$P_\ell^{-|m|}(x)$ tanımındaki $\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}$ çarpanı seçime bağlıdır. Başka kaynaklarda olmayabilir. Bu tanımlar altında $P_\ell^m(x)$ fonksiyonları aşağıdaki diklik bağıntısını sağlarlar.

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m(x) P_\ell^m(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{n\ell} \quad \text{aynı } m \text{ için}$$

$P_\ell^m(x)$ 'ler için bir diklik bağıntısı varsa, $-1 \leq x \leq +1$ aralığında tanımlı herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunu bu $P_\ell^m(x)$ 'lerin toplamı olarak yazabiliriz.

$$f(x) = \sum_{\ell=|m|}^{\infty} c_\ell P_\ell^{|m|}(x) \quad \text{sabit bir } m \text{ için}$$



Küresel Harmonikler 1

Fizik ve mühendislik uygulamalarında aşağıdaki kısmi diferansiyel denklemlerle sıkça karşılaşırız.

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{\ell}^m}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{\ell}^m}{\partial \varphi^2} + \ell(\ell + 1) Y_{\ell}^m = 0$$

Burada θ ile φ küresel koordinatlardaki açı koordinatlarıdır. Yani, $0 \leq \theta \leq \pi$ ve $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Başta ℓ keyfi bir sabittir.

Kısmi diferansiyel denklem önce değişkenlerine ayırma yöntemiyle iki tane adi diferansiyel denkleme ayrılır;

$$Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = \Theta_{\ell}^m(\theta) \Phi_m(\varphi)$$

Denklem şu hale gelir.

$$\frac{\Phi_m}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta_{\ell}^m}{d\theta} \right) + \frac{\Theta_{\ell}^m}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi_m}{d\varphi^2} + \ell(\ell + 1) \Theta_{\ell}^m \Phi_m = 0$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Küresel Harmonikler 2

Giriş

Vektörler

Kompleks Sayılar ve Fonksiyonlar

İntegral Hesapları

Matrisler

Diferansiyel Denklemler

Özel Fonksiyonlar

Kaynaklar

Denklemleri $\sin^2 \theta / \Theta_\ell^m \Phi_m$ ile çarpalım ve düzenleyelim.

$$\underbrace{\frac{\sin \theta}{\Theta_\ell^m} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta_\ell^m}{d\theta} \right) + \ell(\ell + 1) \sin^2 \theta}_{+m^2} + \underbrace{\frac{1}{\Phi_m} \frac{d^2 \Phi_m}{d\varphi^2}}_{-m^2} = 0$$

Burada m keyfi bir sabittir. Böylece θ ve φ için adi diferansiyel denklemler elde edilir.

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta_\ell^m}{d\theta} \right) + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta_\ell^m = 0$$

$$\frac{d^2 \Phi_m}{d\varphi^2} + m^2 \Phi_m = 0$$



Küresel Harmonikler 3

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

φ -denkleminin çözümünü $\Phi_m = ce^{im\varphi}$ olarak yazarız.

Tek-değerlilik koşulu $\Phi_m(\varphi + 2\pi) = \Phi_m(\varphi)$ bize

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ verir. Bu durumda $\Phi_m(\varphi)$

fonksiyonlarından ortonormal bir küme elde edilir,

$$\Phi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$$

$$\int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\varphi) \Phi_{m'}(\varphi) d\varphi = \delta_{mm'}$$

θ -denkleminde $\cos \theta = x$ ataması yaparsak üç-beş sayfa önce yazdığımız asosiye Legendre denklemini elde ederiz. Bunun çözümünü yaparken gördük ki $\ell = 0, 1, 2, \dots$ ve $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$. Asosiye Legendre fonksiyonlarını sağladıkları diklik bağıntısı yardımıyla normalize edebiliriz.



Küresel Harmonikler 4

Sonuçta $\Theta_\ell^m(\theta)$ 'lar normalize asosiy Legendre fonksiyonlarıdır ve $\Phi_m(\varphi)$ 'ler de ortonormal fonksiyonlardır. Bunların çarpımı küresel harmonikleri oluşturur.

$$Y_\ell^{|m|}(\theta, \varphi) = (-1)^{|m|} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}} P_\ell^{|m|}(\cos \theta) e^{i|m|\varphi}$$

$$Y_\ell^{-|m|}(\theta, \varphi) = (-1)^{|m|} \left[Y_\ell^{|m|}(\theta, \varphi) \right]^*$$

$Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ küresel harmonikleri ortonormaldirler.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_\ell^m(\theta, \varphi)]^* Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

Bazen kısaca şöyle yazılır.

$$\int [Y_\ell^m(\theta, \varphi)]^* Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Küresel Harmonikler 5

İlk bir kaç tane fonksiyonun açık biçimi şöyle olur.

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}$$

$$Y_2^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Küresel Harmonikler 6

$Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ küresel harmonik fonksiyonları ortonormal oldukları için $0 \leq \theta \leq \pi$ ve $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ aralığında tanımlı herhangi bir $f(\theta, \varphi)$ fonksiyonu bunların toplamı olarak yazılabilir.

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} c_{\ell m} Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

Burada $c_{\ell m}$ katsayılarını (bileşenlerini) bulmak için $f(\theta, \varphi)$ fonksiyonunu (vektörünü) $Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \varphi)$ fonksiyonu (birim vektörü) ile skaler çarpalım.

$$\begin{aligned} \int [Y_{\ell'}^{m'}]^* f(\theta, \varphi) d\Omega &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} c_{\ell m} \int [Y_{\ell'}^{m'}]^* Y_\ell^m d\Omega \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} c_{\ell m} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} = c_{\ell' m'} \end{aligned}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Gamma Fonksiyonu 1

Buna faktöriyel fonksiyonu da denir.

Tanım: $x > 0$ için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Özellik: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Bunu görmek için $\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt$ integralinde kısmi integrasyon yaparız

$$dv = e^{-t} dt \quad \text{ve} \quad u = t^x$$

Şimdi x tamsayı olsun, $x = n = 1, 2, 3, \dots$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Gamma Fonksiyonu 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$\Gamma(1) = 1 = 0!$$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1 + 1) = 1\Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2 + 1) = 2\Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3 + 1) = 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

Şimdi de x yarım tamsayı olsun, $x = n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$.

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

Burada $t = u^2$ atadık.



Gamma Fonksiyonu 3

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(3/2) = \Gamma(1/2 + 1) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(5/2) = \Gamma(3/2 + 1) = \frac{3}{2}\Gamma(3/2) = \frac{3.2.1}{2.2.2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(7/2) = \Gamma(5/2 + 1) = \frac{5}{2}\Gamma(5/2) = \frac{5.4.3.2.1}{2.4.2.2.2}\sqrt{\pi}$$

⋮

$$\Gamma(n + 1/2) = \frac{(2n - 1)!}{2^{2n-1}(n - 1)!}\sqrt{\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Artık, Gamma fonksiyonuna niçin faktöriyel fonksiyonu dendiği
açıklığa kavuşmuştur!



Bessel Fonksiyonları 1

Aşağıdaki denklem, Bessel diferansiyel denklemi olarak bilinir.

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu = sbt$$

Bu denklemle fen ve mühendislik bilimlerinde çok sık karşılarız. İkinci mertebe ve lineer diferansiyel denklem olduğu için genel çözüm iki tane lineer bağımsız fonksiyonun (çözümün) toplamıdır.

$$y(x) = a_1 J_\nu(x) + a_2 Y_\nu(x), \quad a_i = sbt$$

İki fonksiyonun lineer bağımsızlığı Wronskiyen ile kontrol edilir.

$$W = J_\nu(x) Y'_\nu(x) - J'_\nu(x) Y_\nu(x) \neq 0$$

Literatürde $J_\nu(x)$ 'e 1. tür Bessel fonksiyonu, $Y_\nu(x)$ 'e 2. tür Bessel fonksiyonu (veya Neumann fonksiyonu veya Weber fonksiyonu) denir. $Y_\nu(x)$ yerine bazen $N_\nu(x)$ ile gösterilir.

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



1. Tür Bessel Fonksiyonu 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Bessel diferansiyel denkleminin seri çözümünü yaptığımızda büyük indis kökünü kullanarak ilk çözümü yazmıştık.

$$y_1(x) = c_0 x^\nu \left[1 - \frac{1}{1!} \frac{1}{(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!} \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - + \dots + \frac{1}{p!} \frac{(-1)^p}{(\nu+1)(\nu+2) \cdots (\nu+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \right]$$

Burada $p = 0, 1, 2, \dots$. Şimdi $c_0 = \frac{1}{2^\nu \nu!}$ yazılırsa, bu sonsuz seriye “1. Tür Bessel Fonksiyonu” denir ve $J_\nu(x)$ ile gösterilir.

$$J_\nu(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! \Gamma(p + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p + \nu}$$

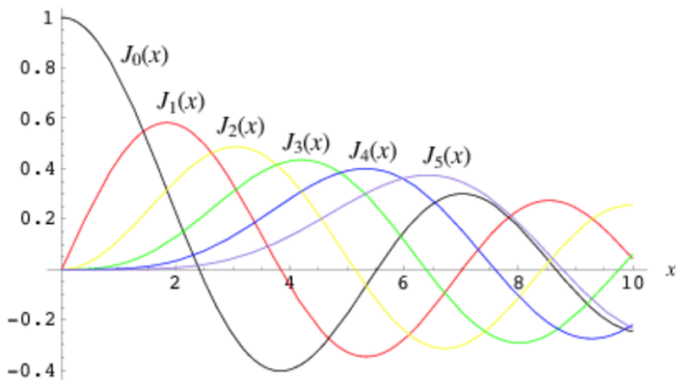
Burada $(p + \nu)! = \Gamma(p + \nu + 1)$ kullandık.



1. Tür Bessel Fonksiyonu 2

Bundan sonrasında ν sabitinin tamsayı veya yarım tamsayı veya bunlardan farklı bir sayı olması önemlidir.

$\nu=n=\text{tamsayı}$ Olduğunda



Genliği ve periyodu değişen harmonik bir davranış var.



1. Tür Bessel Fonksiyonu 3

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$J_n(x) = 0$ olan birçok x var; $J_n(x_{nk}) = 0$ ifadesinde x_{nk} sembolü, n -yinci Bessel'in k -yinci sıfırını veren x demektir.

Üretici Fonksiyon

Tam sayılı 1. tür Bessel fonksiyonlarını elde etmenin seri formülünden başka bir yolu da üretici fonksiyon kullanmaktır.

$\phi(x, t) = e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})}$ fonksiyonu $J_n(x)$ 'in üretici fonksiyonudur.

$\phi(x, t)$ fonksiyonu t 'ye göre $t = 0$ civarında Taylor serisine açılırsa, t^n 'nin katsayısı $J_n(x)$ 'i verir.

$$e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$



1. Tür Bessel Fonksiyonu 4

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Tekrarlama Bağlılıkları

Aşağıdaki bağıntıların hepsi tamsayı olsun ya da olmasın bütün ν değerleri için geçerlidir.

$$(i) \quad J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) - \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x) = 0$$

$$(ii) \quad 2J'_{\nu}(x) - J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = 0$$

$$(iii) \quad (x^{\nu} J_{\nu}(x))' - x^{\nu} J_{\nu-1}(x) = 0$$

$$(iv) \quad J_{\nu+1}(x) - \frac{\nu}{x} J_{\nu}(x) + J'_{\nu}(x) = 0$$



2. Tür Bessel Fonksiyonu 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Diferansiyel denklemlerin seri çözümlerini öğrenirken Fuchs Teorisinde gördük ki indis kökleri tamsayı olduğunda küçük indis kökü ilk çözüme lineer bağlı bir fonksiyon verir. Bunu Bessel diferansiyel denkleminde açıkça görürüz.

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Yani, $m_1 = \nu = n$ büyük indis kökü $J_n(x)$ çözümünü verirken, $m_2 = -\nu = -n$ küçük indis kökü $J_{-n}(x)$ çözümünü verir ki bu da $J_n(x)$ 'e lineer bağımlıdır.

Bu durumda, $J_\nu(x)$ 'den lineer bağımsız olan Bessel diferansiyel denklemini sağlayan ikinci çözümü şöyle yazabiliriz.

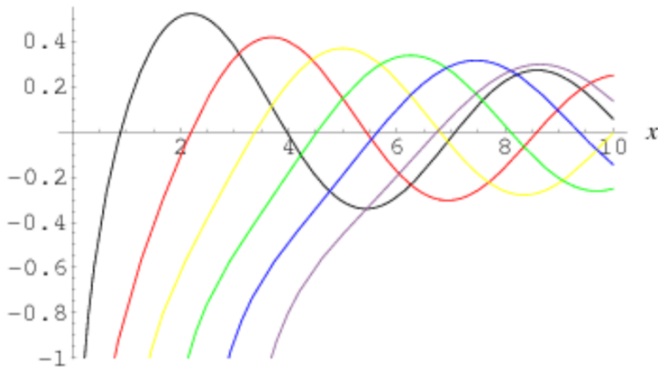
$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$



2. Tür Bessel Fonksiyonu 2

Bu fonksiyon ν 'nun bütün değerleri (tamsayı da dahil) için Bessel diferansiyel denkleminin ikinci çözümüdür.

Aşağıda $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $\dots$, $Y_6(x)$ fonksiyonlarının grafikleri vardır.





2. Tür Bessel Fonksiyonu 3

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$Y_n(x)$ fonksiyonu orijinde ıraksaktır. $J_n(x)$ her yerde düzgündü. Neumann fonksiyonunda da genliği ve periyodu değişen harmonik bir davranış var. $Y_n(x) = 0$ olan birçok x var; $Y_n(x_{nk}) = 0$ ifadesinde x_{nk} sembolü, n -yinci Neumann'ın k -yinci sıfırını veren x demektir.

Fizik ve mühendislik uygulamalarında genellikle $x = 0$ noktası da tanım bölgesinde olduğu için ve $Y_n(0) = -\infty$ olduğu için bu çözüm otomatik olarak düşer. O yüzden, çoğunlukla bu fonksiyonu Bessel diferansiyel denkleminin çözümlerinde görmeyiz.



Küresel Bessel Fonksiyonları 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Bessel diferansiyel denkleminde $\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ yarım tamsayı olursa çözüm trigonometrik fonksiyonlar cinsinden yazılabilir.

$$x^2 y'' + xy' + \left[x^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] y = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Bu denklemin çözümü şöyle yazılır.

$$y(x) = a_1 J_{n+1/2}(x) + a_2 Y_{n+1/2}(x)$$

Örneğin $n = 0$ için

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad \text{ve} \quad Y_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$



Küresel Bessel Fonksiyonları 2

Bu denklemde $y(x) = \sqrt{x}R(x)$ ataması yaparsak küresel Bessel diferansiyel denklemini elde ederiz.

$$x^2 R'' + 2xR' + [x^2 - n(n+1)] R = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Aynı dönüşümü yukarıdaki çözümde de yaparak küresel Bessel diferansiyel denkleminin çözümünü yazabiliriz.

$$R(x) = a'_1 \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi x}} J_{n+1/2}(x)}_{j_n(x)} + a'_2 \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi x}} Y_{n+1/2}(x)}_{n_n(x)}$$

Burada $j_n(x)$ ve $n_n(x)$ fonksiyonlarına küresel Bessel fonksiyonları denir.

$$j_n(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\sin x}{x} \quad \text{ve} \quad n_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{d^n}{dx^n} \frac{\cos x}{x}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Küresel Bessel Fonksiyonları 3

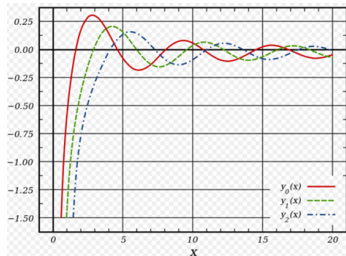
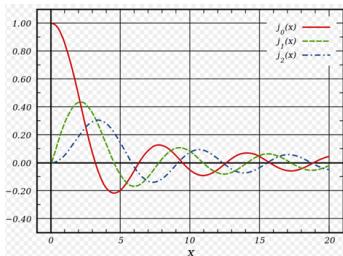
Birkaç tanesini açıkça yazalım.

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x},$$

$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x},$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$$

$$n_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$$



Her ikisi de harmonik davranıyor. Sadece $n_n(x)$ fonksiyonu orijinde ıraksak.



Genelleştirilmiş Bessel Diferansiyel Denlemi

Bessel diferansiyel denklemini ve çözümü

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

$$y(x) = a_1 J_\nu(x) + a_2 Y_\nu(x)$$

Her ikisinde $x = kr$ atayalım, $k > 0$ sabit.

$$r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + r \frac{dy}{dr} + (k^2 r^2 - \nu^2)y = 0$$

$$y(r) = a_1 J_\nu(kr) + a_2 Y_\nu(kr)$$

Burada $r = z^\beta$ ve $y(r) = z^\alpha u(z)$ atayalım.

$$z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + (1 + 2\alpha)z \frac{du}{dz} + (k^2 \beta^2 z^{2\beta} + \alpha^2 - \nu^2 \beta^2)u = 0$$

$$u(z) = a_1 z^{-\alpha} J_\nu(kz^\beta) + a_2 z^{-\alpha} Y_\nu(kz^\beta)$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Modifiye Bessel Fonksiyonları 1

Uygulamalarda

$$r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + r \frac{dy}{dr} + (k^2 r^2 - \nu^2) y = 0$$

denkleminde bazen $k^2 \rightarrow -k^2$ olur. Matematik açıdan $k \rightarrow ik$ yazmak bu atamaya eşdeğerdir.

$$r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + r \frac{dy}{dr} - (k^2 r^2 + \nu^2) y = 0$$

Şimdi sadelik için $kr = x$ yazalım.

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2) y = 0, \quad \nu = sbt$$

modifiye Bessel diferansiyel denklemdir. Çözümü şudur.

$$y(x) = a_1 I_\nu(x) + a_2 K_\nu(x)$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

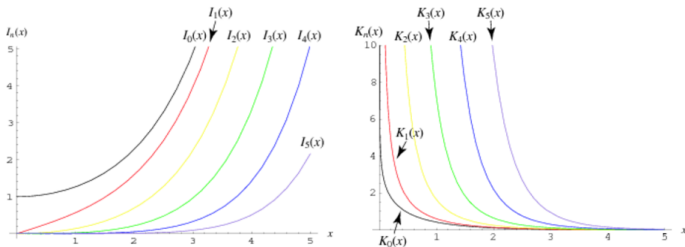
Kaynaklar



Modifiye Bessel Fonksiyonları 2; $k^2 \rightarrow -k^2$

Burada $I_\nu(x)$ ve $K_\nu(x)$ 'e modifiye Bessel fonksiyonları denir.

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \quad \text{ve} \quad K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)}$$



Her ikisi de harmonik davranmıyor. $I_\nu(x)$ düzgün artıyor ve sonsuzda ıraksak. $K_\nu(x)$ düzgün azalıyor ve orijinde ıraksak.



Bessel Fonksiyonlarının Dikliği 1

$J_m(kx)$ ve $J_m(lx)$ fonksiyonları aşağıdaki Bessel diferansiyel denklemlerinin çözümleri olsun.

$$x^2 J_m''(kx) + x J_m'(kx) + (k^2 x^2 - m^2) J_m(kx) = 0$$

$$x^2 J_m''(lx) + x J_m'(lx) + (l^2 x^2 - m^2) J_m(lx) = 0$$

Birinci denklemi $-J_m(lx)$ ile, ikinciye $J_m(kx)$ ile çarpalım ve iki denklemi toplayalım. Çıkan sonucu düzenleyelim ve $0 \leq x \leq a$ aralığında integralini alalım.

$$\int_0^a x J_m(kx) J_m(lx) dx = \frac{a}{k^2 - l^2} [J_m(ka) J_m'(la) - J_m(la) J_m'(ka)]$$

Bu integrali diklik bağıntısı olarak kullanmak istediğimiz için $k \neq l$ iken sonucun sıfır olmasını isteriz. Bu, iki türlü olabilir.

① $J_m(k_m a) = J_m(l_m a) = 0$ Dirichlet sınır şartı

② $J_m'(k_m a) = J_m'(l_m a) = 0$ Neumann sınır şartı

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Bessel Fonksiyonlarının Dikliği 2

$l = k$ durumu için yukarıdaki integrali hesap ederiz.

$$\int_0^a x J_m^2(kx) dx = \frac{1}{2k^2} \{ (k^2 a^2 - m^2) J_m^2(ka) + ka^2 [J'_m(ka)]^2 \}$$

Dirichlet sınır şartında, $J_m(k_m a) = 0$, ilk terim düşer,
Neumann sınır şartında, $J'_m(k_m a) = 0$, ikinci terim düşer.

İki integral sonucunu δ_{kl} yardımıyla bir inetgralde birleştirerek
Bessel fonksiyonlarının diklik bağıntısını yazarız.

Dirichlet sınır şartı varsa, $J_m(k_m a) = 0$

$$\int_0^a x J_m(kx) J_m(lx) dx = \frac{a^2}{2k} [J'_m(ka)]^2 \delta_{kl}$$

Neumann sınır şartı varsa, $J'_m(k_m a) = 0$

$$\int_0^a x J_m(kx) J_m(lx) dx = \frac{k^2 a^2 - m^2}{2k^2} J_m^2(ka) \delta_{kl}$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Bessel Fonksiyonlarının Dikliği 3

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$J_m(kx)$ fonksiyonları harmonik davranıyordu ve birçok sıfırı vardı. Yani, $J_m(k_ma) = 0$ ifadesini $J_m(k_{mp}a) = 0$ olarak yazabiliriz; k_{mp} ile m-yinci Bessel'in p-yinci sıfırını gösteririz.

Benzer olarak $J'_m(kx)$ fonksiyonları da harmonik davranır ve birçok sıfırı vardır. $J'_m(k_ma) = 0$ ifadesini $J'_m(k_{mp}a) = 0$ olarak yazabiliriz; k_{mp} ile m-yinci Bessel'in türevinin p-yinci sıfırını gösteririz.

Sonuçta Bessel fonksiyonlarının diklik bağıntısını şöyle de yazabiliriz. Dirichlet sınır şartı varsa, $J_m(k_{mp}a) = 0$

$$\int_0^a x J_m(k_{mp}x) J_m(k_{mq}x) dx = \frac{a^2}{2k_{mp}} [J'_m(k_{mp}a)]^2 \delta_{pq}$$

Neumann sınır şartı varsa, $J'_m(k_{mp}a) = 0$

$$\int_0^a x J_m(k_{mp}x) J_m(k_{mq}x) dx = \frac{k_{mp}^2 a^2 - m^2}{2k_{mp}^2} J_m^2(k_{mp}a) \delta_{pq}$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Soru: $f(x) = x^2$ fonksiyonunu $-L \leq x \leq +L$ aralığında $T = 2L$ periyotlu trigonometrik fonksiyonlar cinsinden Fourier serisine açınız.

Cevap: Bu notasyonda ve periyotta Fourier serisi şöyledir.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

Burada $f(x) = x^2$ için $-L \leq x \leq +L$ aralığında a_0 , a_n ve b_n hesap edelim.

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} x^2 dx = \frac{1}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{L^2}{3}$$

a_n için hesap yapalım.



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Burada kısmi integral hesabı yapalım.

$$u = x^2 \quad \rightarrow \quad du = 2x dx$$

$$dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \rightarrow \quad v = \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Şimdi a_n şöyle olur.

$$a_n = \frac{-4}{n\pi} \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Burada tekrar kısmi integral yapalım.

$$u = x \quad \rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \rightarrow \quad v = \frac{-L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Böylece a_n tam olarak hesap edilmiş oldu.

$$a_n = \left(\frac{2L}{n\pi}\right)^2 \cos(n\pi) = \left(\frac{2L}{n\pi}\right)^2 (-1)^n$$

Simetrik aralık ve çift fonksiyon olduğu için $b_n = 0$ olur.

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0$$

Sonuçta,

$$x^2 = \frac{L^2}{3} + \left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

Soru: $a > 0$ bir sabit olmak üzere $f(x) = e^{-ax^2}$ fonksiyonunu $-\infty \leq x \leq +\infty$ aralığında normalize ediniz. Normalize $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz.

Cevap: Normalizasyon $(f(x), f(x)) = 1$, yani

$N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = 1$ burada N normalizasyon katsayısı.

$$N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ax^2} dx = N^2 \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \Rightarrow N = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}$$

$$f(x) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-ax^2}$$

Şimdi de Fourier dönüşüm integralini yazalım ve hesap edelim.



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$\begin{aligned}g(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 - ikx} dx \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left[\left(x + \frac{ik}{2a}\right)^2 - \left(\frac{ik}{2a}\right)^2\right]} dx \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x + \frac{ik}{2a}\right)^2} dx \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{k^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\&= \left(\frac{1}{2\pi a}\right)^{1/4} e^{-k^2/4a}\end{aligned}$$



Sorular ve Çözümler

Soru: $0 \leq \theta \leq \pi$ ve $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ aralığında tanımlı aşağıdaki fonksiyonu küresel harmonikler cinsinden yazınız.

$$f(\theta, \varphi) = \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \varphi + 1$$

Cevap: İhtiyacımız olan küresel harmonikleri açıkça yazalım.

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}$$

$$Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi}, \quad Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

Buna göre şunları yazabiliriz.

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} Y_2^0 + \frac{1}{3}$$

$$\sin \theta \cos \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_1^{-1} - Y_1^1)$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

O halde

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} Y_2^0 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_1^{-1} - Y_1^1) + \frac{4}{3}$$

yazabiliriz. Son terimi de

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \Rightarrow 1 = \sqrt{4\pi} Y_0^0$$

yardımla yeniden yazarsak sonuç

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} Y_2^0 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_1^{-1} - Y_1^1) + \frac{4\sqrt{4\pi}}{3} Y_0^0$$

olur.



Sorular ve Çözümler

Soru: Aşağıdaki integrali Laguerre polinomlarının tekrarlama ve diklik bağıntılarını kullanarak hesaplayınız.

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x} x L_p(x) L_{p+1}(x) dx = ?$$

Cevap: Laguerre polinomlarının tekrarlama bağıntısını

$$L_{p+1}(x) - (2p + 1 - x)L_p(x) + p^2 L_{p-1} = 0$$

kullanarak şunu yazarız.

$$xL_p(x) = -L_{p+1}(x) + (2p + 1)L_p(x) - p^2 L_{p-1}$$

Bunu sorulan integralde yerine yazalım:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x} [xL_p(x)] L_{p+1}(x) dx$$

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar



Sorular ve Çözümler

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

$$\begin{aligned} I = & - \int_0^{\infty} e^{-x} L_{p+1}(x) L_{p+1}(x) dx \\ & + (2p+1) \int_0^{\infty} e^{-x} L_p(x) L_{p+1}(x) dx \\ & - p^2 \int_0^{\infty} e^{-x} L_{p-1}(x) L_{p+1}(x) dx \end{aligned}$$

Bu aşamada diklik bağıntısını kullanalım.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x L_p(x) L_m(x) dx = (p!)^2 \delta_{pm}$$

İkinci ve üçüncü integraller sıfırdır birinci integral de $[(p+1)!]^2$ dir. O halde sonuç şöyledir:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x L_p(x) L_{p+1}(x) dx = - [(p+1)!]^2$$



Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

KAYNAKLAR



Kaynaklar 1

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

- Bekir Karaoğlu, *Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler*, Seyir Yayıncılık, 2004
- Jon Mathews and R. L. Walker, *Mathematical Methods of Physics*, W. A. Benjamin Inc., 1970
- George Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press Inc., 1985
- C. Henry Edwards and David E. Penney, *Differential Equations and Boundary Value Problems*, Pearson Education Inc.
Çeviri Editörü Ömer Akın, *Diferansiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri*, Palme Yayıncılık, 2011
- Raymond A. Serway and John W. Jewett, *Serway Physics for Scientists and Engineers*, Thomson, 2004



Kaynaklar 2

Giriş

Vektörler

Kompleks
Sayılar ve
Fonksiyonlar

İntegral
Hesapları

Matrisler

Diferansiyel
Denklemler

Özel
Fonksiyonlar

Kaynaklar

- <https://www.wikipedia.org/>
- <https://mathworld.wolfram.com/>
- Mehmet Sezer ve Ayşegül Daşcıoğlu, *Diferansiyel Denklemler 1: Teori ve problem çözümleri*, Dora yayınları, 2019