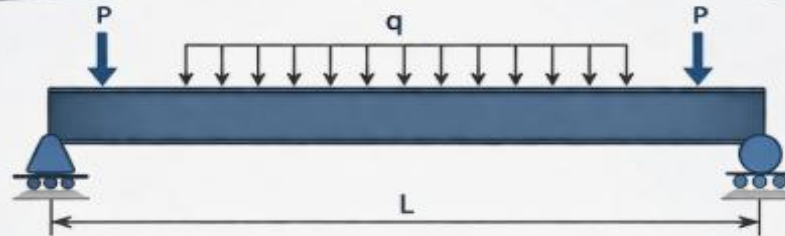


KİRİŞLERDE KESME KUVVETİ VE EĞİLME MOMENTLERİNİN HESAPLANMASI VE DİYAGRAMLARI

KONU AMACI



Kirişlerde oluşan kesme kuvvetlerini (V) ve eğilme momentlerini (M) hesaplamak, diyagramlarını çizmek ve yapı güvenliğini değerlendirmek.



NEDEN ÖNEMLİ?



Kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları, kirişin en kritik bölgelerini belirlememizi sağlar ve güvenli, ekonomik tasarımın temelini oluşturur.



P : Noktasal yük (N)

q : Yayıllı yük (N/m)

V : Kesme kuvveti (N)

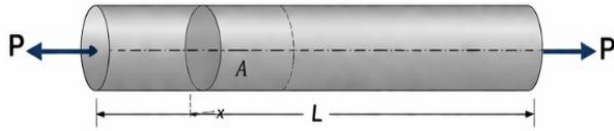
M : Eğilme momenti (N·m)

7.1 GİRİŞ VE TANIMLAR

Cisimlerin mukavemetlerinin asıl problemi, herhangi bir yapıya veya makine elemanına uygulanan dış kuvvetlerin yapıda veya elemenda doğuracağı gerilmelerin ve şekil değiştirmelerinin bulunmasıdır.

Eksenel ve burulma yüklerine maruz elemanlarda yük elemanın her kesitinde sabit veya elemana belli oranlarda yayılmış bulunacağından bu tip elemanlarda gerilme ve şekil değiştirmelerin bulunması pek zorluk çekilmez.

1) EKSENEL YÜK

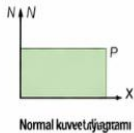
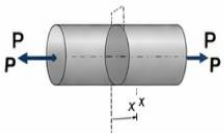


SABİT YÜK

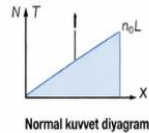
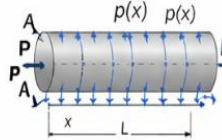
$$N(x)=P$$

YAYILI YÜK

$$n(x)=n_0$$



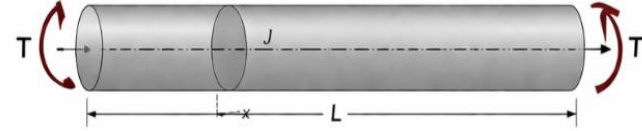
Normal kuvvet diyagramı



Normal kuvvet diyagramı

$$\text{Gerilme: } \sigma = \frac{N}{A} \quad \text{Şekil değişimi: } \delta = \int_0^L \frac{N(x)}{EA} dx$$

2) BURULMA YÜKÜ

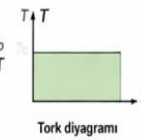
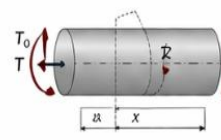


SABİT TORK

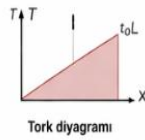
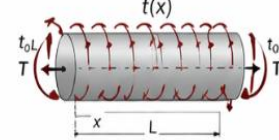
$$T(x)=T_0$$

YAYILI TORK

$$t(x)=t_0$$



Tork diyagramı



Tork diyagramı

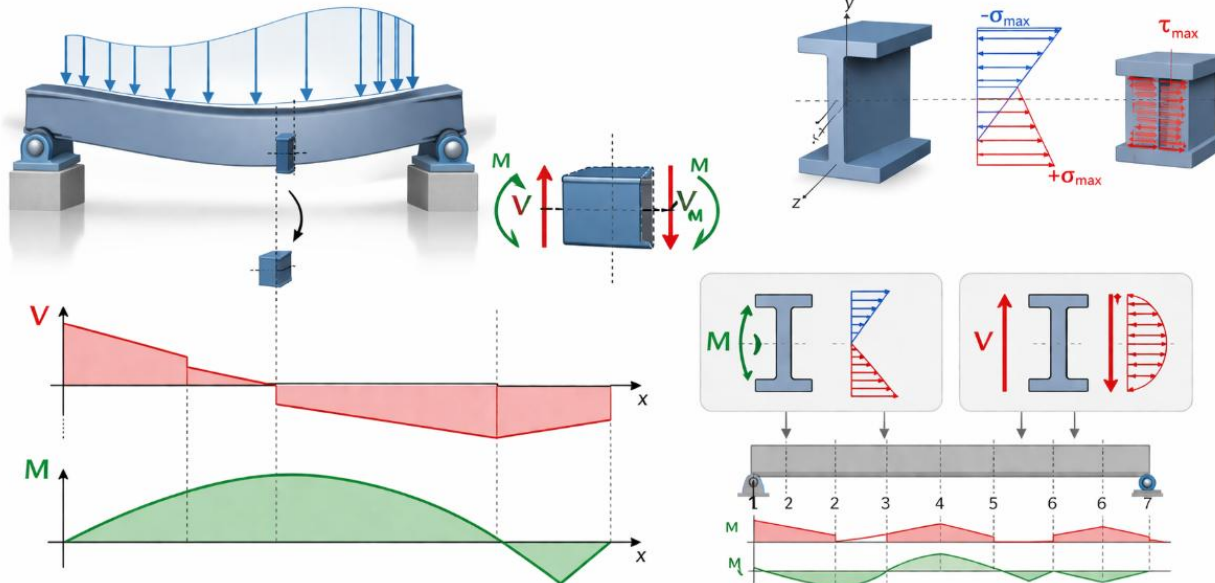
$$\text{Gerilme: } \tau = \frac{Tr}{J} \quad \text{Şekil değişimi: } \phi = \int_0^L \frac{T(x)}{GJ} dx$$

r: yarıçap
J: kutupsal atalet momenti
G: kayma modülü

Eğilme yüklerinde ise yükün tesiri kirişin genellikle her kesitinde değiştiğinden bunların çözümü daha karmaşık olmaktadır. Eğilme yükünün tesiri düşey “Kesme kuvveti” ve “Eğilme momenti” şeklini alır.

Eğilme momenti kiriş kesitlerinde normal gerilmeler, kesme kuvveti ise kesitlerde kayma gerilmeleri meydana getirirler.

Bunların maksimum oldukları kesitlerde ***maksimum normal gerilme*** ve ***maksimum kayma gerilmeleri*** hasıl olmaktadır. Dolayısıyla kirişlerde kesme kuvveti eğilme momenti değerlerinin bilinmesi , bunlarla *ilgili* gerekli diyagramların bilinmesi çizilmesi önemli olmaktadır.



- Kesiti boyu yanında çok küçük olan ve eksenine dik doğrultudaki kuvvetleri taşıyan taşıyıcı sistemlere **kiriş** denir.
- Kirişler değişik şekillerde sınıflandırılırlar.
- Mesnetlenme şekillerine göre izostatik kirişler aşağıdaki şekilde sınıflandırılırlar.



a) Çıkmalı Kiriş



Sol uç: mafsals (dönmeye izin verir, öteleme kısıtlar)



Sağ uç: makara (düşey ötelemeye izin verir)



b) Basit Kiriş



Sol uç: mafsals (dönmeye izin verir, öteleme kısıtlar)



Sağ uç: makara (düşey ötelemeye izin verir)



c) Konsol Kiriş



Sol uç: ankastre (dönme ve ötelemeler kısıtlı)

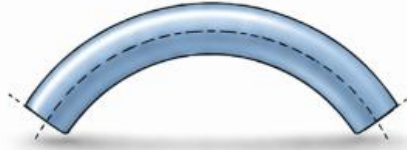
Sağ uç: serbest

Bunun yanında çok mesnetli (sürekli kirişler), Gerber kirişleri vb. şekilde biçimlerine göre de sıralanabilmektedir;



a) Doğru eksenli kiriş

Kesit merkezi boyunca uzanan düz kiriş.



b) Eğri eksenli kiriş

Ekseni eğri bir hat boyunca uzanan kiriş.



c) Kademeli kiriş

Kesiti kiriş boyunca kademeli olarak değişen kiriş.



d) Değişken kesitli kiriş

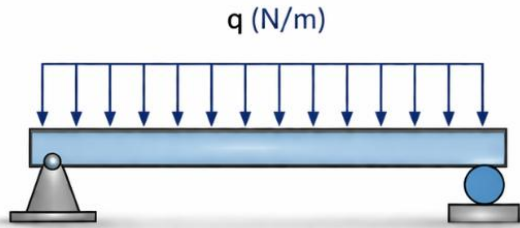
Kesiti kiriş boyunca sürekli değişen kiriş.



e) Kompozit kiriş

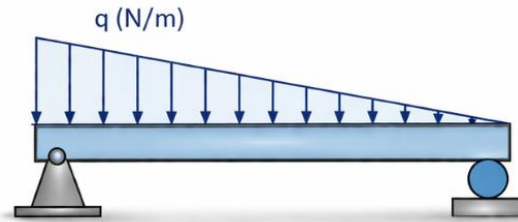
İki veya daha fazla malzemenin birleşiminden oluşan kiriş.

Kirişleri, kesitlerine dik doğrultuda yükler taşıyan elemanlar şeklinde tanımlamıştık. Taşıdıkları yükler de aşağıdaki gibi sınıflandırılmaktadır.



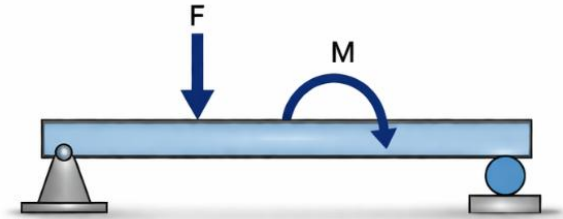
a) Düzgün yayılı yük

Kiriş boyunca sabit şiddette yayılı yük.



b) Lineer yayılı yük

Kiriş boyunca şiddeti doğrusal olarak değişen yayılı yük.



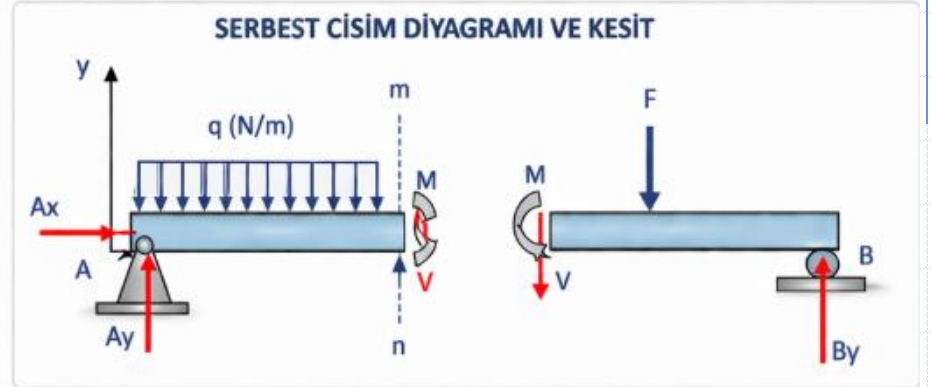
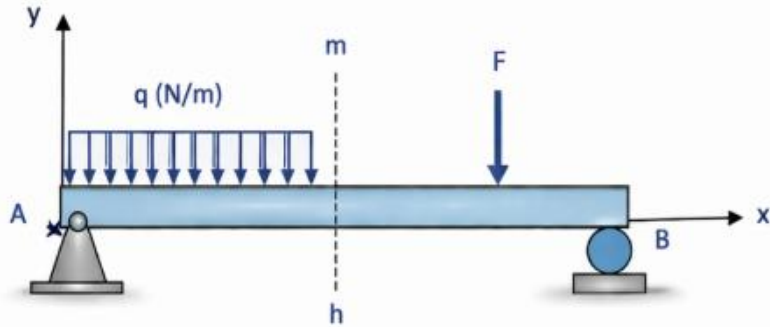
c) Tekil kuvvet ve kuvvet çifti

Belirli bir noktada uygulanan tekil kuvvet ve moment (kuvvet çifti).

KESME KUVVETİ VE EĞİLME MOMENTİ HESABI

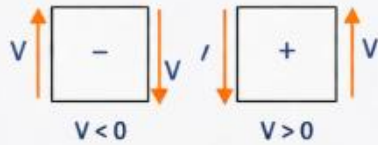
Kirişleri değişik şekillerde sınıflandırmıştık. Bu bölümde doğru eksenli düşey yüklü kirişleri ele alacağız. Kiriş muhtelif dış yükler etkisi altında iken, kiriş boyunca etkisi değişen iç kuvvet yada kesit tesirleri olarak adlandırdığımız kesme kuvveti, normal kuvvet ve eğilme momentleri meydana gelir.

Kirişi m-n kesitinden ayırma metoduna göre ayıralım. Ayırma işleminden sonrada kirişin her iki kesintide dengede olmak zorundadır. Ayrılan kısımda kirişi dengeleyen kuvvetler sistemi Kesme kuvveti, Normal kuvvet ve Eğilme momentleri meydana gelir. Burada yalnızca kesme kuvvetleri ve eğilme momentleri etkisindeki doğru eksenli kirişler ele alınmıştır. İç kuvvetleri pozitif olacak şekilde yerleştirelim.



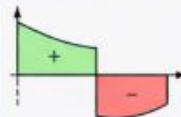
KESME KUVVETİ (V)

Pozitif kesme kuvveti, kesitte saat yönünde döndürme eğilimi oluşturur.



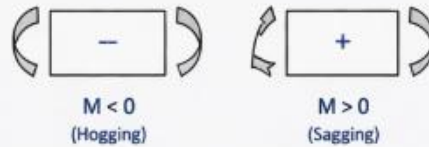
V DİYAGRAMI

Pozitif yukarı, negatif aşağı.



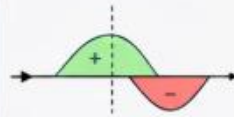
EĞİLME MOMENTİ (M)

Pozitif moment, kesitte sehim (sagging) oluşturur.



M DİYAGRAMI

Pozitif sehim (sagging), negatif kambur (hogging).



İŞARET KURALLARI

↑ V Kesitte sol yüzde yukarı yönlü kuvvet pozitif V kabul edilir.

↷ M Kesitte alt liflerde çekme oluşturan moment pozitif M kabul edilir.

ÖZET

Kirişte yükler iç kuvvetlere (V ve M) neden olur. V diyagramı kesme kuvvetinin, M diyagramı eğilme momentinin kiriş boyunca değişimini gösterir.



Bu diyagramlar, kirişin en kritik kesitlerini ve maksimum gerilmeleri belirlemek için kullanılır.

Ele alınan elemanları bir yerinden sabitlediğimizde kesme kuvveti, bunları saat ibresi dönme yönünün ters yönünde çeviriyorsa pozitif, değilse negatiftir. Momentler, ele alınan elamanı iç bükey yapıyorsa pozitif, değilse negatif işaretlidir.

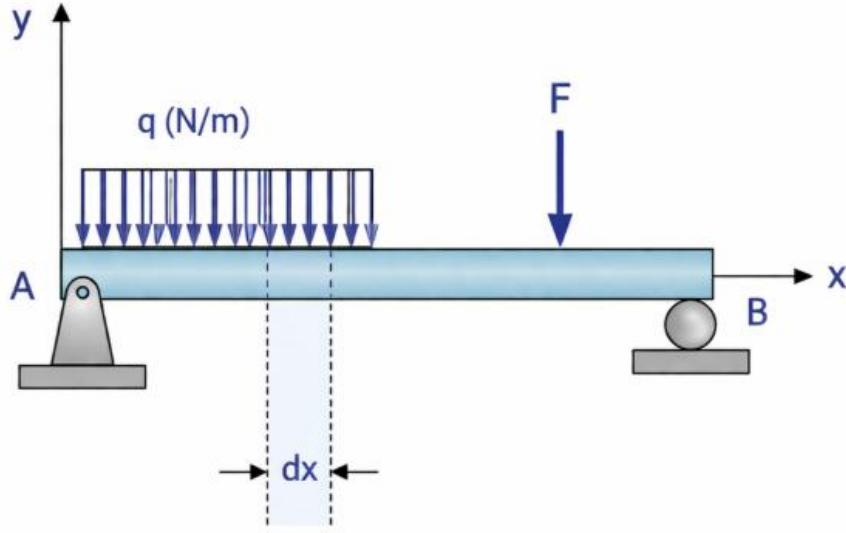
Burada;

$V(N) = \text{Kesme kuvveti}$

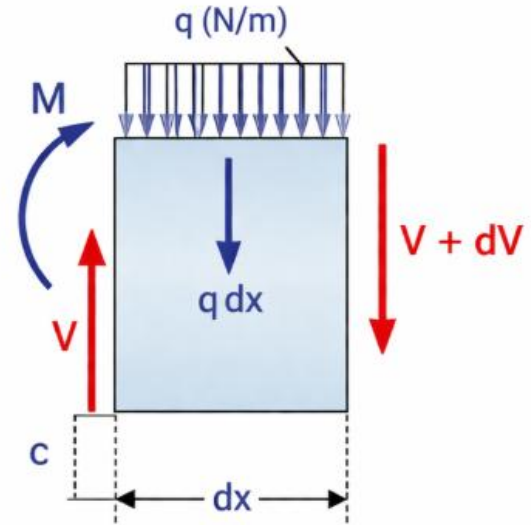
$N(N) = \text{Normal kuvvet}$

$M(Nm) = \text{Eğilme momentidir.}$

KESME KUVVETİ İLE EĞİLME MOMENTİ ARASINDAKİ İLİŞKİ



(a)



(b)

Yukarıdaki kirişten dx boyunda bir eleman çıkartıp kesme kuvvetleri ve momentler pozitif yönlerde olacak şekilde yerleştirilir. Burada kiriş boyu dx gibi bir diferansiyel olduğu için aynı şekilde kesme kuvveti ve eğilme momenti dx boyunca bir değişime uğrayacaktır. Bir uçta V olan kesme kuvveti $V+dV$ ve M olan eğilme momenti de $M+dM$ olacaktır. Toplam yayılı yük ise qdx dir.

Kiriş parça çıkarmadan önce dengede olduğu için kirişten ayrılan parçada dengede olmalıdır. O halde;

$$\sum F_y = 0$$

$$V + dV - V - qdx = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = -q$$

$$M + dM - M + (V + dV)dx - qdx\left(\frac{dx}{2}\right) = 0$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

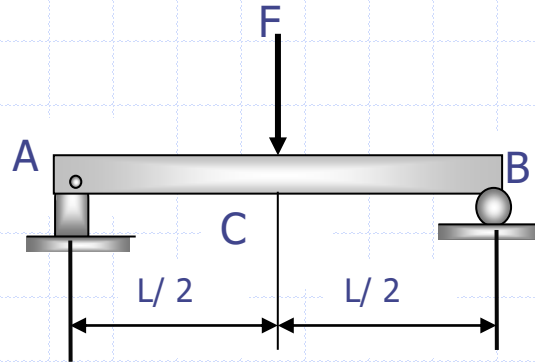
Burada ikinci dereceden küçükler (dv/dx gibi) ihmal edilmiştir. Yukarıdaki ifadelerden şu neticeler çıkarılır.

1. Kesme kuvveti sıfır ise moment ***maksimum*** veya ***minimumdur***
2. $V=0$ ise Momentin eğimi sıfır demektir. Buradan eğilme momentinin sabit olduğu söylenebilir.
3. İki nokta arasındaki kesme kuvvetinin alanı momente eşittir.

$$M = \int V dx$$

Örnek

Tekil yüke maruz basit kirişte kesme kuvveti ve eğilme momentini hesaplayıp diyagramlarını çiziniz.



- Önce mesnet reaksiyonları bulunur.

Simetrik olduğu için;

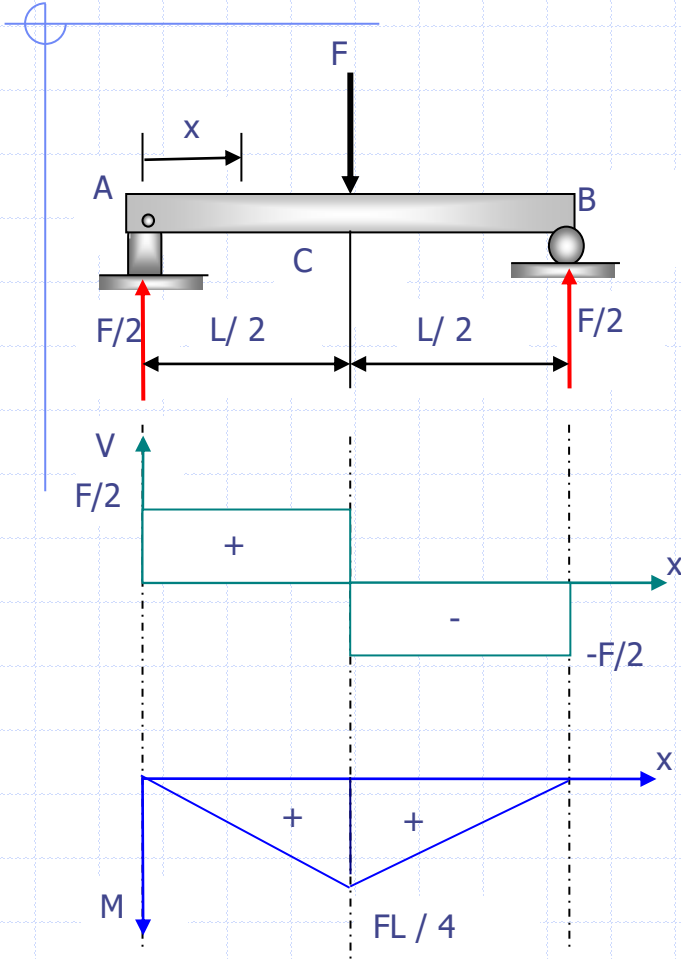
$$R_A = R_B = F / 2$$

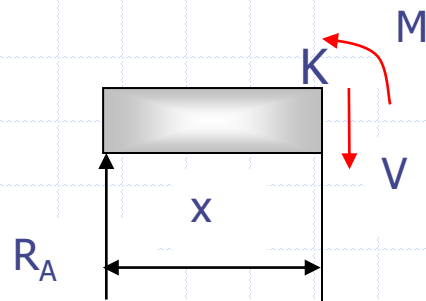
olacaktır.

- Kiriş iki bölgeden meydana gelmiştir. Bölgeler veya bölge sınırları; mesnetler, tekil yük uygulama noktaları, yayılı yük başlangıç ve bitişleri olarak tespit edilmektedir.

- Bu problemde kiriş iki bölgeden meydana gelmiştir.
 - a. Birinci bölge kirişin AC kısmı
 - b. İkinci bölge CB kısmıdır.

Birinci bölgede A mesnedinden x kadarlık mesafeden ayırma prensibine göre hayali bir kesim yapılırsa;





AC Bölgesi ($0 \leq x \leq \frac{l}{2}$)

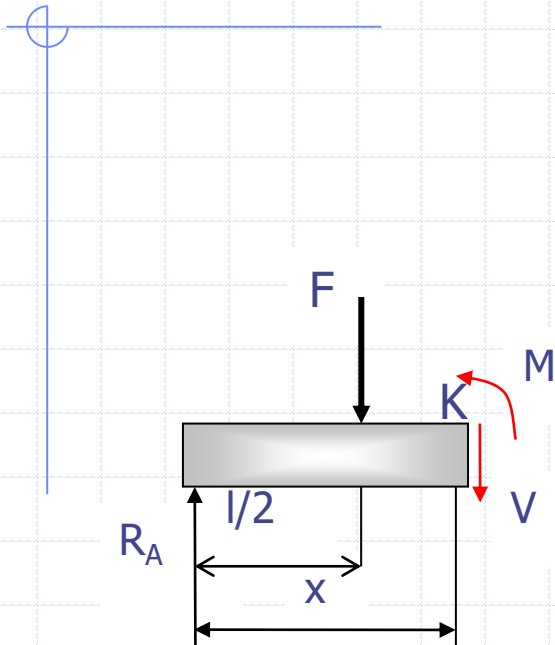
$$\sum F_y = 0$$

$$R_A - V = 0 \text{ ise } V = F/2$$

$$\sum M^K = 0 \Rightarrow M - R_A \cdot x = 0 \Rightarrow M = \frac{F}{2} \cdot x$$

$$x=0 \text{ ise } M=0$$

$$x=l/2 \text{ ise } M=Fl/4$$



CB Bölgesi ($\frac{l}{2} \leq x \leq l$)

$$\sum F_y = 0$$

$$R_A - F - V = 0 \quad V = -\frac{F}{2}$$

$$\sum M_K = 0 \Rightarrow M - R_A \cdot x + F \cdot \left(x - \frac{l}{2} \right) = 0$$

$$M = \frac{F}{2} \cdot x - F \left(x - \frac{l}{2} \right)$$

$$x = \frac{l}{2} \quad \text{de} \quad M = \frac{Fl}{4}$$

$$x = l \quad \text{de} \quad M = 0$$

KESME KUVVETİ VE EĞİLME MOMENTİ DİYAGRAMLARININ PRATİK OLARAK ÇİZİLİR Mİ!

Kesme Kuvveti: $(dV/dx) = -q$ denklemini ile tanımlanmıştı. Buradan hareketle $dV = -q \cdot dx$ bulunur. Bunun A ve B noktalarındaki integrali :

$$\int_{V_A}^{V_B} dV = \int_{x_a}^{x_b} q dx$$
$$V_B = V_A + \int_{x_a}^{x_b} q \cdot dx$$

şeklinde olacaktır. Buradan görüleceği gibi yayılı yük yok ise kesme kuvveti x eksenine paralel bir doğrudur. Düzgün yayılı yük varsa lineer bir doğrudur, Eğilme momenti ise:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad \text{ise} \quad \int_{M_A}^{M_B} dM = \int_{X_A}^{X_B} V \cdot dx \quad \text{ve} \quad M_B = M_A - \int_{X_A}^{X_B} V \cdot dx$$

Buradan da görüleceği üzere b noktasındaki eğilme momenti, A noktasındaki eğilme momentinden A ve B arasındaki kesme kuvveti alanı çıkarılarak bulunur ve eğilme momenti diyagramının derecesi V'nin entegralinden dolayı kesme kuvvetinden bir derece daha fazladır.

Kesme Kuvvetinin Pratik Çizilmesi

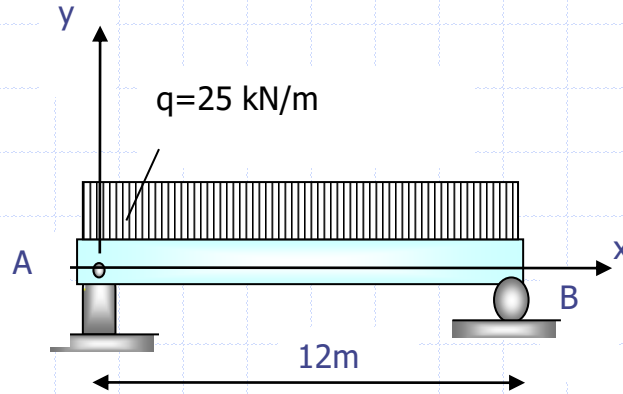
- A.** Yukarı yönlenmiş kuvvetler yukarı doğru ve aşağıya doğru yönlenmiş kuvvetler aşağı doğru çizilir.
- B.** Kuvvetlerin bulunmadığı aralıklarda kesme kuvveti x eksenine paralel bir doğru, düzgün yayılı yük için lineer bir doğru ve üçgen yayılı yük için ikinci dereceden bir doğrudur.

Eğilme Momentinin Pratik Çizilmesi

- A.** Bir noktadaki eğilme momenti, kendisinden bir önceki eğilme momentinden, bu iki nokta arasındaki kesme kuvvetinin alanın toplanması veya çıkarılmasıyla elde edilir.
- B.** Eğilme momenti diyagramının derecesi kesme kuvvetinin derecesinden bir fazladır.

Örnek

Basit mesnetli kiriş, kiriş boyunca $q=25\text{kN/m}$ üniform yayılı yüke maruzdur. Kiriş boyunca kesme kuvveti ve momentinin değişimini diyagramlarını çizerek gösteriniz.



$$R_A = R_B = \frac{25 \times 12}{2} = 150 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

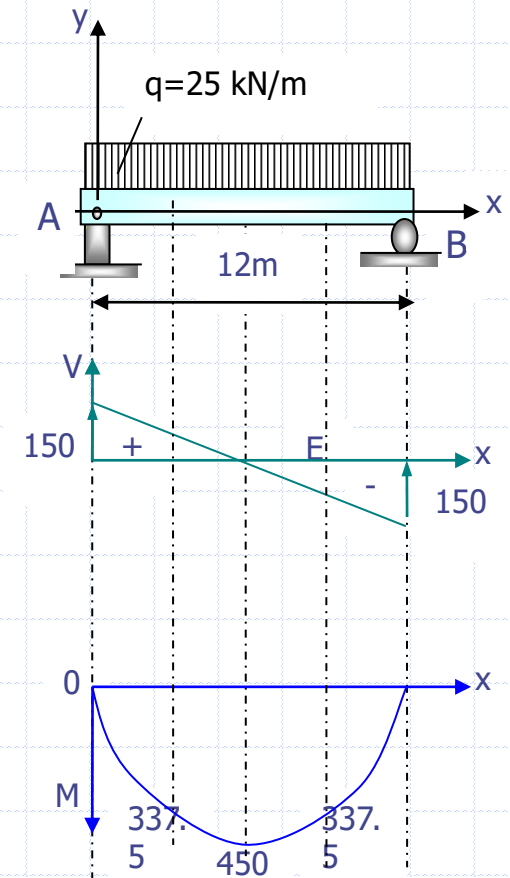
$$V = R_A - 25 \cdot x$$

$$V = 150 - 25 \cdot x$$

$$\sum M = 0$$

$$M + 25 \cdot x \cdot \frac{x}{2} - R_A \cdot x = 0$$

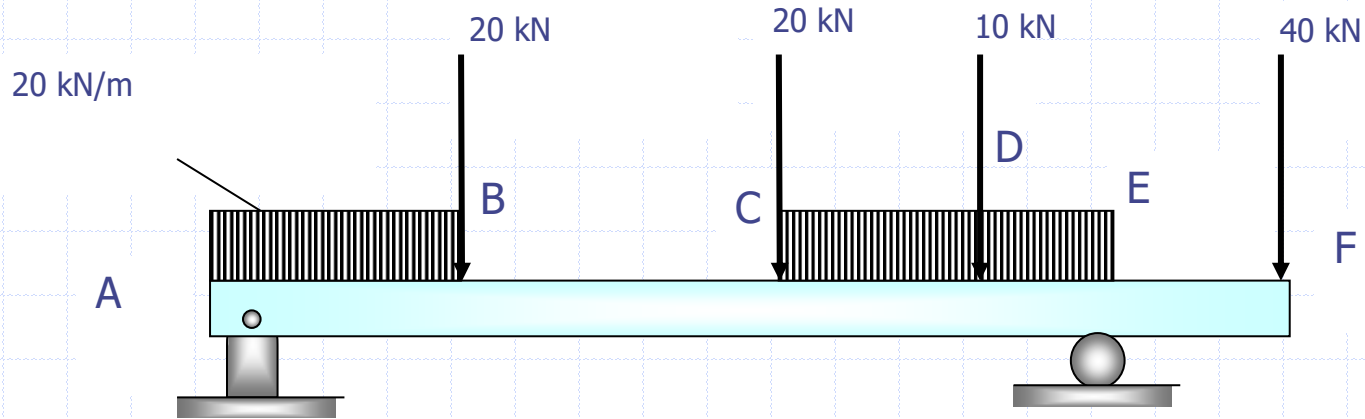
$$M = 150 - 25 \cdot \frac{x^2}{2}$$



- *A'da ($x=0$); $V=150 \text{ kN}$, $M=0$
- *C'de ($x=3 \text{ m}$) $V=75 \text{ kN}$, $M=337,5 \text{ kNm}$
- *D'de ($x=6 \text{ m}$) $V=0$, $M=450 \text{ kNm}$
- *E de ($x=9 \text{ m}$) $V=-75 \text{ kN}$, $M=337,5 \text{ kNm}$
- *D de ($x=12 \text{ m}$) $V=-150 \text{ kN}$, $M=0$

Örnek

Üniform yayılı yük ve tekil yüklerin birlikte etki etmesi durumunda kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramını çiziniz.



E' ye göre moment alırsak;

$$(R_A \times 8) + (40 \times 2) = (10 \times 2 \times 7) + (20 \times 6) + (20 \times 3) + (10 \times 1) + (20 \times 3 \times 1,5)$$

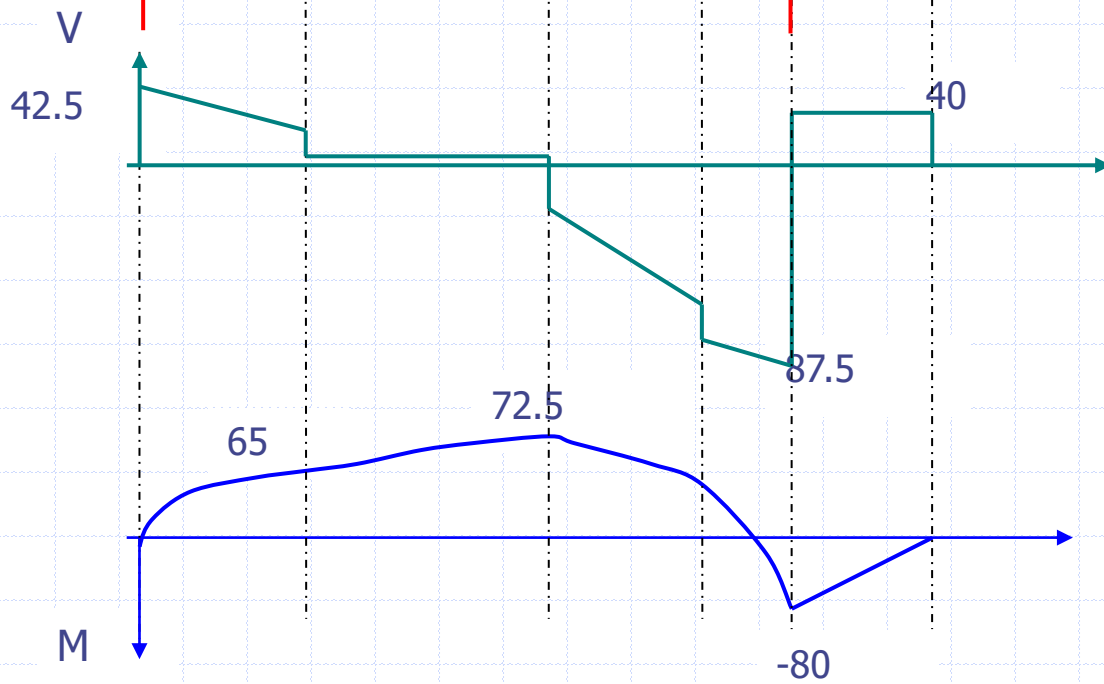
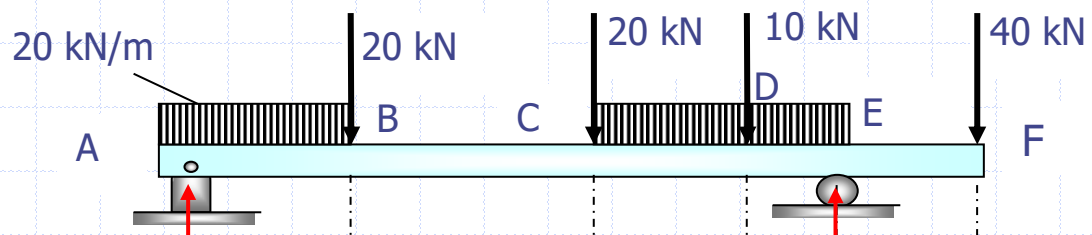
$$8R_A + 80 = 420$$

$$R_A = 42,5 \text{ kN}$$

A' daki kesme kuvveti $V=42,5 \text{ kN}$ $\sum F_y = 0$ dan

$$R_A + R_E = (10 \times 2) + 20 + 20 + 1 + (20 \times 3) + 40 = 170$$

$$R_E = 127,5 \text{ kN}$$



Burada pratik olarak yukarı olan kuvvetler yukarı aşağı olan kuvvetler aşağı ve kuvvet olmayan yerde x eksenine paralel ve yayılı kuvvetin altında azalan bir doğru olacak şekilde kesme kuvveti diyagramını çizebiliriz. Eğilme momenti diyagramını çizebilmek için sınırlardaki değerler bulunursa bunların birleştirilmesiyle eğri çizilir.

$$M_A = 0 \text{ (a mesnetinde)}$$

$$M_B = (42,5 \times 2) - (10 \times 2 \times 1) = 85 - 20 = 65 \text{ kNm}$$

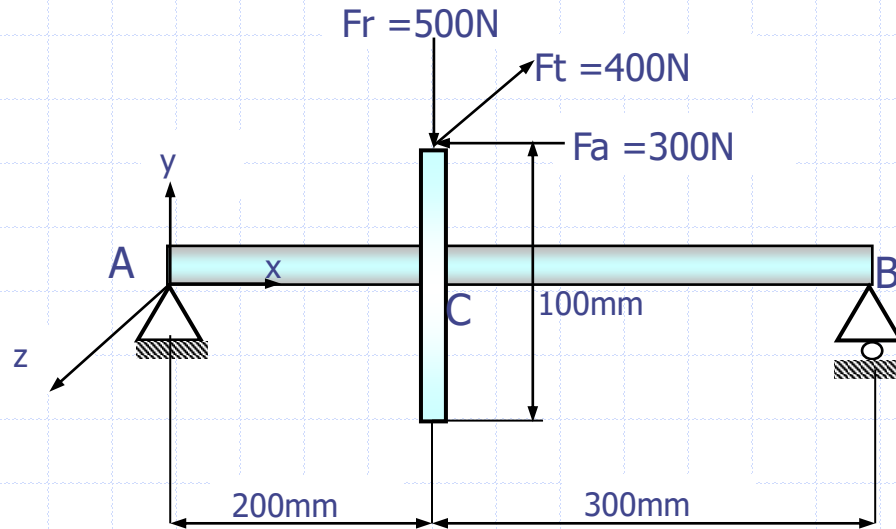
$$M_C = (42,5 \times 5) - (10 \times 2 \times 4) - (20 \times 3) = 72,5 \text{ kNm}$$

$$\begin{aligned}M_D &= (42,5 \times 7) - (10 \times 2 \times 6) - (20 \times 5) - (20 \times 2) - (20 \times 2 \times 1) \\ &= 297,5 - 120 - 100 - 40 - 40 = 297,5 - 300 = -2,5 \text{ kNm} \\ M_E &= (-40 \times 2) = -80 \text{ kNm sağ el ile çalıştırılacak} \\ M_F &= 0\end{aligned}$$

Eğriyi tam olarak çizebilmek için kiriş üzerindeki her bir üniform yayılı yük için uç değerlerin yanında bir ya da iki orta değerlerinde alınması yararlı olur.

Örnek

Verilen dişli mil sisteminde, eğilme burulma momentleri ile kesme ve normal kuvvet diyagramlarını çiziniz.



xy düzlemi:

$$\sum M_A = 0$$

$$F_r \cdot 200 - F_a \cdot 50 - F_{By} \cdot 500 = 0$$

$$500 \cdot 200 - 300 \cdot 50 - F_{By} \cdot 500 = 0$$

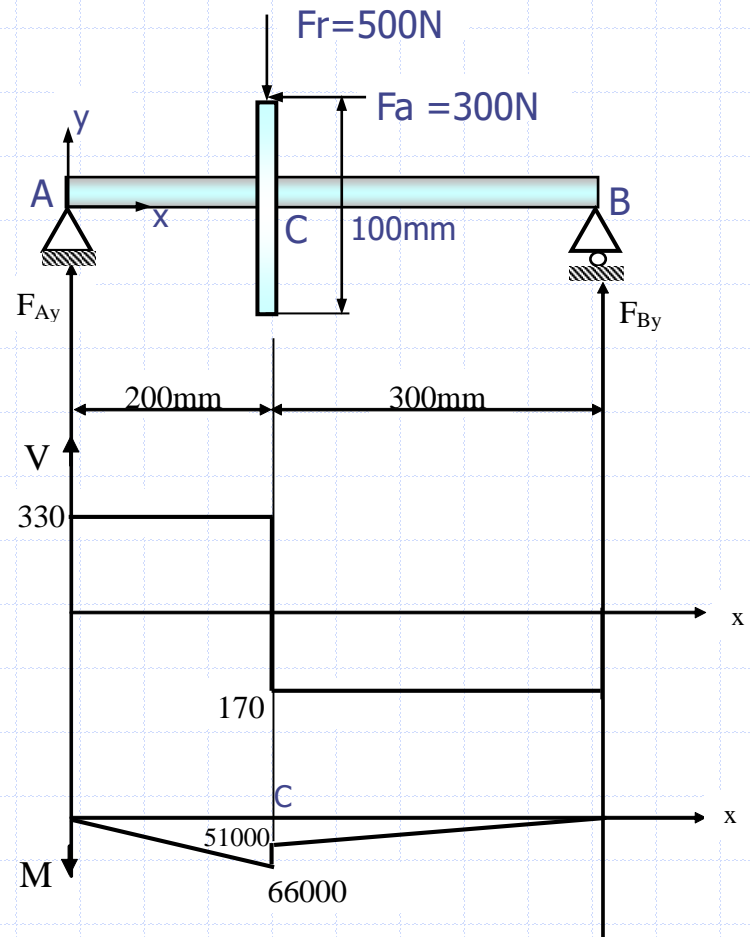
$$F_{By} = 170 \text{ N}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$F_{Ay} + F_{By} - F_r = 0$$

$$F_{Ay} = 500 - 170 = 330 \text{ N}$$

$$(M_z)_C = 66000 \text{ Nmm}$$



xz düzlemi:

$$\sum M_A = 0$$

$$F_t \cdot 200 - F_{Bz} \cdot 500 = 0$$

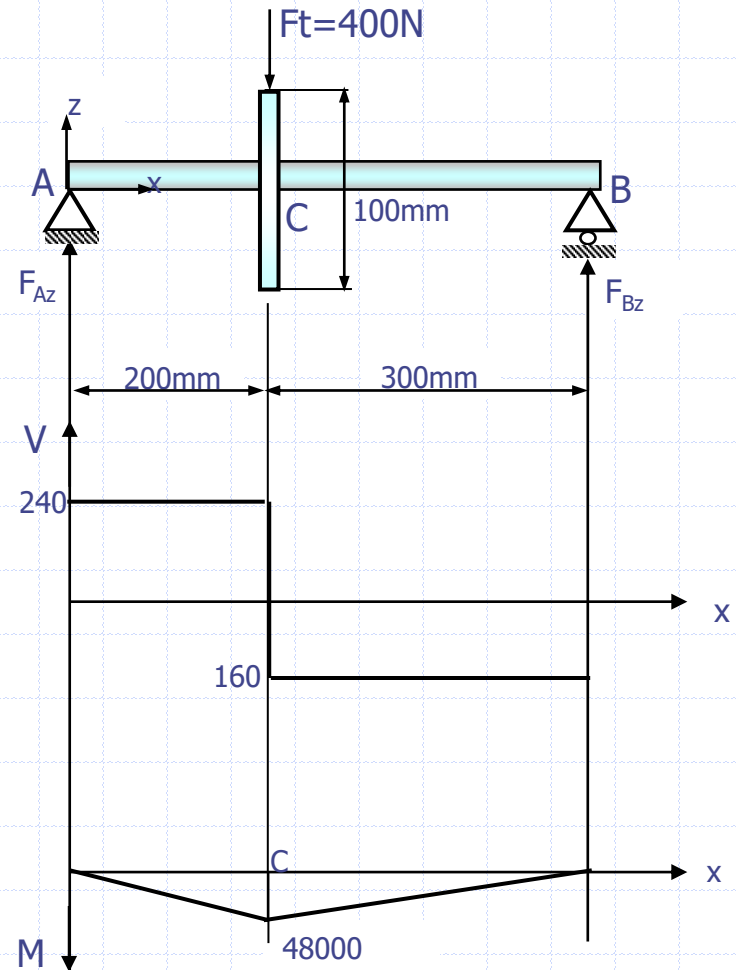
$$400 \cdot 200 - F_{Bz} \cdot 500 = 0$$

$$F_{Bz} = 160 \text{ N}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$F_{Az} + F_{Bz} - F_t = 0$$

$$F_{Az} = 400 - 160 = 240 \text{ N}$$



Yatak Kuvvetleri:

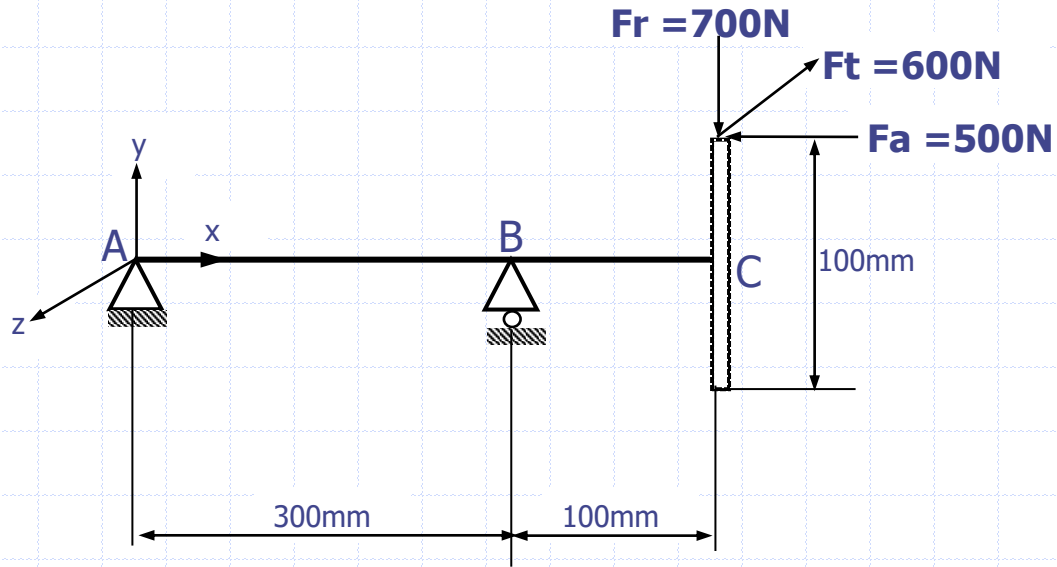
$$F_A = \sqrt{F_{Ay}^2 + F_{Az}^2} = \sqrt{330^2 + 240^2} = 408 N$$

$$F_B = \sqrt{F_{By}^2 + F_{Bz}^2} = \sqrt{170^2 + 160^2} = 233,45 N$$

$$M_C = \sqrt{66000^2 + 48000^2} = 81608,8 Nm$$

Örnek

Verilen dişli mil sisteminde, eğilme burulma momentleri ile kesme kuvvetleri ve normal kuvvet diyagramlarını çiziniz.



xy düzlemi:

$$\sum M_A = 0$$

$$F_{By} \cdot 300 - 700 \cdot 400 + 500 \cdot 50 = 0$$

$$F_{By} = 850 \text{ N}$$

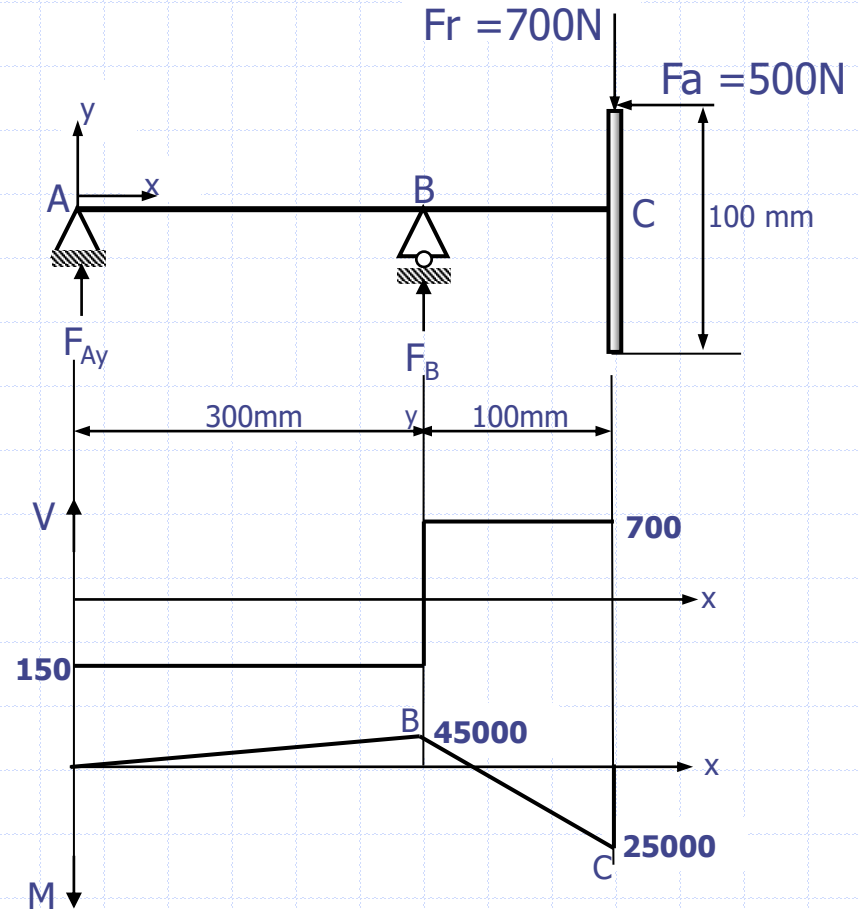
$$\sum F_Y = 0$$

$$F_{Ay} + 850 - F_r = 0$$

$$F_{Ay} = -150 \text{ N} \quad (\text{Yönü aşağı doğru})$$

$$(M_z)_B = -45000 \text{ Nmm}$$

$$(M_z)_C = 25000 \text{ Nmm}$$



xz düzlemi:

$$\sum M_A = 0$$

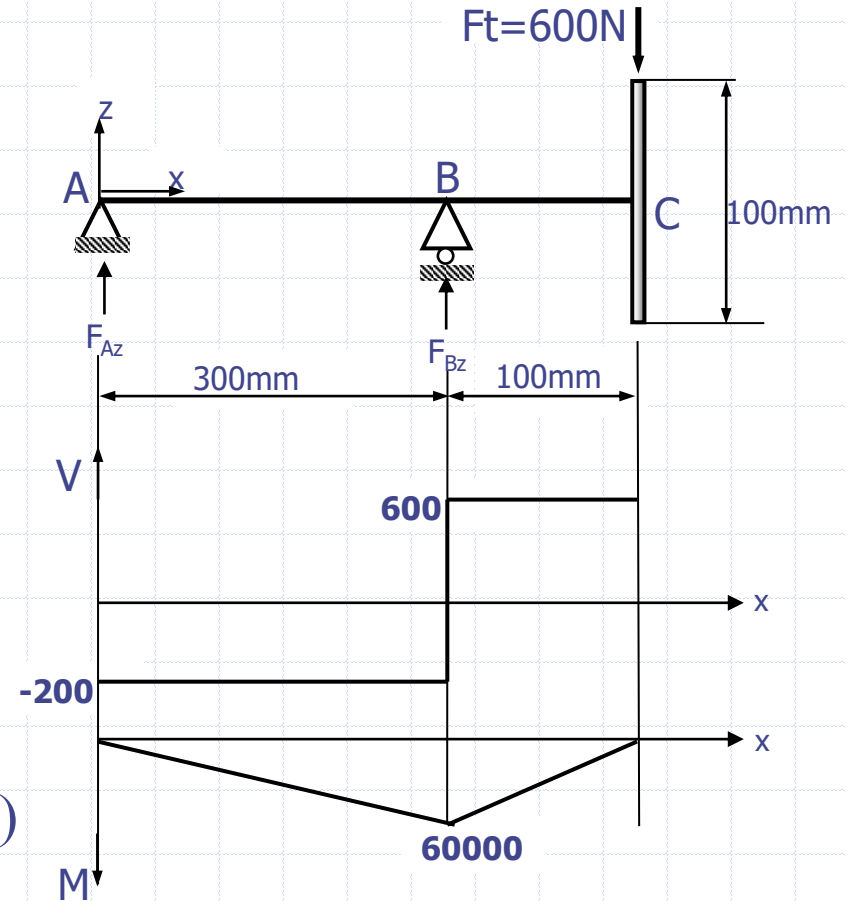
$$-F_{Bz} \cdot 300 + 600 \cdot 400 = 0$$

$$F_{Bz} = 800 \text{ N}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$F_{Az} + F_{Bz} - F_t = 0$$

$$F_{Az} = -200 \text{ N (Yönü aşağı doğru)}$$



Yatak Kuvvetleri:

$$F_A = \sqrt{F_{Ay}^2 + F_{Az}^2} = \sqrt{(-150)^2 + (-200)^2} = 250 \text{ Nmm}$$

$$F_B = \sqrt{F_{By}^2 + F_{Bz}^2} = \sqrt{850^2 + 800^2} = 1167,2 \text{ Nmm}$$

$$(M_y)_B = 60000 \text{ Nmm}$$

$$M_B = \sqrt{(-45000)^2 + 60000^2} = 75000 \text{ Nmm}$$