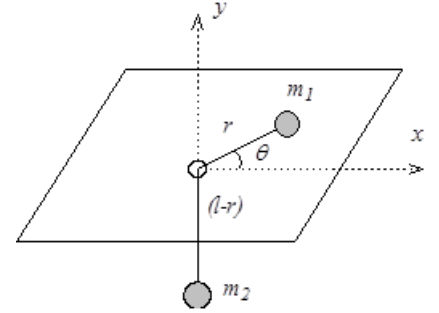


KLASİK MEKANİK:

S1	S2	T

1. l uzunluğundaki sabit bir ipin ucuna m_1 ve m_2 kütleleri şekildeki gibi bağlanmıştır. m_1 kütlesi sürtünmesiz masa üzerinde hareket edebilmektedir. m_2 kütlesi ise masanın ortasından açılan bir delikten sarkıtılan ipin diğer ucuna bağlanmış olup düşey ekseninde hareket edebilmektedir.



a) Uygun genel koordinatları seçerek sistemin kinetik ve potansiyel enerjilerini yazınız.

b) Lagrange denklemini yazarak hareket denklemlerini bulunuz

c) Hamilton ve Hamilton hareket denklemlerini yazarak, radyal ve açısal doğrultuda momentum korunumlarını ve enerjinin korunumunu inceleyiniz.

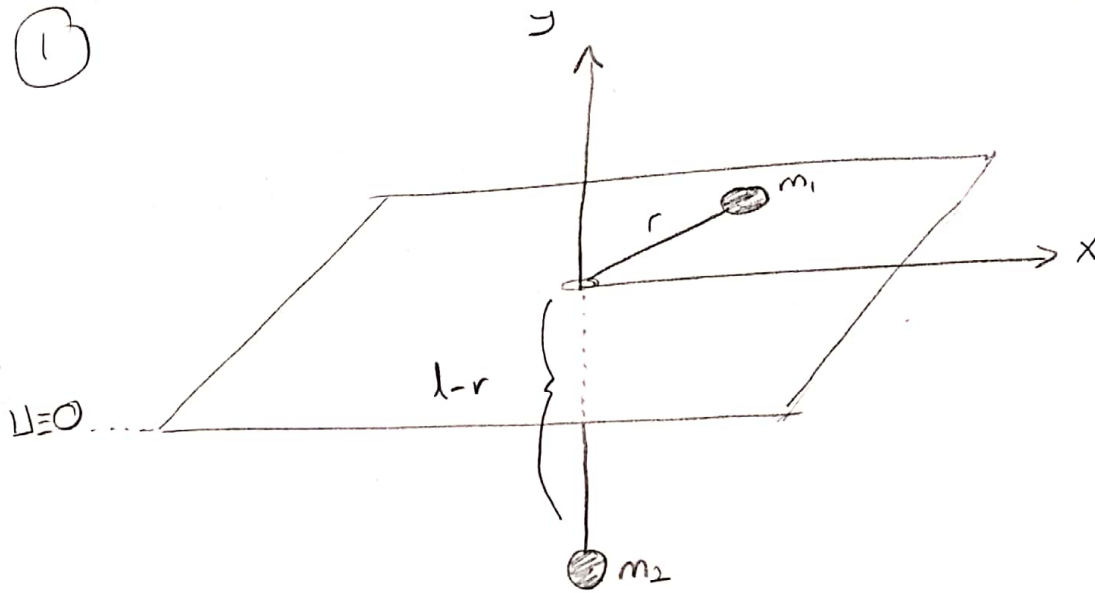
2. a) Merkezi kuvvet etkisi altında hareket eden bir parçacık için alansal hızın (Kepler'in ikinci yasası) sabit olduğunu gösteriniz.

b) m kütleli bir parçacığı, (A pozitif sabit) ile verilen yörüngede hareket ettirecek kuvvet kanununu bulunuz.

Faydalı bilgi; $U=1/r$ olmak üzere orbit denklemi;

$$f(1/u) = -\frac{l^2 u^2}{\mu} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right)$$

①



a) r ve ϑ genel koordinatlar

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \vartheta & , & \quad x_2 = s \cos t \\ y_1 &= r \sin \vartheta & , & \quad y_2 = (l-r) \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}^2$$

$$U = -m_2 g (l-r)$$

b)

$$L = T - U$$

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_1 (r^2 \dot{\vartheta}^2) + m_2 g (l-r)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = 0 \Rightarrow m_1 r \dot{\vartheta}^2 - m_2 g - (m_1 + m_2) \ddot{r} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(m_1 + m_2) \ddot{r} - m_1 r \dot{\vartheta}^2 + m_2 g = 0}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} \right) = 0 \Rightarrow 0 - \frac{d}{dt} (m_1 r^2 \dot{\vartheta}) = 0 \Rightarrow m_1 r^2 \dot{\vartheta} = \text{sbt}$$

$$r \ddot{\vartheta} + 2 \dot{r} \dot{\vartheta} = 0$$

$$c) H = \sum_k \dot{q}_k P_k - L = \dot{r} P_r + \dot{\vartheta} P_{\vartheta} - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{r}^2 - \frac{1}{2} m_1 r^2 \dot{\vartheta}^2 - m_2 g (1-r)$$

$$\left. \begin{aligned} P_r &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = (m_1 + m_2) \dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{P_r}{(m_1 + m_2)} \\ P_{\vartheta} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = m_1 r^2 \dot{\vartheta} \Rightarrow \dot{\vartheta} = \frac{P_{\vartheta}}{m_1 r^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow H$$

$$H = \frac{P_r^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{P_{\vartheta}^2}{2m_1 r^2} - m_2 g (1-r)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{P_r}{m_1 + m_2}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial P_{\vartheta}} = \frac{P_{\vartheta}}{m_1 r^2}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \Rightarrow \dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{P_{\vartheta}^2}{m_1 r^3} + m_2 g \neq 0 \Rightarrow P_r \text{ korunmaz}$$

$$\dot{P}_{\vartheta} = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = 0 \Rightarrow P_{\vartheta} \text{ korunur}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = T + U = E \quad E \text{ korunur}$$

(2)

a) Merkezî kuvvet etkisinde düzlem kutupsal koordinatlarda Lagrange;

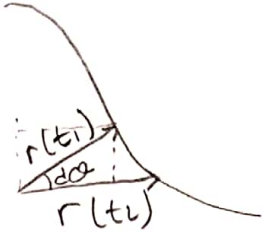
$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

φ geürimsel, $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \boxed{\mu r^2 \dot{\varphi} \equiv l}$ (sabit)

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\dot{\varphi}}$$

ve $\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}$



$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \cancel{r^2} \frac{1}{\cancel{\mu r^2}} = \boxed{\frac{l}{2\mu} \equiv \text{sabit}}$$

b) $r = A\varphi \Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{r}} = \frac{1}{A\varphi}$

$$f(U) = -\frac{l^2 U^2}{\mu} \left(\frac{d^2 U}{d\varphi^2} + U \right)$$

$$\frac{dU}{d\varphi} = -\frac{1}{A\varphi^2}, \quad \frac{d^2 U}{d\varphi^2} = \frac{2}{A\varphi^3}$$

$$f(U) = -\frac{l^2 U^2}{\mu} \left[\frac{2}{A\varphi^3} + \frac{1}{A\varphi} \right] = -\frac{l^2 U^2}{\mu} \left[\frac{2A^2}{A^3\varphi^3} + \frac{1}{A\varphi} \right]$$

ve $U = \frac{1}{A\varphi}$ kullanılarak

$$f(U) = -\frac{l^2 U^2}{\mu} [2A^2 U^3 + U] = -\frac{l^2 U^3}{\mu} [2A^2 U^2 + 1]$$

$$\Rightarrow f(r) = -\frac{l^2}{\mu r^3} \left[\frac{2A^2}{r^2} + 1 \right] = -\frac{l^2}{\mu} \left[\frac{2A^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} \right]$$

KUANTUM MEKANİĞİ:

S1	S2	T

1. $\hat{H} = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ve $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$ Bir fiziksel sistemin Hamiltoniyeni ve durum vektörü verilmiştir.

Burada ε enerji boyutunda bir sabittir.

- a) Enerji ölçüldüğünde hangi olasılıklarla ne ölçülür?
b) Hamiltonyenin beklenen değerini, $\langle \hat{H} \rangle$, hesap ediniz.

2. İki tane sert küresel parçacıktan oluşan yalıtılmış sistemde birinci parçacığın yarıçapı $a/2$ ve kütlesi m_1 , ikinci parçacığın yarıçapı $a/2$ ve kütlesi m_2 olsun. Parçacıklar biri birine değmiyorsa etkileşmiyorlar, değince de sert oldukları için aralarındaki etkileşme potansiyel enerjisi sonsuz oluyor.
- a) $\vec{r}_1$ vektörü m_1 'in konumu, $\vec{r}_2$ vektörü de m_2 'nin konum vektörü olmak üzere bu iki-parçacıklı yalıtılmış sistemin Hamilton operatörünü yazınız.

b) Sistemin Hamilton operatörünü kütle merkezi ve bağıl koordinatlarda yazınız.

c) Bu sistem için zamandan bağımsız Schrödinger denklemini çözünüz.

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ, FİZİK BÖLÜMÜ,
18.06.2021 TARİHLİ DOKTORA YETERLİLİK SINAVI,
KUANTUM FİZİĞİ SORULARI VE CEVAPLARIDIR

Soru: Bir fiziksel sistemin Hamiltonyeni ve durum vektörü verilmiştir.

$$\hat{H} = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Burada ε enerji boyutunda bir sabittir. (a) Enerji ölçüldüğünde hangi olasılıklarla ne ölçülür? (b) Hamiltonyenin beklenen değerini, $\langle \hat{H} \rangle$, hesap ediniz.

Cevap: Önce $\hat{H}$ matrisini kullanarak enerji özdeğerlerini ve bunlara karşılık normalize özvektörleri bulalım.

$$\hat{H}|\phi\rangle = \underbrace{(\lambda\varepsilon)}_{\text{özdeğer}} |\phi\rangle \implies \begin{pmatrix} -\lambda & i & 0 \\ -i & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Sıfırdan farklı a, b, c için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & i & 0 \\ -i & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies (\lambda+1)(\lambda^2-1) = 0 \implies \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

$\hat{H}$ 'nin özdeğerleri ε ve $-\varepsilon$ oldu. Burada $-\varepsilon$ özdeğeri iki-katlıdır.

Önce $\lambda_1 = +1$ (veya ε) özdeğerine karşılık gelen özvektörü, $|\phi_1\rangle$, bulalım.

$$\begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = 0 \implies a_1 = ib_1, \quad c_1 = 0$$

$$\text{Normalizasyon: } |a_1|^2 + |b_1|^2 + |c_1|^2 = 1 \implies a_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_1 = 0$$

O halde, normalize $|\phi_1\rangle$ şudur.

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Benzer adımlarla $\lambda_2 = -1$ (veya $-\varepsilon$) özdeğerine karşılık gelen özvektörü, $|\phi_2\rangle$, bulalım.

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \implies a_2 = -ib_2, \quad 0 = 0$$

$$\text{Normalizasyon: } |a_2|^2 + |b_2|^2 + |c_2|^2 = 1 \implies 2b_2^2 + c_2^2 = 1$$

Ortonormal bir $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ kümesi için iki seçenek var. Eğer $c_2 = 0$ olursa, $a_2 = -i/\sqrt{2}$ ve $b_2 = 1/\sqrt{2}$. Bu durumda, normalize $|\phi_2\rangle$ şudur.

$$|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eğer $b_2 = 0$ olursa, $a_2 = 0$ ve $c_2 = 1$. Bu durumda, normalize $|\phi_3\rangle$ şudur.

$$|\phi_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Şimdi durum vektörünü, ortonormal özvektörler cinsinden yazarız.

$$|\psi\rangle = c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle + c_3|\phi_3\rangle$$

Buradaki c_i katsayılarını hesap edebiliriz.

$$c_1 = \langle\phi_1|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{2i}{\sqrt{10}}$$

$$c_2 = \langle\phi_2|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$c_3 = \langle\phi_3|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Bu katsayıların mutlak kareleri sistemin ilgili özdurumda olma olasılığını verir.

$$P_1 = |c_1|^2 = \frac{4}{10} = \%40 \quad \text{olasılıkla enerji } E_1 = \varepsilon \quad \text{ölçülür.}$$

$$P_2 = |c_2|^2 + |c_3|^2 = \frac{6}{10} = \%60 \quad \text{olasılıkla enerji } E_2 = -\varepsilon \quad \text{ölçülür.}$$

(b) Enerjinin beklenen değerini iki yolla hesaplayabiliriz.

$$\langle\hat{H}\rangle = P_1 E_1 + P_2 E_2 = \left(\frac{2}{5}\right) (\varepsilon) + \left(\frac{3}{5}\right) (-\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{5}$$

İkinci yöntem $\langle\hat{H}\rangle = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$ kullanmaktır.

$$\langle\hat{H}\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+i & 1+i & 1 \end{pmatrix} \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\varepsilon}{5}$$

Soru: İki tane sert küresel parçacıktan oluşan yalıtılmış sistemde birinci parçacığın yarıçapı $a/2$ ve kütlesi m_1 , ikinci parçacığın yarıçapı $a/2$ ve kütlesi m_2 olsun. Parçacıklar biri birine değmiyorsa etkileşmiyorlar, değince de sert oldukları için aralarındaki etkileşme potansiyel enerjisi sonsuz oluyor. (a) $\vec{r}_1$ vektörü m_1 'in konumu, $\vec{r}_2$ vektörü de m_2 'nin konum vektörü olmak üzere bu iki parçacıklı yalıtılmış sistemin Hamilton operatörünü yazınız. (b) Sistemin Hamilton operatörünü kütle merkezi ve bağıl koordinatlarda yazınız. (c) Bu sistem için zamandan bağımsız Schrödinger denklemini çözünüz.

Cevap: (a) Sistemin potansiyel enerjisi şöyle yazılabilir.

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \begin{cases} 0 & , \quad |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| > a \text{ için} \\ \infty & , \quad |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \leq a \text{ için} \end{cases}$$

Buna göre sistemin Hamilton operatörü aşağıdaki gibi olur.

$$\hat{H} = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

Konum uzayında $\vec{p}_1 = -i\hbar\vec{\nabla}_1$ ve $\vec{p}_2 = -i\hbar\vec{\nabla}_2$ olduğu için zamandan bağımsız Schrödinger denklemini

$$\hat{H}\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

değişkenlerine ayırlamaz.

(b) Bu sebeple KM (kütle merkezi) koordinatına, $\vec{R}$, ve bağıl koordinata, $\vec{r}$, geçeriz.

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{ve} \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Buradan ters koordinat dönüşüm bağıntılarını yazalım.

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad \text{ve} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

Bu aşamada sistemin toplam kütlesini, $M = m_1 + m_2$, ve indirgenmiş kütlesini, $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, tanımlamak işlemleri sadeleştirir. İndirgenmiş kütle $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ olarak da yazılabilir. Bu tanımların yardımıyla $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ ve $(\vec{R}, \vec{r})$ koordinatlarında momentum vektörlerini yazalım.

$$\vec{p}_1 = m_1\dot{\vec{r}}_1, \quad \vec{p}_2 = m_2\dot{\vec{r}}_2, \quad \vec{P} = M\dot{\vec{R}}, \quad \vec{p} = m\dot{\vec{r}}$$

Vektörlerin üzerindeki noktalar, zamana göre türevi temsil etmektedir. Şimdi de yukarıdaki bağıntıların ve bu tanımların yardımıyla $(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ 'yi $(\vec{P}, \vec{p})$ cinsinden ifade edelim.

$$\vec{p}_1 = \frac{m_1}{M}\vec{P} + \vec{p} \quad \text{ve} \quad \vec{p}_2 = \frac{m_2}{M}\vec{P} - \vec{p}$$

Bunların karalarını alıp (a) şıkkındaki Hamilton operatörüne yerleştirirsek $\vec{P}, \vec{p}$ ile orantılı terim kaybolur.

$$\hat{H} = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$$

(c) $(\vec{R}, \vec{r})$ koordinatlarında sistemin toplam Hamilton operatörünü, $\hat{H}$, kütle merkezi Hamilton operatörü, $\hat{H}_{KM}$, ile bağıl Hamilton operatörünün toplamı olarak $\hat{H}_b$ olarak ayırabiliriz, $\hat{H} = \hat{H}_{KM} + \hat{H}_b$.

$$\hat{H}_{KM} = \frac{\vec{P}^2}{2M} \quad \text{ve} \quad \hat{H}_b = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$$

Bu durumda sistemin dalga fonksiyonunu iki fonksiyonun çarpımı olarak yazarak zamandan bağımsız Schrödinger denklemini değişkenlerine ayırmak mümkün olur.

$$\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = \psi_{KM}(\vec{R})\psi_b(\vec{r})$$

Zamandan bağımsız Schrödinger denklemini açıkça yazalım.

$$\hat{H}\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = E\Psi(\vec{R}, \vec{r})$$

$$\frac{\vec{P}^2}{2M}\Psi(\vec{R}, \vec{r}) + \frac{\vec{p}^2}{2m}\Psi(\vec{R}, \vec{r}) + V(r)\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = E\Psi(\vec{R}, \vec{r})$$

Burada $\vec{P} = -i\hbar\vec{\nabla}(\vec{R})$ ve $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}(\vec{r})$, dolayısıyla $\vec{P}^2 = -\hbar^2\nabla^2(\vec{R})$ ve $\vec{p}^2 = -\hbar^2\nabla^2(\vec{r})$, olduğu için denklem şu hale gelir.

$$-\frac{\hbar^2\psi_b(\vec{r})}{2M}\nabla^2(\vec{R})\psi_{KM}(\vec{R}) - \frac{\hbar^2\psi_{KM}(\vec{R})}{2m}\nabla^2(\vec{r})\psi_b(\vec{r}) + V(r)\psi_{KM}(\vec{R})\psi_b(\vec{r}) - E\psi_{KM}(\vec{R})\psi_b(\vec{r}) = 0$$

Her terimi $\psi_{KM}(\vec{R})\psi_b(\vec{r})$ ile bölelim.

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\nabla^2(\vec{R})\psi_{KM}(\vec{R})}{\psi_{KM}(\vec{R})}}_{=E_{KM}} \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2(\vec{r})\psi_b(\vec{r})}{\psi_b(\vec{r})}}_{=E_b} + V(r) - E = 0$$

Şimdi sistemin zamandan bağımsız Schrödinger denklemi, sırasıyla, kütle merkezi Schrödinger denklemi ve bağıl Schrödinger denklemi olarak ayrıştı.

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2(\vec{R})\psi_{KM}(\vec{R}) &= E_{KM}\psi_{KM}(\vec{R}) \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2(\vec{r})\psi_b(\vec{r}) + V(r)\psi_b(\vec{r}) &= E_b\psi_b(\vec{r}) \end{aligned}$$

Burada üç tane sabit arasında $E = E_{KM} + E_b$ ilişkisi vardır.

Kütle merkezi denklemi, 3 boyutta serbestçe hareket eden M kütleli parçacığın zamandan bağımsız Schrödinger denklemi biçimindedir ve çözümü düzlem dalgadır.

$$\psi_{KM}(\vec{R}) = Ae^{i\vec{K}\cdot\vec{R}} \quad \text{burada} \quad K^2 = \frac{2ME_{KM}}{\hbar^2} > 0$$

Yukarıda A integral sabiti ve $\vec{K}$ dalga vektörüdür.

Bağıl denklem, $\vec{r}$ konumundaki m kütleli ve $V(r)$ potansiyel enerjisine sahip bir parçacığın 3 boyutlu zamandan bağımsız Schrödinger denkleminde eşdeğerdir. Başta $\vec{r}_1$ ve $\vec{r}_2$ cinsinden yazdığımız potansiyel enerji, $\vec{r}$ cinsinden şöyle olur.

$$V(r) = \begin{cases} 0 & , \quad r > a \text{ için} \\ \infty & , \quad r \leq a \text{ için} \end{cases}$$

Buna göre a yarıçaplı bir topun içinde potansiyel enerji sonsuz olduğu için bu bölgede dalga fonksiyonu sıfırdır. Topun dışındaysa potansiyel enerji sıfır olduğu için m kütleli parçacık serbesttir ve dalga fonksiyonu düzlem dalga olacaktır. Özetle,

$$\psi_b(\vec{r}) = \begin{cases} Be^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} & , \quad r > a \text{ için} \\ 0 & , \quad r \leq a \text{ için} \end{cases}$$

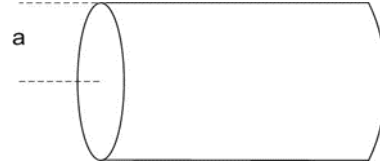
Burada B integral sabitidir ve dalga vektörü $\vec{k}$ ile bağıl enerji özdeğeri E_b arasında $k^2 = 2mE_b/\hbar^2 > 0$ ilişkisi vardır.

ELEKTROMANYETİK TEORİ:

S1	S2	T

1. Silindir biçiminde **a** yarıçaplı uzun bir telden geçen toplam I_0 akımı, telin kesiti üzerinde sabit olmayıp **z** eksenini boyunca $\mathbf{J}_f = \alpha s \hat{\mathbf{z}}$ ifadesiyle verilen akım yoğunluğu vektörü ile tarif edilmiştir. Burada α bir sabit, s silindir eksenine dik ışınsal doğrultudaki uzaklık ve $\hat{\mathbf{z}}$ ise **z** eksenini yönündeki birim vektördür. Telin içinde ve dışında, silindir eksenine dik tüm uzaklıklar için manyetik alanı hesaplayınız.

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}.$$

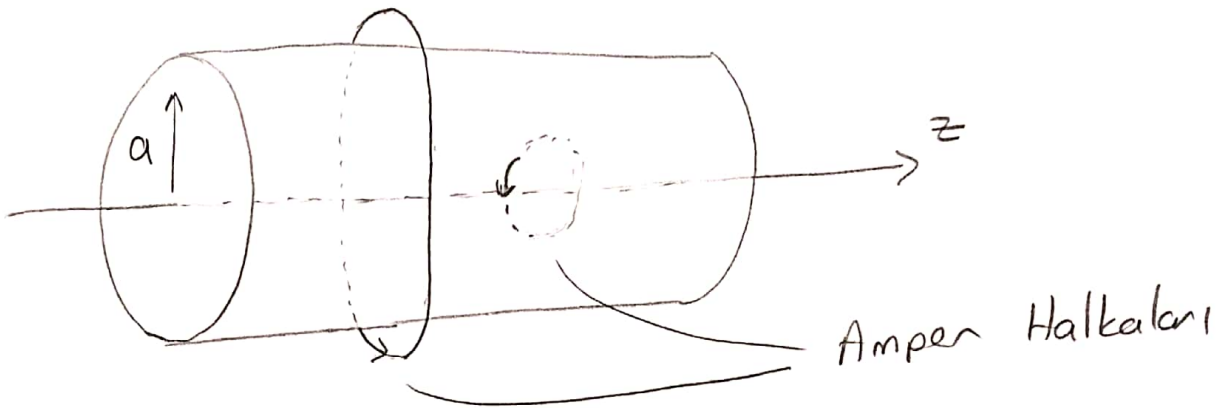


2. Başlangıç noktasına merkezlenmiş olan **R** yarıçaplı bir küresel kabuk, **k** bir sabit olmak üzere $\sigma(\theta) = k \sin \theta$ yüzey yük yoğunluğu taşımaktadır. Küreden çok uzaklarda **z** eksenini üzerindeki bir nokta için yaklaşık potansiyeli tek ve çift kutup momentlerinden yola çıkarak hesaplayınız.

$$V_{\text{mon}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r},$$

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau'.$$

①



$$\vec{J} = \alpha s \hat{z}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{eq} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

$$B 2\pi s = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^s (\alpha s \hat{z}) \cdot (s d\phi ds \hat{z})$$

$$B 2\pi s = \mu_0 2\pi \alpha \frac{s^3}{3} \Big|_0^s$$

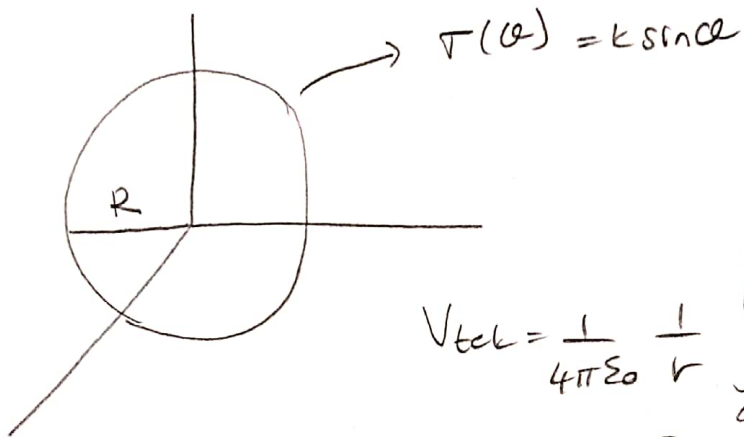
$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \alpha \frac{s^2}{3} \hat{\phi}} \quad (s \leq a)$$

$$B 2\pi s = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^a \alpha s^2 ds d\phi$$

$$B 2\pi s = \mu_0 \alpha \frac{s^3}{3} \Big|_0^a 2\pi$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 \alpha a^3}{3s} \hat{\phi}} \quad (s \gg a)$$

(2)



$$V_{\text{tot}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_0^\pi V(\theta') d\theta'$$

$$V_{\text{tot}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^\pi k \sin \theta' R^2 d\theta' \sin \theta' d\phi'$$

$$V_{\text{tot}} = \frac{k R^2}{4\pi\epsilon_0 r} 2\pi \int_0^\pi \sin^2 \theta' d\theta'$$

$$\sin^2 \theta' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta'$$

$$2\theta' = \alpha \Rightarrow 2d\theta' = d\alpha \quad V_{\text{tot}} = \frac{k R^2}{2\epsilon_0 r} \left\{ \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2\theta' d\theta' \right\}$$

$$\int_0^\pi \cos 2\theta' d\theta' = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$V_{\text{tot}} = \frac{k R^2}{4\epsilon_0 r} \pi$$

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int r' \cos\theta' d(\theta') da'$$

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R \cos\theta' k \sin\theta' R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'$$

$$V_{\text{eff}} = \frac{k 2\pi R^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_0^{\pi} \sin^2\theta' \underbrace{\cos\theta' d\theta'}_{d(\sin\theta')} = 0$$

$$d(\sin\theta') = d\mu$$

$$V_{\text{eff}} = 0$$

İSTATİSTİK MEKANİĞİ:

S1	S2	T

- Başlangıç sıcaklığı T_0 olan bir mol tek atomlu ideal gaz başlangıçtaki V_0 hacminden $2V_0$ hacmine çıkıyor. Aşağıdaki iki farklı durum için gazın yaptığı termodinamik işi ve gaz tarafından soğurulan enerjiyi hesaplayınız.
 - Sabit sıcaklık altında.
 - Sabit basınç altında.
- Başlangıç sıcaklığı T_0 olan bir mol tek atomlu ideal gaz tersinir olarak başlangıçtaki V_0 hacminden $2V_0$ hacmine genişliyor.
 - Gazın entropisindeki değişimi,
 - Evrenin entropisindeki değişimi hesaplayınız.

①

a) Sabit sıcaklıkta yapılan iş;

$$w = \int_{V_0}^{2V_0} p \, dV = RT \int_{V_0}^{2V_0} \frac{dV}{V} = RT \ln 2$$

$$\Delta U = Q - w = 0 \Rightarrow Q = w = RT \ln 2$$

b) Sabit basınçta iş;

$$w = \int_{V_0}^{2V_0} p \, dV = p \int_{V_0}^{2V_0} dV = pV_0 = RT_0$$

$$\Delta U = C_V \Delta T = \frac{3}{2} R \Delta T = \frac{3}{2} p \Delta V$$

$$= \frac{3}{2} pV_0 = \frac{3}{2} RT_0$$

$$\Delta U = Q - w \Rightarrow Q = \Delta U + w = \frac{5}{2} RT_0$$

(2)

$$a) \quad w = \int_{V_0}^{2V_0} P dV = RT_0 \int_{V_0}^{2V_0} \frac{dV}{V} = RT_0 \ln 2$$

$$\Delta U = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta S_{\text{gaz}} = \frac{Q}{T_0} = \frac{w}{T_0} = R \ln 2$$

b) Çevrenin (ısı kaynağının) entropisindeki değişim;

$$\Delta S_{\text{çevre}} = -\Delta S_{\text{gaz}}$$

$$\Delta S_E = \Delta S_{\text{çevre}} + \Delta S_{\text{gaz}} = 0$$

KATIHAL FİZİĞİ:

S1	S2	T

- Her biri, birinci ve ikinci en yakın komşularına, sırasıyla K_1 ve K_2 yay sabitlerine sahip yaylarla bağlı olan özdeş M kütleli lineer bir zincirinin örgü uzaklığı a dır.

- a) Bu zincirin örgü titreşimleri için dispersiyon bağıntısının

$$M\omega^2 = 2K_1[1 - \cos(qa)] + 2K_2[1 \mp \cos(2ka)]$$

Olduğunu,

- b) Bu dispersiyon bağıntısının uzun-dalgaboyu limitindeki ses dalgaları için elde edilen dispersiyon bağıntısına indirgendiğini,

- c) Grup hızının $q=\mp\pi/a$ 'da sıfır olduğunu gösteriniz.

- Kristallerde bağlanma türlerini yazınız. Bunları kısaca açıklayınız.

①

$$\textcircled{a} \mu \frac{d^2 U_n}{dt^2} = K_1 (U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) + K_2 (U_{n+2} - 2U_n + U_{n-2})$$

$$* U_n = U_0 e^{i(qx_n - \omega t)}$$

$$x_n = na$$

$$\Rightarrow U_n = U_0 e^{i(qna - \omega t)}$$

$$* U_{n+1} = U_0 e^{i(qx_{n+1} - \omega t)}$$

$$x_{n+1} = (n+1)a$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = U_0 e^{i(q(n+1)a - \omega t)}$$

$$= U_n e^{iqa}$$

$$* U_{n-1} = U_0 e^{i(qx_{n-1} - \omega t)}$$

$$x_{n-1} = (n-1)a$$

$$U_{n-1} = U_n e^{-iqa}$$

$$* U_{n+2} = U_0 e^{i(qx_{n+2} - \omega t)}$$

$$U_{n+2} = U_n e^{i2qa}$$

$$* U_{n-2} = U_0 e^{i(qx_{n-2} - \omega t)}$$

$$U_{n-2} = U_n e^{-i2qa}$$

$$-\mu \omega^2 U_n = K_1 (U_{n+1} + U_{n-1} - 2U_n) + K_2 (U_{n+2} + U_{n-2} - 2U_n)$$

$$-\mu \omega^2 U_n = U_n K_1 [e^{iqa} + e^{-i2qa} - 2] + U_n K_2 [e^{i2qa} + e^{-i2qa} - 2]$$

$$-\mu \omega^2 = 2K_1 (\cos qa - 1) + 2K_2 (\cos 2qa - 1)$$

$$\mu \omega^2 = 2K_1 (1 - \cos qa) + 2K_2 (1 - \cos 2qa)$$

c)

$$V_g = \frac{d\omega}{dq}$$

$$\omega^2 = \frac{2k_1}{\mu} (1 - \cos qa) + \frac{2k_2}{\mu} (1 - \cos 2qa)$$

$$\omega = \left(\frac{2k_1}{\mu} \right)^{1/2} [1 - \cos qa]^{1/2} + \frac{2k_2}{\mu} [1 - \cos 2qa]^{1/2}$$

$$\frac{d\omega}{dq} = \left(\frac{2k_1}{\mu} \right)^{1/2} \frac{1}{2} a \sin qa (1 - \cos qa)^{-1/2} + \frac{2k_2}{\mu} \frac{1}{2} 2a \sin 2qa (1 - \cos 2qa)^{-1/2}$$

$$a = \pm \frac{\pi}{a} \Rightarrow V_g \Big|_{q = \pm \frac{\pi}{a}} = ?$$

$$\sin \left(\pm \frac{\pi}{a} a \right) = 0 \quad \sin \left(\pm \frac{\pi}{a} \cdot 2a \right) = 0$$

$V_g = 0 \Rightarrow q = \pm \frac{\pi}{a}$ BBB sınırlı grup hızı sıfır olur. Yansıma düzenleyicidir.

b)

Uzun dalga boyu limiti:

$$\lambda \gg a \quad \text{veya} \quad qa = \frac{2\pi a}{\lambda} \ll 1$$

$$\cos qa \approx 1 - \frac{1}{2} (qa)^2$$

$$\omega^2 = \frac{2k_1}{\mu} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} (qa)^2 \right) \right] + \frac{2k_2}{\mu} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} (2qa)^2 \right) \right]$$

$$\omega^2 = \frac{k_1}{\mu} (q^2 a^2) + \frac{4k_2}{\mu} (q^2 a^2)$$

$$\omega^2 = q^2 a^2 \underbrace{\left(\frac{k_1 + 4k_2}{\mu} \right)}_{\text{sabit}}$$

$$\omega = \text{sabit } q$$

$$\omega = vq \Rightarrow \text{ses dalgaları}$$

(2)

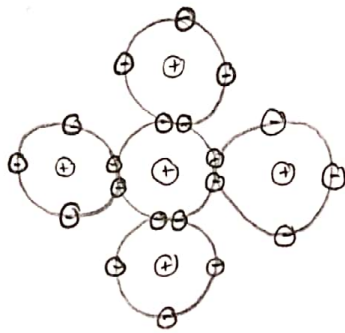
En kuvvetli bağlanmadan zayıf bağlanmaya doğru aşağıdaki gibidir.

- 1) İyonik bağlanma
- 2) Kovalent (deşerlik) bağlanma
- 3) Metalik bağlanma
- 4) Hidrojen bağlanması
- 5) Van der Waals bağlanması

① İyonik bağlanma: İyonik bağ, zıt yüklü iyonların elektrotstatik etkileşmesinden kaynaklanır. NaCl ve CsCl en yaygın iyonik kristal yapı türleridir. Bir iyon, en yakın komşu asal gaz atomu gibi benzer en dış elektron kabuğuna sahip pozitif veya negatif yüklü bir atom veya molekül olarak düşünülebilir. Atom elektron kaybederek veya elektron alarak iyonik hale gelir. NaCl kristalini ele alırsak, Na iyonu olmak için bir elektronu komşu klor atomuna vererek ve klor da bir elektron alarak iyonik bağlanma oluşturur. İyonik kristallerin kohesiyon enerjisi 10 eV/atom mertebesinde olup, diğer kristal bağlanma türlerine göre oldukça kuvvetlidir.

② Kovalent bağlanma: Kovalent bağ, bir veya daha fazla elektron çifti iki atom tarafından paylaşılmasıyla oluşur. Elmas yapıda bu bağlanma

tipi olmaktadır. Her C atomu 4 son yörünge elektronunu en yakın 4 atomla ortaklaşa kullanır. Böylece ikiser atomlu 4 kovalent bağ oluşur, son kabuk dolmuş ve We kararlı asal gaz yapısı oluşur.



Elmas Yapısı

Kovalent bağ çok güçlü olup, yönetime aşırı derecede bağlıdır. Kuşvetli bir bağ olup, 10 eV/atom mertebesinde dir.

③ Metalik Başlanma; Metal atomlardaki valans elektronları katılarda iletim elektronu olurlar. Bu valans elektronları serbest kalarak kristal içinde elektron gazı veya bulutu oluşturur. Geniş, bu elektron gazı içine gömülmüş kapalı kapalı kabuklara sahip (+artı) yüklü iyon çekirdekleri kalır. Eksi yüklü elektron bulutu ile artı yüklü iyon çekirdekleri arasındaki elektrostatik etkileşim sonunda metalik başlanma gerçekleşir. Metalik bağ, iyonik ve kovalent bağdan oldukça zayıftır. 1-5 eV/atom mertebesinde dir.

④ Hidrojen Başlanması; Hidrojen sadece bir tane elektrona sahiptir ve bu yüzden kovalent olarak bir atom değerine başlayabilir. Ancak ikinci atomun elektronegatifliği yüksek ise, (flor, oksijen, azot, klor) o zaman hidrojenin elektronu zamanının

Geçmişte dışarı atılan atomun yakınında hancan ve bunun sonucunda hidrojen pozitif yüklü olur. Komsu molekül içindeki atom da negatif yüklü olur. Bu + veya - yükler azda olsa bir dipol gibi davranır. Bu iki yük arasındaki elektrostatik çekim hidrojen bağının oluşumunu sağlar. $0,1 - 0,5 \text{ eV/atom}$ aralığında kovalent enerjiye sahiptir. Tipik örnekleri buz, organik birleşiklerdir.

- ⑤ Van der Waals Bağlanma; Asıl gaz kristallerde etkili olan bir etkileşme türüdür. Asıl gaz atomlarının son elektron kabukları tamamen doludur ve serbest atomun elektron dağılımına sahiptir. Bundan dolayı, asıl gaz atomları elektron değişimleme veya diğer atomlarla ortaklaşa kullanmaya istekli değildir. Atomları yüksüz olmalarına rağmen, + yüklü çekirdek etrafında sürekli hareket halinde olan elektron bulunan anlık dalgalanmaları normalde galeşik olan küresel simetrik - ve + yüklü dağılımlarının merkezlerinin küçük miktarlarda kaymalarına ve dolayısıyla anlık dipollerin oluşmasına yol açar. Dipollerin bir birleşimi çekmesiyle oluşan dipole-dipole etkileşimleri nedeniyle bir çekim oluşur.