

NO: İSİM SOYİSİM:

FİZ 201 FİZİKTE MATEMATİK METOTLAR ARASINAVI
2020 - 2021 Güz, Fizik Bölümü, Pamukkale Üniversitesi, Denizli

Soru : 1 (15P) $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ ile $\vec{B} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ vektörüne dik ve boyu 5 br olan vektörü bulunuz.

Soru : 2 (15P) $\vec{C} = 3xz^2\hat{i} + 2xy\hat{j} - x^2\hat{k}$ vektör alanı ve $\phi = 3x^2 - yz$ skaler alanı için $\text{div}(\phi\vec{C})$ hesap ediniz.

Soru : 3 (15P) $e^{3zi} = -1 + i$ bağıntısını sağlayan tüm z değerlerini bulunuz.

Soru : 4 (15P) Reel kısmı $u(x, y) = e^{-x} \sin y - \frac{x}{x^2+y^2}$ olan $f(z)$ kompleks fonksiyonu analitik olabilir mi? Gösteriniz. Eğer "evet" ise, analitik fonksiyonu bulunuz.

Soru : 5 (20P) Aşağıdaki integrali hesaplayınız.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

İpucu: $I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx$ integral denkleminin α 'ya göre türevini alarak başlayabilirsiniz.

Soru : 6 (20P) Aşağıdaki matrisin özdeğerlerini ve her özdeğere karşılık gelen bire boylandırılmış (normalize) özvektörlerini bulunuz.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

BAŞARILAR ... 11.12.2020 Saat: 10.00-13.00 Prof.Dr. Muzaffer ADAK

C E V A P L A R

Cevap : 1 $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ ile elde edilen \vec{C} vektörü tanım gereği hem \vec{A} hem de \vec{B} ye diktir.

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -5\hat{i} - 8\hat{j} - 6\hat{k}$$

Bunun boyunu ayarlamak için $\vec{C}' = N\vec{C}$ diyelim. Şimdi de $|\vec{C}'| = \sqrt{\vec{C}' \cdot \vec{C}'} = 5$ yaparak $N = 1/\sqrt{5}$ buluruz. O halde, cevap şudur.

$$\vec{C}' = -\frac{1}{\sqrt{5}}(5\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k})$$

Cevap : 2 Diverjansın özelliğini kullanarak şunu yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{C}) &= (\vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{C} + \phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) \\ &= (6x\hat{i} - z\hat{j} - y\hat{k}) \cdot (3xz^2\hat{i} + 2xy\hat{j} - x^2\hat{k}) + (3x^2 - yz)(3z^2 + 2x) \\ &= 27x^2z^2 - 4xyz + x^2y + 6x^3 - 3yz^3 \end{aligned}$$

Cevap : 3 Öncelikle $-1 + i$ kompleks sayısını $re^{i(\theta+2\pi k)}$ biçiminde yazalım.

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad , \quad \theta = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

O halde

$$e^{3zi} = 2^{1/2} e^{i(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k)} \quad \rightarrow \quad 3zi = \frac{1}{2} \ln 2 + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$$

yazabiliriz. Son olarak z yi çekersek sonuç şu olur.

$$z = \left(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{i}{6} \ln 2 \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Cevap : 4 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonunun analitik olabilmesi için hem u hem de v iki-boyutlu Laplace denklemini sağlamalıdır. Kontrol edelim.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -e^{-x} \sin y + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x} \sin y + \frac{6xy^2 - 2x^3}{(x^2 + y^2)^3} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= e^{-x} \cos y + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-x} \sin y + \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

Evet! Gerçekten $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ sağlamıyor. O halde, analitik $f(z)$ vardır. Şimdi, $v(x, y)$ belirlemek için Cauchy-Riemann şartlarını kullanalım.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \rightarrow \quad v(x, y) = -\int \frac{\partial u}{\partial y} \partial x = -\int \left[e^{-x} \cos y + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right] \partial x \\ v(x, y) &= e^{-x} \cos y + \frac{y}{x^2 + y^2} + C(y) \end{aligned}$$

x e göre kısmi türevden integrale geçtiğimiz için integral sabiti y ye bağlı olabilir: $C = C(y)$. Şimdi de C nin y bağımlılığını belirlemek için Cauchy-Riemann şartlarından diğerini kullanalım:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{dC(y)}{dy} = 0$$

Yani $C(y)$ niceliği y bağlı değil, gerçekten bir sabitmiş! O halde,

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{-x} \sin y - \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left[e^{-x} \cos y + \frac{y}{x^2 + y^2} \right] + C \\ &= e^{-x} i (\cos y - i \sin y) - \frac{x - iy}{x^2 + y^2} + C \\ &= i e^{-x} e^{-iy} - \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} + C \\ &= i e^{-(x+iy)} - \frac{1}{x + iy} + C \\ &= i e^{-z} - \frac{1}{z} + C \end{aligned}$$

Cevap : 5 I 'yi reel α parametresinin bir fonksiyonu olarak yazalım.

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx$$

O halde, $I = I(0)$ olur. Yani, önce $I(\alpha)$ 'yi hesaplayacağız. En son, $\alpha = 0$ yerleştirerek cevabı elde edeceğiz. $I(\alpha)$ 'yi hesap edebilmek için önce $I(\alpha)$ 'nın α 'ya göre türevini alalım.

$$\begin{aligned} \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} &= - \int_0^{\infty} \sin x e^{-\alpha x} dx = - \int_0^{\infty} (\text{Im } e^{ix}) e^{-\alpha x} dx = -\text{Im} \int_0^{\infty} e^{ix} e^{-\alpha x} dx \\ &= -\text{Im} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-i)x} dx = -\text{Im} \frac{1}{\alpha - i} = -\frac{1}{\alpha^2 + 1} \\ I(\alpha) &= - \int \frac{d\alpha}{\alpha^2 + 1} = C - \arctan \alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan \alpha \end{aligned}$$

İntegral sabiti C 'yi belirlemek için $I(\infty) = 0$ kullanırız; $0 = C - \arctan(\infty)$ ise $C = \pi/2$. Böylece,

$$I = I(0) = \frac{\pi}{2} - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$$

Cevap : 6 Önce özdeğer denklemini hatırlayalım: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ veya $(A - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = 0$ olarak ifade edelim. Bunun matris biçimi şöyle olur.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

a, b, c bileşenlerinin sıfırdan farklı olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 2) = 0 \rightarrow \lambda = 0, \pm\sqrt{2}$$

Önce $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ özdeğerine karşı gelen \vec{x}_1 özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = a_1 = \frac{-b_1}{\sqrt{2}}$$

Normalizasyon $|a_1|^2 + |b_1|^2 + |c_1|^2 = 1$. Birlikte $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/2 \end{pmatrix}$

Şimdi de $\lambda_2 = 0$ özdeğerine karşı gelen \vec{x}_2 özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = -a_2, \quad b_2 = 0$$

Normalizasyon $|a_2|^2 + |b_2|^2 + |c_2|^2 = 1$. Birlikte $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Son olarak $\lambda_3 = +\sqrt{2}$ özdeğerine karşı gelen \vec{x}_3 özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad c_3 = a_3 = \frac{b_3}{\sqrt{2}}$$

Normalizasyon $|a_3|^2 + |b_3|^2 + |c_3|^2 = 1$. Birlikte $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}$