

NO: İSİM SOYİSİM:

FİZ 431 KUANTUM HESAPLAMAYA GİRİŞ VİZE SINAVI
2021 - 2022 Bahar, PAÜ, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

Soru : 1 (10P) Bit nedir? Kubit nedir? Kısaca açıklayınız.

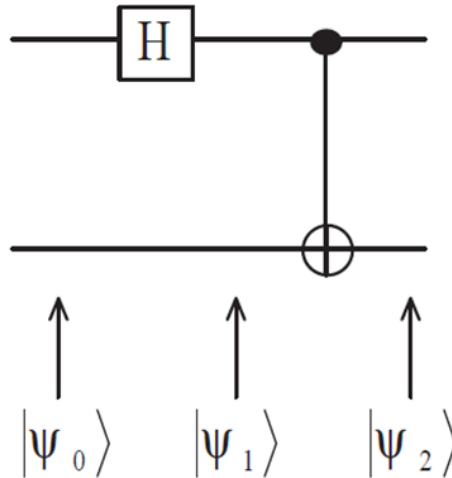
Soru : 2 (20P) $|a|^2 + |b|^2 = 1$ olmak üzere 1-kubitlik $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ girdisi **(a)** kuantum NOT kapısından **(b)** Hadamard kapısından **(c)** Z kapısından geçerse çıktı ne olur? Kuantum devrelerinde kapıların ortak özelliği nedir?

Soru : 3 (20P) Şekildeki basit kuantum devresinde girdi $|\psi_0\rangle = |11\rangle$ ise $|\psi_1\rangle = ?$ ve $|\psi_2\rangle = ?$

Soru : 4 (30P) Bir normal A operatörü için operatör fonksiyonu $f(A)$ şöyle tanımlanır. A nın özdeğeri a ve buna karşılık gelen özvektörü $|a\rangle$ olmak üzere $A = \sum_a a|a\rangle\langle a|$ şeklinde spektral ayrışım yapılır ve $f(A) = \sum_a f(a)|a\rangle\langle a|$ oluşturulur. Buna göre, $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Pauli X -matrisi olmak üzere $e^{i\theta X} = \cos \theta + i \sin \theta X$ olduğunu gösteriniz.

Soru : 5 (20P) d boyutlu bir V vektör uzayında izdüşüm operatörü $P = \sum_{i=1}^k |i\rangle\langle i|$ olarak tanımlanır ki burada $k < d$ ve $\{|i\rangle\}$ ortonormal bir baz kümesidir, yani $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$. $P^2 = P$ olduğunu gösteriniz. Bunu kullanarak P nin özdeğerlerini 0 ve 1 olarak elde ediniz.

BAŞARILAR ... 17.04.2022 15.30 Prof.Dr. Muzaffer ADAK Süre: 75 dk



C E V A P L A R

Cevap : 1 Bit: Klasik hesaplama ve klasik bilgide temel kavramdır. 0 ve 1 durumlarından her birine bir bit denir.

Kubit: "Kuantum bit" in kısaltılmasıdır. Kuantum hesaplama ve kuantum bilgide temel kavramdır. $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumlarından her birine bir kubit denir.

Cevap : 2 (a) Kuantum NOT kapısı $X : |\psi\rangle \rightarrow \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$

(b) Hadamard kapısı $H : |\psi\rangle \rightarrow \alpha \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}}|1\rangle$

(c) Z kapısı $Z : |\psi\rangle \rightarrow \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$

Hepsinin ortak özelliği üniter olmalarıdır.

Cevap : 3 Üst çizgi birinci kubite, alt çizgi ikinci kubite aittir. Buna göre H kapısı sadece birinci kubite etki ediyor.

$$|\psi_1\rangle = (H \otimes I)|\psi_0\rangle = (H \otimes I)|11\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle)$$

CNOT kapısı $|a, b\rangle \rightarrow |a, a \oplus b\rangle$ işlemini yapıyordu. O halde,

$$|\psi_2\rangle = CNOT|\psi_1\rangle = \frac{CNOT|01\rangle - CNOT|11\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 0 \oplus 1\rangle - |1, 1 \oplus 1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

Cevap : 4 $A \equiv i\theta X$ operatörü $A^\dagger A = AA^\dagger$ olduğu için normal operatördür. Fonksiyon $f(a) = e^a$ olarak verilmiş. Önce özdeğerleri bulalım; $|A - \mathbb{I}a| = 0$ ise $a_1 = i\theta$ ve $a_2 = -i\theta$. Normalize özvektörleri bulalım; $(A - \mathbb{I}a)|a\rangle = 0$ ise $|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $|a_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. O halde,

$$\begin{aligned} f(A) &= f(a_1)|a_1\rangle\langle a_1| + f(a_2)|a_2\rangle\langle a_2| \\ e^A &= e^{a_1} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} + e^{a_2} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \\ e^{i\theta X} &= e^{i\theta} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + e^{-i\theta} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cos \theta \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] + \frac{i}{2} \sin \theta \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \cos \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \cos \theta \mathbb{I} + i \sin \theta X \end{aligned}$$

Cevap : 5 $P^2 = (\sum_{i=1}^k |i\rangle\langle i|)(\sum_{j=1}^k |j\rangle\langle j|) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k |i\rangle\langle i|j\rangle\langle j| = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k |i\rangle\langle j|\delta_{ij} = \sum_{i=1}^k |i\rangle\langle i| = P$. Şimdi P için özdeğer denklemini yazalım: $P|v\rangle = p|v\rangle$. Buna göre, $P^2|v\rangle = PP|v\rangle = Pp|v\rangle = pP|v\rangle = pp|v\rangle = p^2|v\rangle$. Son iki sonucu taraf tarafa çıkaralım: $(P^2 - P)|v\rangle = (p^2 - p)|v\rangle$. Burada $P^2 = P$ olduğu için sol taraf sıfırdır. O halde, $p(p - 1) = 0$ denkleminin kökleri $p_1 = 0$ ve $p_2 = 1$ özdeğerlerini verir.