

ALİŞTIRMALAR 1.4.1 :

1. $A = \text{köş}(1, -1, 3, 4)$ ve $B = \text{köş}(2, -2, -3, 0)$ için

$$A^2, AB, AB - BA + A + B \text{ ve } A^2 - B^2$$

matrislerini hesaplayınız.

2. D , $n \times n$ lik köşegen matris ise herhangi bir $n \times n$ lik A matrisi için DA matrisinin A nın satırları ile D nin karşılık gelen köşegen elemanlarının çarpımı olduğunu ispatlayınız. Benzer sonucu AD matrisi için yazınız ve ispatlayınız.
3. $D^3 = 1$ eşitliğini sağlayan 4×4 lük D karmaşık köşegen matris sayısını bulunuz. Kaç tanesi skaler matristir.
4. E_{ij} , (i, j) -elemanı 1 diğer bütün elemanları 0 olan $n \times n$ lik matris olsun. $n \times n$ lik bir A matrisi E_{ij} matrisi ile değişmeli ise $A_{ii} = A_{jj}$ ve i . sütunun ve A matrisinin j . satırının bütün elemanlarının sıfır olduğunu ispatlayınız. Bu sonucu kullanarak $n \times n$ lik A matrisi $n \times n$ lik bütün matrisler ile değişmeli ise A matrisinin skaler matris olduğunu ispatlayınız.
5. A , $n \times n$ lik köşegen, elemanları sıfır olan üst üçgensel matris ise $A^n = 0$ olduğunu ispatlayınız. Benzer sonucu alt üçgensel matrisler için yazınız ve ispatlayınız.
6. Aşağıdaki matrislerin simetrik veya ters-simetrik olup olmadığını belirleyiniz:

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -7 \\ 3 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ -3 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

7.
$$\begin{bmatrix} x+y-1 & -1 & 1 \\ 1 & y+z-2 & -1 \\ -1 & 1 & z+x-3 \end{bmatrix}$$
 matrisi ters-simetrik ise x, y ve z nedir?

8. Gerçel veya karmaşık ters-simetrik matrislerin köşegen elemanlarının sıfır olması gerektiğini ispatlayınız. $\mathbb{Z}_2$ deki ters-simetrik matrisler için bu doğru mudur?
9. Herhangi bir A kare matrisi için $A + A^T$, AA^T ve $A^T A$ matrislerinin simetrik ve $A - A^T$ matrisinin ters-simetrik olduğunu gösteriniz.
10. S simetrik matris K ters-simetrik matris olmak üzere gerçel veya karmaşık A kare matrisinin $A = S + K$ biçiminde tek türlü yazıldığını ispatlayınız. Bu sonucu

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisine uygulayınız.

11. Simetrik matrisler kümesinin toplama ve skaler çarpma işlemlerine göre kapalı fakat matris çarpımına göre kapalı olmadığını gösteriniz.
12. $\mathbb{Z}_2$ de iki tane baş elemanı olan 2×3 lük bütün basamaklı matrisleri yazınız. Kaç tanesi satırca indirgenmiştir?
13. $\mathbb{Z}_3$ de 2×2 lik satırca indirgenmiş bütün matrisleri yazınız.
14. $n \times n$ lik satırca indirgenmiş bir matrisin n tane baş elemanı varsa bu matrisin I_n birim matrisi olması gerektiğini gösteriniz.