

NO: İSİM SOYİSİM:

FİZ 343 KUANTUM FİZİĞİNE GİRİŞ FİNAL SINAVI
2021 - 2022 Bahar, Fizik Bölümü, Pamukkale Üniversitesi, Denizli

Soru : 1 (25P) m kütleli ve E enerjili bir parçacık aşağıda tanımlanan potansiyel enerji kuyusu içindedir.

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \text{ ve } L < x \text{ için} \\ 0 & 0 \leq x < a \text{ için} \\ V_0 & a \leq x \leq L \text{ için} \end{cases}$$

Burada V_0, a, L pozitif sabitlerdir. $E < V_0$ durumu için bir boyutlu zamandan bağımsız Schrödinger denklemini her bölgede çözünüz. Sınır koşullarını ve verdikleri denklemleri açıkça yazınız. (Sınır koşulu denklemlerini çözmezsiniz.)

Soru : 2 (25P) Aşağıdaki matrisin özdeğerlerini ve normalize özvektörlerini bulunuz.

$$Y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Soru : 3 (25P) ω açısal frekanslı ve m kütleli bir boyutlu harmonik salıncı için şunları biliyoruz.

$$\hat{H}|n\rangle = (n + 1/2)\hbar\omega|n\rangle, \quad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n - 1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n + 1}|n + 1\rangle.$$

İndirme ve kaldırma operatörleri konum uzayında şöyle tanımlanır.

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}x_0} \left(x + x_0^2 \frac{d}{dx} \right) \quad \text{ve} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}x_0} \left(x - x_0^2 \frac{d}{dx} \right) \quad \text{burada} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Taban durumu ve birinci uyarılmış durum normalize dalga fonksiyonlarını hesap ediniz. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$.

Soru : 4 (25P) Bir hidrojen atomunun durumu aşağıdaki vektörle verilmiştir.

$$|\psi\rangle = (2 - i)|2, 1, 0\rangle + i|2, 1, -1\rangle + |2, 1, 1\rangle - i|2, 0, 0\rangle - |1, 0, 0\rangle$$

Burada $|n, \ell, m\rangle \equiv |n\ell m\rangle$ ketleri $\{\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z\}$ operatörlerinin ortak ortonormal özketleridir. (a) $|\psi\rangle$ 'yi normalize ediniz. (b) L_z ve L^2 ölçülürse, hangi olasılıklarla hangi değerler ölçülebilir? (c) $\langle \hat{L}_z \rangle$ ve $\langle \hat{L}^2 \rangle$ hesap ediniz.

BAŞARILAR ... 08.06.2022 Saat: 14.00-15.15 Prof.Dr. Muzaffer ADAK

C E V A P L A R

Cevap : 1 Önce bir boyutlu zamandan bağımsız Schrödinger denklemini açıkça yazalım.

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x) \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\psi(x) = 0$$

Öncelikle $x < 0$ ve $x > L$ bölgelerinde $V = \infty$ olduğundan dolayı $\psi = 0$ olur. Buna göre $0 \leq x \leq L$ aralığını iki bölgeye ayırarak devam edelim.

- Birinci bölgede, $0 \leq x \leq a$, $V = 0$ ve $\psi_1(x) \neq 0$ olur.

$$\psi_1'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \psi_1(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

burada $k^2 = 2mE/\hbar^2 > 0$.

- İkinci bölgede, $a \leq x \leq L$, $V = V_0$ ve $\psi_2(x) \neq 0$ olur.

$$\psi_2'' - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\psi_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \psi_2(x) = C_1 \sinh(qx) + D_1 \cosh(qx)$$

burada $q^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2 > 0$.

Son olarak sınır koşullarını yazalım.

1. $x = 0$ 'da $\psi_1 = 0$ koşulu $B = 0$ verir. Böylece, $\psi_1(x) = A \sin(kx)$ olur.
2. $x = L$ 'de $\psi_2 = 0$ koşulu $C_1 \sinh(qL) + D_1 \cosh(qL) = 0$ verir.

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= \frac{C_1}{\cosh(qL)} [\sinh(qx) \cosh(qL) - \sinh(qL) \cosh(qx)] \\ &= C \sinh[q(x - L)] \end{aligned}$$

Son adımda keyfi sabit C_1 'i yeni keyfi sabit C cinsinden yazdık, $C_1 = C \cosh(qL)$.

3. $x = a$ 'da $\psi_1 = \psi_2$ koşulu şu denkleme verir.

$$A \sin(ka) = C \sinh[q(a - L)]$$

4. $x = a$ 'da $\psi_1' = \psi_2'$ koşulu şu denkleme verir.

$$Ak \cos(ka) = Cq \cosh[q(a - L)]$$

Sonuçta, üç tane bilinmeyen $\{E, A, C\}$ ama iki tane denklem var. Sistemi kapatmak için son denklem normalizasyondan gelir.

$$\int_0^a |\psi_1(x)|^2 dx + \int_a^L |\psi_2(x)|^2 dx = 1$$

Cevap : 2 Özdeğer denklemini yazalım.

$$Y|y\rangle = \lambda|y\rangle \implies \begin{pmatrix} -\lambda & i\hbar/2 \\ -i\hbar/2 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

Sıfırdan farklı $|y\rangle$ için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & i\hbar/2 \\ -i\hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies (\lambda^2 - \hbar^2/4 = 0 \implies \lambda_1 = +\hbar/2, \quad \lambda_2 = -\hbar/2$$

Y 'nin özdeğerleri $+\hbar/2$ ve $-\hbar/2$ oldu.

Önce $\lambda_1 = +\hbar/2$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü, $|y_1\rangle$, bulalım.

$$\begin{pmatrix} -\hbar/2 & i\hbar/2 \\ -i\hbar/2 & -\hbar/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = 0 \implies b_1 = -ia_1$$

$$\text{Normalizasyon: } |a_1|^2 + |b_1|^2 = 1 \implies a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b_1 = \frac{-i}{\sqrt{2}}$$

O halde, normalize $|y_1\rangle$ şudur.

$$|y_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Benzer adımlarla $\lambda_2 = -\hbar/2$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü, $|y_2\rangle$, bulalım.

$$\begin{pmatrix} \hbar/2 & i\hbar/2 \\ -i\hbar/2 & \hbar/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \implies b_2 = ia_2$$

$$\text{Normalizasyon: } |a_2|^2 + |b_2|^2 = 1 \implies a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

O halde, normalize $|y_2\rangle$ şudur.

$$|y_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Cevap : 3 Alçaltma operatörünü taban duruma uygulayalım.

$$\hat{a}|0\rangle = \sqrt{0}|-1\rangle = 0 \implies \frac{1}{\sqrt{2}x_0} \left(x + x_0^2 \frac{d}{dx} \right) \psi_0(x) = 0$$

Burada $|0\rangle$ taban durumu keti ve $\psi_0(x)$ taban durumu dalga fonksiyonudur. Bu da bize birinci mertebeden lineer bir diferansiyel verir.

$$x\psi_0(x) + x_0^2 \frac{d\psi_0(x)}{dx} = 0 \implies \int \frac{d\psi_0}{\psi_0} = - \int \frac{x}{x_0^2} dx \implies \psi_0(x) = N e^{-x^2/(2x_0^2)}$$

Normalizasyon ile integral sabiti N belirlenir.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = 1 \implies N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/x_0^2} dx = 1 \implies N = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}x_0}}$$

Böylece, taban durumu normalize dalga fonksiyonu yazılabilir.

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}x_0}} e^{-x^2/(2x_0^2)}$$

Birinci uyarılmış durum dalga fonksiyonu için buna yükseltme operatörünü uygulamak yeterli olur.

$$\begin{aligned} |1\rangle = \hat{a}^\dagger|0\rangle &\implies \psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2x_0}} \left(x - x_0^2 \frac{d}{dx} \right) \psi_0(x) \\ \psi_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2x_0}} x \psi_0(x) - \frac{x_0}{\sqrt{2}} \frac{d\psi_0(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2x_0}} x \psi_0(x) - \frac{x_0}{\sqrt{2}} \left(\frac{-x}{x_0^2} \right) \psi_0(x) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{x_0} x \psi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}x_0^3}} x e^{-x^2/(2x_0^2)} \end{aligned}$$

Cevap : 4 (a) Durum vektörünün normunu hesap edelim.

$$\sqrt{\langle \psi | \psi \rangle} = (|2 - i|^2 + |i|^2 + |1|^2 + |-i|^2 + |-1|^2)^{1/2} = (5 + 1 + 1 + 1 + 1)^{1/2} = 3$$

O halde, normalize vektörü yazabiliriz.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{3} [(2 - i)|2, 1, 0\rangle + i|2, 1, -1\rangle + |2, 1, 1\rangle - i|2, 0, 0\rangle - |1, 0, 0\rangle]$$

(b) $\hat{L}_z|n\ell m\rangle = m\hbar|n\ell m\rangle$ yardımıyla şunları söyleyebiliriz.

$$\begin{aligned} \left| \frac{2-i}{3} \right|^2 + \left| \frac{-i}{3} \right|^2 + \left| \frac{-1}{3} \right|^2 &= \frac{7}{9} = \%78 \quad \text{olasılıkla } m = 0, \text{ yani } L_z = 0, \text{ ölçülür.} \\ \left| \frac{i}{3} \right|^2 &= \frac{1}{9} = \%11 \quad \text{olasılıkla } m = -1, \text{ yani } L_z = -\hbar, \text{ ölçülür.} \\ \left| \frac{1}{3} \right|^2 &= \frac{1}{9} = \%11 \quad \text{olasılıkla } m = +1, \text{ yani } L_z = +\hbar, \text{ ölçülür.} \end{aligned}$$

Benzer olarak, $\hat{L}^2|n\ell m\rangle = \ell(\ell + 1)\hbar^2|n\ell m\rangle$ yardımıyla şunları söyleyebiliriz.

$$\begin{aligned} \left| \frac{-i}{3} \right|^2 + \left| \frac{-1}{3} \right|^2 &= \frac{2}{9} = \%22 \quad \text{olasılıkla } \ell = 0, \text{ yani } L^2 = 0, \text{ ölçülür.} \\ \left| \frac{2-i}{3} \right|^2 + \left| \frac{i}{3} \right|^2 + \left| \frac{1}{3} \right|^2 &= \frac{7}{9} = \%78 \quad \text{olasılıkla } \ell = 1, \text{ yani } L^2 = 2\hbar^2, \text{ ölçülür.} \end{aligned}$$

(c) Bir operatörün beklenen değerini $\langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle = \sum_i P_i \mathcal{O}_i$ bağıntısı yardımıyla hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_z \rangle &= \left(\frac{7}{9} \right) (0) + \left(\frac{1}{9} \right) (-\hbar) + \left(\frac{1}{9} \right) (\hbar) = 0 \\ \langle \hat{L}^2 \rangle &= \left(\frac{2}{9} \right) (0) + \left(\frac{7}{9} \right) (2\hbar^2) = \frac{14\hbar^2}{9} \end{aligned}$$