

DERS 1: TEMEL KAVRAMLAR

Dersin Amacı: Diferansiyel denklemlerin doğasını kavramak, onları tanımlamak ve sınıflandırmak, adi diferansiyel denklemleri lineer ve lineer olmama durumuna göre sınıflandırmak, bir adi diferansiyel denklemin çözümünü tanımlamak ve çözümlerin açık ve kapalı formlarını anlamak.

Gerekli Önbilgiler: Bu ve bundan sonraki derslerimizde Genel Matematik derslerinde görmüş olduğunuz aşağıda belirtilen kavramlara ihtiyaç duyulacaktır:

Küme, aralık, bölge, fonksiyon (tek değişkenli, çok değişkenli), bağımlı-bağımsız değişken/değişkenler, fonksiyonun tanım ve değer kümeleri, açık ve kapalı fonksiyon, elementer fonksiyonlar (üstel, logaritmik, trigonometrik, ters trigonometrik, hiperbolik) ve bunların limitleri, sürekliliği, türevleri (adi/kısmi), integralleri

Birbiri ile ilişkili değişen niceliklerin oluşturduğu bir dünyada yaşıyoruz. Örneğin, düşen bir cismin hızı yola göre, bir kirişin eğilmesi üzerine binen yükün ağırlığıyla, bir dairenin alanı yarıçapıyla, fırlatılan bir cismin (mermi, roket, vb.) izlediği yol fırlatma hızı ve açısıyla değişir. Matematik dilinde, değişen bu nicelikler **değişken** ve bir değişkenin diğer bir değişkene göre değişim oranı da **türev** olarak adlandırılır. Bu değişkenler ve türevleri arasındaki bir ilişkiyi belirten denklemlere de diferansiyel denklemler adı verilir. Hem doğa bilimleri hem de sosyal bilimlerdeki çoğu problemler bu şekildeki diferansiyel denklemlerle temsil edilirler. Bizim burada bilmek istediğimiz değişkenlerin ve onların türevlerinin nasıl ilişkilendirildiğinden ziyade değişkenlerin kendilerinin nasıl ilişkilendirildiğidir. Örneğin, bir parçacığın değişken konumu ve konumunun zamana göre değişim oranından hareketle, parçacığın konumunun zamanla nasıl ilişkili olduğu tanımlanırsa, herhangi bir t anında parçacık neredeydi, nerede ve nerede olacak sorularını cevaplayabiliriz. Dolayısıyla, bir evrensel kanun, değişkenler ve onların türevleri aracılığıyla ifade edildiğinde diferansiyel denklemler elde edilmektedir. Diferansiyel denklemler dersi ise değişkenler ve onların türevleri hakkında bize verilen bilgilerden hareketle bu değişkenler arasında bir ilişki tanımlama problemiyle alakadar olur.

Genel Matematik derslerinde elementer fonksiyonların türevlerini bulmak için çeşitli metotlar çalışılmıştır. $y = \phi(x)$ gibi bir fonksiyonun türevi (dy/dx) uygun bir yöntemle bulunan $\phi'(x)$ gibi bir başka fonksiyondur. Örneğin, $y = \ln x$, $x > 0$, in ardışık türevleri:

$$y' = \frac{1}{x}, \quad y'' = -\frac{1}{x^2}, \quad y''' = \frac{2}{x^3}, \quad vb. \quad (a)$$

Benzer şekilde, eğer $z = x^3 - 3xy + 2y^2$, $-\infty < x, y < \infty$, ise bunun x ve y ye göre kısmi türevleri:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 4y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4, \quad vb. \quad (b)$$

Yukarıda (a) ve (b) deki gibi, değişkenler ve onların türevlerini içeren denklemlere diferansiyel denklemler denir.

Şimdi, kabul edelim ki bir arkadaşınız size (a) da ki ilk denklemi verdi. Sizin de bu denklemin nasıl elde edildiğine dair bir bilginiz yok. Size “Bu denklemde y sembolü ile belirtilen fonksiyon nedir?” diye sordu. İşte bu durumda siz, bu dersteki basit problemlerden biri ile karşı karşıyasınız:

Böyle bir denklemi, bilinmeyen fonksiyon olan $y = \phi(x)$ i bulmak için nasıl çözersiniz?

Daha ileriye gitmeden önce diferansiyel denklem tanımını daha uygun şekilde burada verelim.

Tanım 1.1: Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin, bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denklem “**diferansiyel denklem**” olarak adlandırılır.

Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

i) Türe Göre Sınıflandırma:

Yukarıda (a) da verilen denklemler sadece bir bağımsız değişken (x) içermekte iken (b) de verilen denklemler x ve y gibi iki bağımsız değişken içermektedir.

Eğer bir denklem, bir veya daha fazla bağımlı değişkenin sadece bir bağımsız değişkene göre adi türevlerini içeriyorsa bu tür denklemlere **adi diferansiyel denklemler** denir. Örneğin,

$$\frac{dy}{dx} + 3y = e^x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 4y = 0, \quad \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} = 2u + v$$

şeklindeki denklemler adi diferansiyel denklemlerdir.

Eğer bir denklem, bir veya daha fazla bağımlı değişkenin iki veya daha fazla bağımsız değişkene göre kısmi türevlerini içeriyorsa bu tür denklemlere **kısmi diferansiyel denklemler** denir. Örneğin,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

şeklindeki denklemler kısmi diferansiyel denklemlerdir.

Bu derste, sadece adi diferansiyel denklemlere odaklanacağımızdan dolayı bundan sonra “**adi**” kelimesini de ihmal edeceğiz. Kısmi diferansiyel denklemler konusu “Uygulamalı Matematik” adı altında alacağınız derste detaylı olarak işlenecektir.

NOTASYON. Genellikle bağımsız değişkenler için x ve t , bilinmeyen fonksiyonlar için ise y , u , v veya w gibi harfleri; türev için ise üssü (') veya Leibniz $\left(\frac{d}{dx}\right)$ gösterimlerinden birini kullanacağız.

Örneğin; y bilinmeyen bir fonksiyon ve x bağımsız değişken olduğunda, birinci türev için y' veya $\frac{dy}{dx}$ ve ikinci türev için ise y'' veya $\frac{d^2y}{dx^2}$ gösterimlerinden biri kullanılacaktır. Bunların yanı sıra fizik ve mühendislikte Newton'un nokta gösterimi de bazen zamana (t) göre türevi belirtmek için

kullanılmaktadır. Bu durumda $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = 0$ şeklindeki denklem $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$ şeklinde karşımıza çıkabilir.

ii) **Mertebeye Göre Sınıflandırma:**

Tanım 1.2: Bir diferansiyel denklemin mertebesi (basamağı), n denklemde bulunan n 'inci türevi göstermek üzere, en büyük n tamsayıdır.

Örneğin, $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 2y = e^x$ denklemi 2. Mertebeden bir diferansiyel denklemdir. Birinci mertebeden diferansiyel denklemler bazen $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ şeklinde "**diferansiyel form**" dediğimiz formda yazılabilirler. Örneğin, $(y-x)dx + 4xdy = 0$ denkleminde y bağımlı değişkeni gösterebiliriz. Dolayısıyla $y' = dy/dx$ dir. Eldeki denklemin her iki yanını dx e bölünürse, $4xy' + y = x$ şeklinde alternatif form elde edilir.

Bağımsız değişken x ve bilinmeyen y olmak üzere, n inci mertebeden bir diferansiyel denklemin en genel biçimi

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

şeklinde yazılır. Eğer bu denklem

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.2)$$

şeklinde ifade edilirse, denkleme **normal biçimindedir** (formundadır) denir. Dolayısıyla, amacımıza uygunsuzsa, 1. ve 2. mertebeden diferansiyel denklemleri

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{ve} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

şeklindeki normal formlarında kullanabiliriz. Örneğin, $4xy' + y = x$ şeklindeki 1. mertebeden denklemin normal formu $y' = (x-y)/4x$ ve $y'' - y' + 6y = 0$ şeklindeki 2. mertebeden denklemin normal formu $y'' = y' - 6y$ olur.

iii) **Lineerliğine Göre Sınıflandırma:**

Tanım 1.3: Eğer bir diferansiyel denklem bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerine göre lineer ise denkleme lineerdir denir.

Daha açık olarak, eğer (1.1) denklemindeki F fonksiyonu $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ için lineer ise (1.1) denklemini lineerdir denir. Bunun anlamı, n inci mertebeden (1.1) denklemini

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (1.3)$$

formunda ise lineer denklem olarak adlandırılır. Bu denklemin iki önemli hali, lineer 1. mertebeden ($n = 1$ olması durumu) ve lineer 2. mertebeden ($n = 2$ olması durumu) diferansiyel denklemler:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad \text{ve} \quad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (1.4)$$

şeklinindedir.

Denklem (1.3) e bakıldığında bir lineer diferansiyel denklemin iki önemli karakteristik özelliği:

- Bağımlı değişken y ve bunun türevleri $y', y'', \dots, y^{(n)}$ birinci dereceden, yani y de dahil her bir terimin kuvveti 1 dir.
- $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ terimlerinin katsayıları olan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ en fazla bağımsız değişken olan x e bağlıdır (sabit olabilirler!).

Birinci, 2. ve 3. mertebeden lineer diferansiyel denklemler için bazı örnekler sırasıyla:

$$(y-x)dx + 4x dy = 0, \quad y'' - 2y' + y = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x.$$

Buradaki ilk örneğin y değişkeninde lineer olduğu bu denklemin $4xy' + y = x$ şeklinde alternatif formda yazılmasıyla kolayca görülebilir. Eğer bir denklem lineer değilse, denkleme **lineer olmayan** denklem denir. Bağımlı değişkenin lineer olmayan fonksiyonları veya türevleri, $\sin y$ veya $e^{y'}$ gibi, lineer bir denklemde gözükmez. Örneğin,

$$(1-y)y' + 3y = e^x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0, \quad \frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0,$$

denklemleri sırasıyla 1., 2. ve 4. mertebeden lineer olmayan denklemlerdir.

Bazı Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem Örnekleri

$\frac{dy}{dx} + y = 0$	1. mertebeden lineer diferansiyel denklem
$y' = e^x$	1. mertebeden lineer diferansiyel denklem
$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{1-x^2}$	2. mertebeden lineer diferansiyel denklem
$xy'' = 2y$	2. mertebeden lineer diferansiyel denklem
$x dy + y dx = 0$	1. mertebeden lineer diferansiyel denklem
$y'' + 3(y')^3 + 5x = 3$	2. mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklem
$(y''')^2 + (y'')^4 + y' = x$	3. mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklem
$xy^{(4)} + 2y'' + (xy')^5 = x^2$	4. mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklem

Uyarı: Biz bu derste genelde iki değişken içeren diferansiyel denklemlerle ilgileneceğiz. Bu nedenle sadece birinci mertebeden diferansiyel denklemlere has bir özellik olarak, eğer açık olarak belirtilmemişse bağımlı ve bağımsız değişken keyfi olarak seçilebilir.

Örneğin, $(x-1)dy + y^2 dx = 0$ şeklindeki 1. mertebeden diferansiyel denklemi ele alalım. Eğer bu denklemde y bağımlı değişken olarak düşünülürse denklemin lineer olmadığı $(x-1)\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$ formuna bakılarak açık olarak görülmektedir. Tersine, x bağımlı değişken olarak düşünülürse, verilen denklemi $y^2 \frac{dx}{dy} + x = 1$ şeklinde alternatif formda yazdığımızda ve bunu (1.4) denkleminin x yerine y ve y yerine x yazılmış haliyle karşılaştırdığımızda lineer bir denklem olduğu anlaşılmaktadır. Bu gözlem bazen 1. mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümleri çalışılırken kolaylık sağlayabilir.

Bir Diferansiyel Denklemin Çözümü

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \tag{1.5}$$

şeklindeki cebirsel denklemi ele alalım. $x = 3$ bu denklemin bir çözümüdür dediğimizde, $x = 3$ bu denklemi sağlar demek isteriz. Yani, verilen cebirsel denklemde x yerine 3 yazdığımızda eşitlik sağlanır. Benzer şekilde,

$$y = \phi(x) = \ln x + x, \quad x > 0, \tag{1.6}$$

fonksiyonu

$$x^2 y'' + 2xy' + y = \ln x + 3x + 1, \quad x > 0 \tag{1.7}$$

diferansiyel denkleminin bir çözümüdür dediğimizde, (1.6) nın (1.7) yi sağladığını ima ederiz. Yani, (1.6) daki y yi ve bunun birinci (y') ve ikinci (y'') türevlerini (1.7) de yerine yazdığımızda eşitliğin korunduğunu görürüz. (Bunu gösteriniz!)

Tanım 1.4: Bir I aralığında tanımlı, bu aralıkta en azından n inci mertebeden sürekli türevlere sahip ve n inci mertebeden bir diferansiyel denklemde yerine konduğunda denklemi özdeş olarak sağlayan herhangi bir ϕ fonksiyonuna bu aralıkta denklemin bir çözümü denir.

Bu tanımı matematiksel sembollerle açıklayacak olursak:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklindeki n inci mertebeden diferansiyel denklemi ele alalım. Her $x \in I$ için

$$F[x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \dots, \phi^{(n)}(x)] = 0$$

olacak şekilde n defa türevli bir $\phi(x)$ fonksiyonu verilen diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. Bu durumda $\phi(x)$, I aralığında verilen diferansiyel denklemi sağlar deriz. Bazen bir çözümü $y(x)$ sembolüyle göstermek daha uygun olacaktır.

Tanım Aralığı: Diferansiyel denklemler genellikle bir aralık üzerinde incelenir. Tanım 1.4 te belirtilen I aralığı: tanım aralığı, varlık aralığı veya geçerlilik aralığı olarak farklı şekilde adlandırılabilir ve (a, b) şeklinde bir açık aralık, $[a, b]$ şeklinde bir kapalı aralık, (a, ∞) şeklinde bir sonsuz aralık, vb. olabilir.

Örnek 1.5: Bir çözümün doğruluğunun sağlamasını yapma

$$y = x^2, \quad -\infty < x < \infty, \quad (a)$$

fonksiyonunun

$$(y'')^3 + (y')^2 - y = 3x^2 + 8 \quad (b)$$

diferansiyel denkleminin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (a) dan, $y' = 2x$ ve $y'' = 2$ dir. Bunlar (b) de y, y' ve y'' için yerine yazılırsa

$$8 + 4x^2 - x^2 = 3x^2 + 8 \quad (c)$$

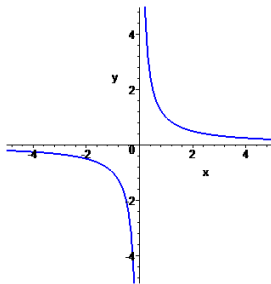
elde edilir. Buradan da her $x \in (-\infty, \infty)$ için eşitliğin her iki yanının aynı olduğu görülür.

Örnek 1.6: $y = \ln x + c$, $x > 0$, fonksiyonunun $y' = \frac{1}{x}$ denkleminin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

Örnek 1.7: $y = \frac{x^4}{16}$, $-\infty < x < \infty$, fonksiyonunun $\frac{dy}{dx} - x y^{1/2} = 0$ denkleminin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

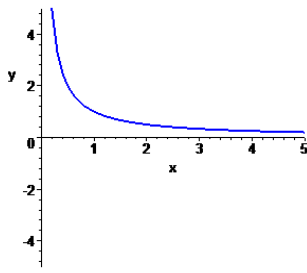
Çözüm Eğrisi: Bir diferansiyel denklemin bir $\phi(x)$ çözümünün grafiği çözüm eğrisi olarak adlandırılır. $\phi(x)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğundan, tanım aralığı I da süreklidir. Dolayısıyla $\phi(x)$ fonksiyonunun grafiği ile $\phi(x)$ çözümünün arasında bir fark olabilir. Diğer bir deyişle, $\phi(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi ile $\phi(x)$ çözümünün tanım aralığı I aynı olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnek bu durumu açıklamaktadır.

Örnek 1.8: Fonksiyon-Çözüm



Fonksiyon $y = 1/x$, $x \neq 0$

$y = 1/x$ i sadece fonksiyon olarak düşünürsek tanım kümesi $x = 0$ haricindeki tüm reel sayılardır ve grafiği yanda verilmiştir. Bu fonksiyon $x = 0$ noktasında süreksiz ve diferansiyellenebilir değildir.



Çözüm $y = 1/x$, $x \neq 0$

$y = 1/x$ aynı zamanda $xy' + y = 0$ şeklindeki 1. mertebeden lineer diferansiyel denklemin bir çözümüdür. (Gösteriniz!) Fakat, $y = 1/x$ bu denklemin bir çözümüdür dediğimizde, bir I aralığında tanımlı, bu aralıkta diferansiyellenebilir ve denklemini sağlar demek isteriz. Diğer bir deyişle, $y = 1/x$, $x = 0$ ı içermeyen herhangi bir I aralığında $\left((-5, -1), \left(\frac{1}{3}, 8 \right), (-\infty, 0), (0, \infty), \text{vb.} \right)$ denklemin bir çözümüdür.

Bunların içerisinde en geniş kapsamlısını I aralığı olarak seçmek anlamlı olacağından $(-\infty, 0)$ veya $(0, \infty)$ bu I aralığı olarak alınabilir. Yandaki şekilde $(0, \infty)$ aralığındaki çözüm eğrisi gösterilmektedir.

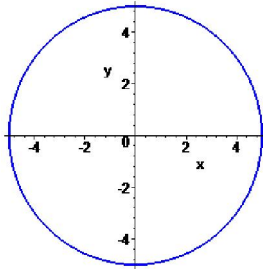
Açık ve Kapalı Çözümler: Genel matematik derslerinde “açık fonksiyon veya kısaca fonksiyon” ve “kapalı fonksiyon” kavramlarını görmüştük. Bağımlı değişkenin sadece bağımsız değişken ve sabitler cinsinden ifade edilmiş olduğu bir çözüme **açık çözüm** denir. $y = \phi(x)$ şeklinde bir açık formülle verilen bir çözümü düşünelim. Bunun üzerinde farklı işlemler yapabilir ve standart kurallar kullanarak diferansiyelleyebiliriz. Örnek 1.5, 1.6 ve 1.7 de verilen fonksiyonlar, ele alınan diferansiyel denklemlerin açık çözümleridir. Diferansiyel denklemleri çözerken kullanacağımız yöntemler her zaman bir açık çözüm vermeyebilir. Bu durum özellikle 1. mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemler için söz konusudur. Bu nedenle sıklıkla bir $\phi(x)$ çözümünü kapalı olarak tanımlayan $G(x, y) = 0$ gibi bir ifadeyle yetinmek zorunda kalacağız.

Tanım 1.9: $G(x, y) = 0$ bağıntısını ve (1.1) denklemini sağlayan en azından bir $\phi(x)$ fonksiyonu varsa, $G(x, y) = 0$ bağıntısına bir I aralığında (1.1) denkleminin bir **kapalı çözümü** denir.

Bir $G(x, y) = 0$ bağıntısının hangi şartlar altında diferansiyellenebilir bir $\phi(x)$ fonksiyonu tanımlaması gerektiğini araştırmak bu dersin kapsamı dışındadır. Dolayısıyla, verilen bir diferansiyel denklem için uygun bir çözüm metodu kullanarak $G(x, y) = 0$ şeklinde bir bağıntı elde ettiğimizde, bu bağıntıyı ve diferansiyel denklemini bir I aralığında sağlayan en az bir $y = \phi(x)$ fonksiyonunun varlığını kabul edeceğiz.

$G(x, y) = 0$ şeklinde tanımlı bir kapalı fonksiyonun verilen bir diferansiyel denklemin çözümü olup olmadığını test etmek, $y = f(x)$ şeklinde açık olarak verilmiş bir fonksiyonu test etmekten daha karmaşık bir prosedür gerektirir. Çünkü $G(x, y) = 0$ denklemini y için çözerek x ler cinsinden yazmak ve Tanım 1.9 daki $\phi(x)$ fonksiyonunu elde etmek genelde çok zordur veya imkansızdır. Ancak, bir kapalı fonksiyonun bir I aralığında verilen bir diferansiyel denklemini sağladığı gösterilebildiğinde, $G(x, y) = 0$ bağıntısı verilen diferansiyel denklemin bir kapalı çözümü olarak adlandırılır. Eğer $G(x, y) = 0$ şeklindeki kapalı çözüm yeterince basit ise bunu y için çözerek bir veya daha fazla açık çözüm elde edebiliriz. Aşağıdaki örnek bu durumu açıklamaktadır.

Örnek 1.10: Bir kapalı çözümün doğruluğunun sağlamasını yapma



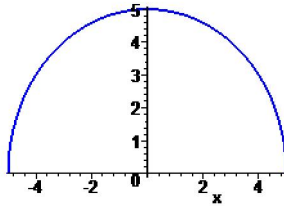
a) Kapalı çözüm
 $x^2 + y^2 = 25$

$x^2 + y^2 - 25 = 0$ ilişkisi $(-5, 5)$ aralığında $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ diferansiyel denkleminin bir kapalı çözümüdür. Gösteriniz.

Çözüm: Kapalı fonksiyonların türevlerinden hareketle

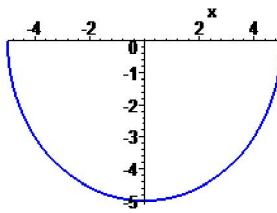
$$x^2 + y^2 - 25 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 25) = \frac{d}{dx}(0) \Rightarrow 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

olduğu görülür.



b) Açık çözüm

$$y_1 = \sqrt{25 - x^2}, \quad -5 < x < 5$$



c) Açık çözüm

$$y_2 = -\sqrt{25 - x^2}, \quad -5 < x < 5$$

$x^2 + y^2 - 25 = 0$ bağıntısı y için çözümlerse $y = \mp \sqrt{25 - x^2}$ bulunur. Bu durumda $y = \phi_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ ve $y = \phi_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ fonksiyonları verilen bağıntıyı sağlarlar (yani: $x^2 + \phi_1^2 - 25 = 0$ ve $x^2 + \phi_2^2 - 25 = 0$) ve $(-5, 5)$ aralığında tanımlı kapalı çözümlerdir.

Yandaki şekillerde verilen çözüm eğrileri (a) şeklinde verilen kapalı çözümün grafiğinin üst ve alt yarımlardaki parçalarıdır.

Uyarı: c herhangi bir sabit olmak üzere $x^2 + y^2 - c = 0$ formundaki herhangi bir bağıntı verilen diferansiyel denklemin sağlar. Buna rağmen bağıntının her zaman reel sayı sisteminde anlamlı olması gerekmektedir. Dolayısıyla, örneğin $c = -25$ alındığında elde edilen $x^2 + y^2 + 25 = 0$ bağıntısının verilen diferansiyel denklemin bir çözümü olduğunu söyleyemeyiz. Neden?

Örnek 1.11:

$$G(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (a)$$

ifadesinin

$$F(x, y, y') = (y^2 - x)y' - y + x^2 = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (b)$$

denkleminin bir kapalı çözümü olup olmadığını test ediniz.

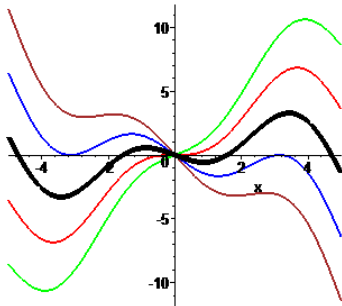
Çözüm: (a) ifadesinin diferansiyelini alırsak $3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0$ olur. Bu düzenlenirse

$$(y^2 - x)y' - y + x^2 = 0 \text{ olduğu görülür.}$$

Bir önceki örneğin aksine burada (a) ifadesini y için çözerek $\phi(x)$ fonksiyonunu tanımlamak kolay değildir. Bu örnek için böyle bir fonksiyon sonsuz değişik formda seçilebilir. Ancak seçilecek olan bu fonksiyon tüm x ler için verilen denklemin bir çözümü olmayabilir.

Bir Diferansiyel Denklemin Çözümler Ailesi (Çözüm Eğrileri Ailesi):

Bazı kaynaklarda verilen bir diferansiyel denklemin bir $\phi(x)$ çözümü denklemin bir **integrali** ve bu çözümün grafiği de **integral eğrisi** olarak anılır. Genel Matematik derslerinden hatırlanacağı üzere, bir belirsiz integral hesaplanırken tek bir integral sabiti (c) kullanırız. Benzer şekilde, $F(x, y, y') = 0$ gibi 1. mertebeden bir adi diferansiyel denklem çözdüğümüzde, genelde tek bir keyfi sabit veya parametre (c) içeren bir çözüm elde ederiz. Bu şekilde keyfi bir sabit içeren çözüm $G(x, y, c) = 0$ şeklinde bir çözümler ailesi olarak simgelenir ve **bir-parametrelili çözümler ailesi** olarak adlandırılır. $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ şeklinde n . mertebeden bir diferansiyel denklem çözüldüğünde $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ şeklinde n -**parametrelili çözümler ailesi** bulunmaya çalışılır. Bunun anlamı, bu parametre veya parametrelerin sınırsız sayıda seçimine karşılık olarak tek bir diferansiyel denklem sonsuz sayıda çözüme sahip olabilir. Bir diferansiyel denklemin keyfi parametreler içermeyen bir çözümüne bu denklemin bir **özel çözümü** denir.



$$y = cx - x \cos x$$

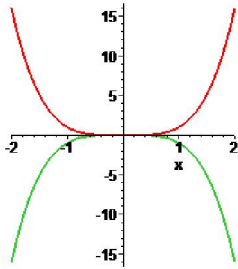
Örneğin, $y = cx - x \cos x$ şeklindeki bir-parametrelili aile $xy' - y = x^2 \sin x$ şeklindeki 1. mertebeden lineer diferansiyel denklemin $(-\infty, \infty)$ aralığında bir açık çözümdür (Gösteriniz!). Yandaki şekilde bu çözümler ailesinin bazı üyelerinin grafikleri görülmektedir. Şekilde siyah renkte ve kalın gösterilmiş olan çözüm $c = 0$ durumuna karşı gelen $y = -x \cos x$ özel çözümdür.

Benzer şekilde, $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$ şeklindeki iki-parametrelili aile $y'' - 2y' + y = 0$ şeklindeki 2. mertebeden lineer diferansiyel denklemin $(-\infty, \infty)$ aralığında bir açık çözümdür (Gösteriniz!). Bu denklemin bazı özel çözümleri c_1 ve c_2 keyfi sabitlerine verilecek farklı değerlerle elde edilebilir. Örneğin: $y = 0$, $y = 2e^x + xe^x$, $y = -3e^x - xe^x$, vb.

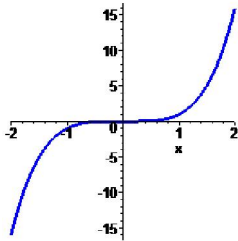
Bazen, verilen bir diferansiyel denklemin bir çözümü bu denklemin çözümler ailesinin bir üyesi olmayabilir. Yani bu çözüm, çözümler ailesindeki parametrelere verilen değerlerle elde edilemeyebilir. Bu şekildeki ekstra bir çözüme **tekil çözüm** denir. Örneğin, $y = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2$ şeklindeki

bir-parametrelili aile $dy/dx = xy^{1/2}$ şeklindeki diferansiyel denklemin $(-\infty, \infty)$ aralığında bir açık çözümdür. Bunun yanı sıra $y = 0$ da bu denklemin bir çözümdür. Ancak bu çözüm denklemin bir parametrelili çözümler ailesindeki c ye verilecek herhangi bir değerle elde edilemez. Dolayısıyla $y = 0$ bu denklemin bir tekil çözümdür. Bir diferansiyel denklemin bir I aralığında **sıfır** olan çözüme bu denklemin bir **aşık çözümlü** denir.

Parçalı Tanımlı Çözüm:



Bazı açık çözümler



Parçalı tanımlı çözümlü

$y = cx^4$ şeklindeki bir-parametrelili aile $xy' - 4y = 0$ diferansiyel denkleminin $(-\infty, \infty)$ aralığında bir-parametrelili çözümler ailesidir. Bu ailenin üyelerinden ikisi $c = 1$ ve $c = -1$ alınarak elde edilmiş ve grafikleri yandaki şekilde görülmektedir.

$$y = \begin{cases} -x^4, & x < 0 \\ x^4, & x \geq 0 \end{cases} \text{ şeklindeki parçalı tanımlı diferansiyellenebilir}$$

fonksiyon yukarıda verilen diferansiyel denklemin bir özel çözümlüdür. Fakat bu çözümlü $y = cx^4$ ailesinden c ye verilecek tek bir değerle elde edilemez. Bu çözümlü, $x < 0$ için $c = -1$ ve $x \geq 0$ için $c = 1$ seçimlerinden elde edilmiştir.

Tanım 1.12: Eğer n . mertebeden $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ şeklindeki bir denklemin bir I aralığındaki tüm çözümleri $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ şeklindeki n -parametrelili aileden c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) lere verilecek uygun değerlerle elde edilebiliyorsa bu aileye diferansiyel denklemin **genel çözümlü** denir.

Farklı Sembolleri Kullanma: c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere $x = c_1 \cos 4t$ ve $x = c_2 \sin 4t$ fonksiyonlarının her ikisi de $x'' + 16x = 0$ şeklindeki lineer diferansiyel denklemin çözümleridirler.

$x = c_1 \cos 4t$ nin t ye göre birinci ve ikinci türevleri sırasıyla: $x' = -4c_1 \sin 4t$, $x'' = -16c_1 \cos 4t$. Bunları denklemlde yerine yazarsak: $x'' + 16x = -16c_1 \cos 4t + 16c_1 \cos 4t = 0$ olur. Benzer şekilde:

$x = c_2 \sin 4t$ nin t ye göre birinci ve ikinci türevleri sırasıyla: $x' = 4c_2 \cos 4t$, $x'' = -16c_2 \sin 4t$. Buradan da $x'' + 16x = -16c_2 \sin 4t + 16c_2 \sin 4t = 0$ olduğu görülür. Son olarak, bu çözümlerinin bir lineer birleşimi olan $x = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$ şeklindeki iki-parametrelili aile de verilen diferansiyel denklemin bir çözümlüdür (Gösteriniz!).

Diferansiyel Denklem Sistemleri:

Buraya kadar sadece bir bilinmeyen fonksiyon içeren bir diferansiyel denklemi tartıştık. Fakat teori ve aynı zamanda birçok uygulamada diferansiyel denklem sistemleriyle karşılaşabiliriz. Tek bağımsız değişkene bağlı iki veya daha fazla bilinmeyen fonksiyonun türevlerini içeren iki veya daha fazla denkleme bir **diferansiyel denklem sistemi** denir. Örneğin, x ve y bağımlı değişkenler ve t bağımsız değişken olmak üzere birinci mertebeden bir diferansiyel denklem sistemi:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y)\end{aligned}$$

şeklinindedir. Bu şekildeki bir sistemin çözümü de ortak bir I aralığında tanımlı ve bu aralıkta sistemin her bir denklemini sağlayan $x = \phi_1(t)$ ve $y = \phi_2(t)$ şeklinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon çiftidir.

Başlangıç Değer Problemleri

Bazen bir diferansiyel denklemin verilen bazı yan şartları sağlayan bir çözümünü bulmayla ilgiliniz. Bu yan şartlar bilinmeyen fonksiyon veya türevleri üzerine konulmuş olabilir.

y_0, y_1, \dots, y_{n-1} keyfi olarak belirlenmiş reel sabitler olmak üzere, x_0 noktasını da içeren bir I aralığında

$$\text{Çöz:} \quad \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.8)$$

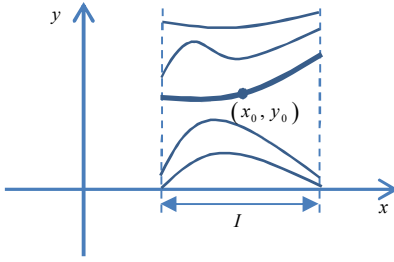
$$\text{Koşulları uyarınca:} \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

şeklinde verilmiş probleme bir **başlangıç değer problemi** adı verilir. Burada $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ e başlangıç koşulları ve y_0, y_1, \dots, y_{n-1} değerlerine de başlangıç değerleri denir.

Birinci ve İkinci Mertebeden Başlangıç Değer Problemleri: (1.8) ile verilen problem aynı zamanda n . mertebeden başlangıç değer problemi olarak da adlandırılır. Bu durumda 1. ve 2. mertebeden başlangıç değer problemleri sırasıyla:

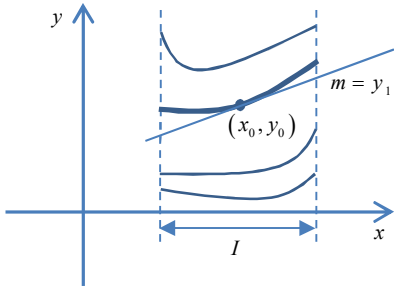
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \end{cases} \quad \text{şeklinde olurlar.}$$

Bu iki problem geometrik terimlerle aşağıdaki gibi kolayca ifade edilebilirler.



1. mertebeden başlangıç değer problemin çözümü

Birinci mertebeden başlangıç değer problemi için: x_0 noktasını da içeren bir I aralığında $y' = f(x, y)$ denkleminin, grafiği (x_0, y_0) noktasından geçen $y(x)$ gibi bir çözümü araştırılır. Bu durum için çözüm eğrisi yandaki şekilde gösterilmiştir.



2. mertebeden başlangıç değer problemin çözümü

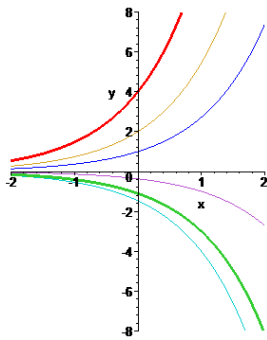
İkinci mertebeden başlangıç değer problemi için: x_0 noktasını da içeren bir I aralığında $y'' = f(x, y, y')$ denkleminin, grafiği (x_0, y_0) noktasından geçen ve aynı zamanda bu noktadaki eğimi y_1 sayısı olan $y(x)$ gibi bir çözümü araştırılır. Bu durum için çözüm eğrisi yandaki şekilde gösterilmiştir.

“Başlangıç koşulları” terimi fiziksel sistemlerden gelmektedir. t zamanı belirten bağımsız değişken olmak üzere, t_0 gibi bir başlangıç zamanında $y(t_0) = y_0$ ve $y'(t_0) = y_1$ sırasıyla bir cismin konum ve hızını temsil etmektedirler.

(1.8) de verilen problemi çözmek için: ilk önce verilen diferansiyel denklemin n -parametrelili çözümler ailesini bulmak ve daha sonra da x_0 noktasında verilen n tane başlangıç koşulunu kullanarak ailedeki n tane sabitin sayısal değerlerini tanımlamak gerekmektedir. Sonuçta elde edilen özel çözüm x_0 noktasını da içeren I aralığında tanımlı olur.

Örnek 1.13: Birinci mertebeden başlangıç değer problemi

$y = ce^x$, $y' - y = 0$ şeklindeki 1. mertebeden lineer diferansiyel denklemin bir-parametrelili çözümler ailesidir (Gösteriniz!) ve bu ailedeki tüm çözümler $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlıdır.



Eğer buna $y(0) = 4$ şeklinde bir başlangıç koşulu dayatarsak, çözümler ailesindeki c sabiti, bu ailede $x = 0$ ve $y = 4$ yerine yazıldığında $4 = ce^0$ dan $c = 4$ olarak bulunur. Dolayısıyla $y = 4e^x$,

$$y' - y = 0, \quad y(0) = 4$$

şeklindeki başlangıç değer probleminin bir çözümü olur.

Eğer bir çözüm eğrisinin $(0, 4)$ noktası yerine $(1, -3)$ noktasından geçmesi istenirse $y(1) = -3$ den $-3 = ce^1 \Rightarrow c = -3e^{-1}$ bulunur. Bu durumda $y = -3e^{x-1}$,

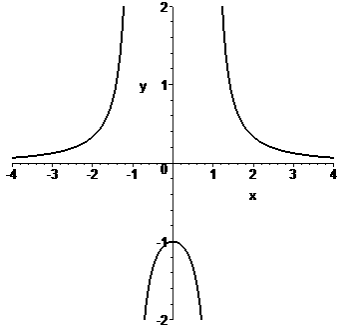
$$y' - y = 0, \quad y(1) = -3$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olmuş olur.

Yandaki şekilde bu iki çözüm eğrisi koyulaştırılmış olarak görülmektedir.

Bir sonraki örnekte yine 1. mertebeden bir başlangıç değer problemini ele alıyoruz. Bu örnekte, $y(x)$ çözümünün tanımlı olduğu I aralığının başlangıç koşulu olan $y(x_0) = y_0$ a nasıl bağlı olduğuna dikkat etmeliyiz.

Örnek 1.14: $y = \frac{1}{x^2 + c}$, $y' + 2xy^2 = 0$ şeklindeki 1. mertebeden diferansiyel denklemin bir-parametrelili çözümler ailesidir (Gösteriniz!).



Eğer buna $y(0) = -1$ şeklinde bir başlangıç koşulu dayatırsak, çözümler ailesindeki c sabiti, bu ailede $x = 0$ ve $y = -1$ yerine

$$\text{yazıldığında } -1 = \frac{1}{0^2 + c} \text{ den } c = -1 \text{ olarak bulunur. Dolayısıyla}$$

$$y = \frac{1}{x^2 - 1} \text{ olarak elde edilir.}$$

Aşağıda bu örnekle ilgili ayırt edici bazı özellikler vurgulanmaktadır:

- $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ fonksiyon olarak düşünüldüğünde: tanım kümesi $x = \mp 1$ haricindeki tüm reel sayılardır.
- $y' + 2xy^2 = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olarak düşünüldüğünde: $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ çözümünün tanımlı olduğu I aralığı, $y(x)$ in tanımlı ve diferansiyellenebilir olduğu herhangi bir aralık olabilir. Yandaki şekle bakıldığında bu şekildeki aralıklardan en geniş olanları $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ ve $(1, \infty)$ dur.
- $y' + 2xy^2 = 0$, $y(0) = -1$ başlangıç değer probleminin çözümü olarak düşünüldüğünde: $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ çözümünün tanımlı olduğu I aralığı, $y(x)$ in tanımlı, diferansiyellenebilir ve $x = 0$ noktasını içeren herhangi bir aralık olabilir. Bu koşulları sağlayan en geniş aralığın $(-1, 1)$ aralığı olduğu şekilde görülmektedir.

Örnek 1.15: İkinci mertebeden başlangıç değer problemi

$x = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$ ifadesi $x'' + 16x = 0$ denkleminin iki-parametrelili çözümler ailesidir. Bu daha önce doğrulanmıştı. Şimdi

$$x'' + 16x = 0, \quad x(\pi/2) = -2, \quad x'(\pi/2) = 1 \quad (1.9)$$

başlangıç değer probleminin bir çözümünü bulalım.

Çözüm: İlk olarak verilen çözümler ailesine $x(\pi/2) = -2$ koşulunu uygulayalım. Buradan

$$-2 = c_1 \cos\left(4 \frac{\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(4 \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow c_1 \cos 2\pi + c_2 \sin 2\pi = -2 \Rightarrow c_1 = -2$$

olur. Şimdi de verilen çözümler ailesine $x'(\pi/2)=1$ koşulunu uygulayalım. Bunun için ilk önce çözümler ailesinin türevini alıp daha sonrada elde edilen sonuçta $t = \pi/2$ ve $x' = 1$ kullandığımızda

$$x' = -4c_1 \sin 4t + 4c_2 \cos 4t \Rightarrow -4c_1 \sin 2\pi + 4c_2 \cos 2\pi = 1 \Rightarrow c_2 = 1/4$$

bulunur. Dolayısıyla (1.9) probleminin bir çözümü $x = -2 \cos 4t + \frac{1}{4} \sin 4t$ olur.

Varlık ve Teklik: Bir başlangıç değer problemi için iki soru akla gelmektedir:

- Problemin bir çözümü var mı?
- Eğer bir çözüm varsa bu çözüm tek mi?

$$\begin{cases} dy/dx = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{şeklindeki birinci mertebeden başlangıç değer problemi için:}$$

Varlık	$dy/dx = f(x, y)$ denkleminin çözümlere sahip mi? Çözüm eğrilerinden herhangi biri (x_0, y_0) noktasından geçiyor mu?
Teklik	(x_0, y_0) noktasından geçen tek bir çözüm eğrisi olduğundan ne zaman emin olabiliriz?

Örnekler 1.13 ve 1.15 de “çözümü” kelimesi yerine “bir çözümü” kullanılmıştır. Buradaki “bir” diğer çözümlerin de olabilme ihtimalini belirtmek amacıyla bilerek kullanılmıştır. Bu noktada her bir problemin tek çözümünün olduğuna henüz değinilmemiştir. Sıradaki örnek iki çözümü olan bir başlangıç değer problemini vermektedir.

Örnek 1.16: $y = 0$ ve $y = x^4/16$ fonksiyonlarının her ikisi de $dy/dx = xy^{1/2}$ diferansiyel denklemini ve $y(0) = 0$ başlangıç koşulunu sağlarlar. Dolayısıyla

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \quad y(0) = 0$$

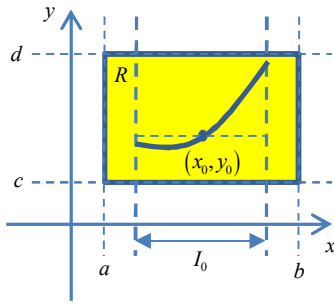
başlangıç değer problemi en azından iki çözüme sahiptir.

Fizik ve mühendislikten bir problem diferansiyel denklemler cinsinden ifade edildiğinde, istenen çözümün mevcut ve tek olması gereklidir. Bu derste göreceğimiz çoğu diferansiyel denklemlerin çözümlerinin var olduğu ve başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin muhtemelen tek olduğu düşünülse de gerçek hayat bu şekilde sade olmayabilir. Dolayısıyla, bir başlangıç değer problemini çözmeye başlamadan önce bu problemin çözümünün varlığı ve eğer varsa bu çözümün tekliği hakkında bilgi sahibi olma arzu edilir. İlk olarak birinci mertebeden diferansiyel denklemleri ele alacağımızdan dolayı burada

$$\begin{cases} dy/dx = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

şeklindeki bir başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliliğini garanti eden yeter koşulları vereceğiz. İkinci mertebeden bir başlangıç değer problemi için benzer durum daha sonraki derslerde ele alınacaktır.

Teorem 1.1: Birinci mertebeden başlangıç değer problemi için varlık-teklilik teoremi



Yandaki şekilde görüldüğü gibi R , xy -düzleminde (x_0, y_0) noktasını içine alan bir dikdörtgen bölge olsun. Eğer $f(x, y)$ ve $\partial f/\partial y$ bu bölge üzerinde sürekli iseler: $[a, b]$ aralığında, $h > 0$ olmak üzere $(x_0 - h, x_0 + h)$ şeklinde bir I_0 aralığı ve bu aralıkta tanımlı, (1.10) probleminin çözümü olan, tek bir $y(x)$ fonksiyonu vardır.

$f(x, y)$ ve $\partial f/\partial y$ nin sürekliliğini belirlemek kolay olduğundan dolayı yukarıdaki sonuç en popüler varlık-teklilik teoremlerinden biridir.

Örnek 1.17: Örnek 1.16 da $dy/dx = xy^{1/2}$ diferansiyel denkleminin grafiği $(0, 0)$ noktasından geçen en azından iki çözümünün olduğu görülmüştü.

$$f(x, y) = xy^{1/2} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$$

fonksiyonları $y > 0$ ile tanımlanan üst yarı düzlemde süreklidirler. Dolayısıyla yukarıdaki teorem garanti eder ki: $y_0 > 0$ olmak üzere üst yarı düzlemde x_0 merkezli bir aralık vardır ve bu aralık üzerinde verilen diferansiyel denklemin herhangi bir (x_0, y_0) noktasından geçen tek çözümü vardır. Buna göre, $dy/dx = xy^{1/2}$, $y(1) = 1$ başlangıç değer problemini hiç çözmeden: $x = 1$ merkezli bir aralık olduğunu ve bu aralık üzerinde verilen problemin tek çözümü olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek 1.18: $y' = y$, $y(0) = 4$ ve $y' = y$, $y(1) = -3$ başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlığı-tekliliği hakkında ne söyleyebilirsiniz?

***n* – Parametrelili Çözümler Ailesi Bilinen Bir Diferansiyel Denklemini Bulma Metodu**

Bu kısımda n – parametrelili çözümler ailesi bilinen bir diferansiyel denklemin nasıl bulunacağını göreceğiz. Unutmamak gerekir ki; böyle bir ailenin n tane keyfi sabit içermesi zorunlu olsa bile, çözümü bu olan diferansiyel denklem böyle sabitler içermez. Dolayısıyla, bu tipteki problemleri çözmek için bu sabitlerin yok edilmesi gerekir. Maalesef, bu sabitleri yok etmenin bir standart metodunu kullanmak her zaman en kolay yol olmayabilir. Çoğunlukla standartlaştırılmayan ve sizin

yaratıcılığınıza bağlı olan daha basit yöntemler vardır. Yapmamız gereken: verilen ailede görülen parametre sayısı kadar ardışık türev alınır, en son elde edilen ifadeye keyfi sabit/sabitler bulunmuyorsa istenen denklemdir, eğer hala keyfi sabitler bulunuyorsa bunlar eldeki diğer ifadeler kullanılarak uygun yöntemlerle yok edilir ve istenen denklem bulunmuş olur. Bunları örnekler üzerinde göreceğiz.

Örnek 1.19: Bir-parametrelî çözümler ailesi

$$y = c_1 \cos x + x \quad (a)$$

şeklinde olan bir diferansiyel denklem bulunuz.

Çözüm: Yukarıda söylediklerimizi göz önüne alırsak, verilen (a) ailesi sadece bir keyfi sabit içerdiğinden dolayı birinci mertebeden bir diferansiyel denklemin çözümü olduğunu kabul edeceğiz. (a) nın türevini alırsak,

$$y' = -c_1 \sin x + 1 \quad (b)$$

elde edilir. Bu aradığımız diferansiyel denklem olamaz çünkü c_1 parametresini içermektedir. Bunu yok etmek için (a) yı $\sin x$ ve (b) yi $\cos x$ ile çarpıp taraf tarafa toplayalım. Bu durumda

$$y \sin x + y' \cos x = x \sin x + \cos x \Rightarrow (y' - 1) \cos x + (y - x) \sin x = 0$$

elde edilir. Bunu düzenlersek istenen diferansiyel denklemi

$$y' = (x - y) \tan x + 1, \quad x \neq \mp \frac{\pi}{2}, \mp \frac{3\pi}{2}, \dots \quad (c)$$

olarak elde ederiz.

Örnek 1.20: İki-parametrelî çözümler ailesi

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

şeklinde olan bir diferansiyel denklem bulunuz.

Örnek 1.21: İki-parametrelî çözümler ailesi

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + x^2$$

şeklinde olan bir diferansiyel denklem bulunuz.

Örnek 1.22: Bir parametrelî çözümler ailesi merkezleri orijinde olan çemberler ailesi olarak temsil edilen bir diferansiyel denklem bulunuz.

Ders 1: Alıştırmalar

1. Aşağıdaki diferansiyel denklemleri sınıflandırınız.

a) $dy + (xy - \cos x) dx = 0$

b) $y'' + xy'' + 2y(y')^3 + xy = 0$

c) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 - (y''')^4 + x = 0$

ç) $e^{y''} + xy'' + y = 0$

d) $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$

e) $x \frac{d^3y}{dx^3} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

f) $t^5 y^{(4)} - t^3 y'' + 6y = 0$

g) $\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} + u = \cos(r+u)$

ğ) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

h) $\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{k}{R^2}$

ı) $(\sin \theta)y''' - (\cos \theta)y' = 3$

i) $\ddot{x} - \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{2}\right)\dot{x} + x = 0$

2. Aşağıda sağ sütunda verilen fonksiyonların sol sütunda verilen diferansiyel denklemlerin çözümleri olduklarını gösteriniz.

a) $y' + y = 0$

$y = e^{-x}$

b) $y' = e^x$

$y = e^x$

c) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

ç) $f'(x) = f''(x)$

$f(x) = e^x + 2$

d) $xy' = 2y$

$y = x^2$

e) $(1+x^2)y' = xy$

$y = \sqrt{1+x^2}$

f) $\cos \theta \frac{dr}{d\theta} - 2r \sin \theta = 0$

$r = a \sec^2 \theta$

g) $y'' - y = 0$

$y = ae^x + be^{-x}$

ğ) $2y' + y = 0$

$y = e^{-\frac{x}{2}}$

h) $y'' - 6y' + 13y = 0$

$y = e^{3x} \cos 2x$

ı) $\frac{dy}{dt} + 20y = 24$

$y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$

i) $y'' + y = \tan x$

$y = -(\cos x) \ln(\sec x + \tan x)$

3. Aşağıda verilen birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin belirtilen bağımlı değişkenlere göre lineer olup olmadıklarını belirleyiniz.

a) $(y^2 - 1)dx + xdy = 0$; y de; x te

b) $u dv + (v + uv - ue^u) du = 0$; u da; v de

4. $y = e^{kx}$ fonksiyonunun aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin bir çözümü olabilmesi için k nin alabileceği değerleri belirleyiniz.

a) $y' + 3y = 0$

b) $7y' = 3y$

c) $y'' - 5y' + 6y = 0$

d) $2y'' + 7y' - 4y = 0$

5. $y = x^k$ fonksiyonunun aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin bir çözümü olabilmesi için k nin alabileceği değerleri belirleyiniz.

a) $xy'' + 2y' = 0$

b) $x^2y'' - 7xy' + 15y = 0$

6. Aşağıda verilen fonksiyon çiftlerinin verilen diferansiyel denklem sistemlerinin $(-\infty, \infty)$ aralığında bir çözümü olduğunu gösteriniz.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 3y \end{cases}, \quad \begin{cases} x = e^{-2t} + 3e^{6t} \\ y = -e^{-2t} + 5e^{6t} \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t \\ \frac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \cos 2t + \sin 2t + \frac{1}{5}e^t \\ y = -\cos 2t - \sin 2t - \frac{1}{5}e^t \end{cases}$$

7. $y = 1/(x^2 + c)$, $y' + 2xy^2 = 0$ şeklindeki birinci mertebeden diferansiyel denklemin bir-parametrelili çözümler ailesi olduğuna göre; bu diferansiyel denklem ile birlikte aşağıdaki başlangıç koşullarının oluşturdukları birinci mertebeden başlangıç değer problemlerinin her biri için bir çözüm bulunuz ve bu çözümlerin tanımlı oldukları en geniş I aralıklarını belirtiniz.

a) $y(-2) = \frac{1}{2}$

b) $y(0) = 1$

c) $y(2) = \frac{1}{3}$

d) $y\left(\frac{1}{2}\right) = -4$

8. $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $x'' + x = 0$ şeklindeki 2. mertebeden diferansiyel denklemin 2-parametrelili çözümler ailesi olduğuna göre; bu diferansiyel denklem ile birlikte aşağıdaki başlangıç koşullarının oluşturdukları 2. mertebeden başlangıç değer problemlerinin her biri için bir çözüm.

a) $\begin{cases} x(0) = -1 \\ x'(0) = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x(\pi/4) = \sqrt{2} \\ x'(\pi/4) = 2\sqrt{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x(\pi/2) = 0 \\ x'(\pi/2) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x(\pi/6) = \frac{1}{2} \\ x'(\pi/6) = 0 \end{cases}$