DERS 2:
BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Dersin Amacı: Birinci mertebeden özel formlardaki diferansiyel denklemlerin analitik çözüm yöntemlerini öğretmek.

Bu derste özel tiplerdeki birinci mertebeden diferansiyel denklemleri çözmek için biçimsel yöntemleri göreceğiz. Ders 1 den hatırlanacağı üzere, birinci mertebeden diferansiyel denklemler ya

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad \text{(a)}$$

şeklinde diferansiyel formda, ya da

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \text{(b)}$$

şeklinde normal formda yazılabilirler. Birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin özel bir hali de

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad \text{(c)}$$

formundaki lineer denklemlerdir.

Eğer birinci mertebeden diferansiyel denklem: (a) formunda verilmişse x veya y den biri bağımlı değişken olarak düşünülebilir, (b) veya (c) formlarından biri göz önüne alınırsa y bağımlı değişken ve x te bağımsız değişken olarak kabul edilebilir.

Bu denklemler için analitik çözüm yöntemleri bazen (a), bazen (b), bazen de (c) formundan yola çıkarak geliştirilecektir. Şimdi bu formlardan (b) yi göz önüne alalım. Bu denklemi analitik olarak çözmek genelde çok zordur. Fakat $f(x,y)$ fonksiyonunun bazı özel durumları için analitik çözüm metotları geliştirilmiştir. Bu metotların temelinde, verilen denklemi bazı uygun $g(x,y)$ ve $F(x)$ fonksiyonları için

$$\frac{d}{dx}\left[g(x,y) - F(x)\right] = 0$$

şeklinde integrallenebilir formda yazabilmek yatmaktadır. Bundan sonra bu son denklemin her iki tarafının x e göre integrali alındığında, verilen denklemin

$$g(x,y) = F(x) + c$$

şeklinde bir çözümü elde edilir. Şimdi vereceğimiz örnek bu durumu açıklamakla birlikte işimiz çoğu zaman buradaki gibi kolay olmayacaktır.

Örnek 2.1: $x\dfrac{dy}{dx}+y=2x,\quad x>0$, şeklindeki diferansiyel denklemi ele alalım. Basit bir gözlem yapıldığında bu denklem

$$\frac{d}{dx}(xy)=2x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(xy)-2x=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[xy-x^2\right]=0$$

formunda tekrar yazılabilir. Bu son denklemin her iki tarafının x e göre integrali alındığında, verilen denklemin $xy-x^2=c$ şeklinde bir çözümünü bulmuş oluruz.

Şimdi $dy/dx=f(x,y)$ formundaki denklemi ele alarak f nin bazı özel durumları için bu denklemi çözüm tekniklerini göreceğiz.

A) Doğrudan İntegral Alınarak Çözülebilen Denklemler

$dy/dx=f(x,y)$ şeklindeki birinci mertebeden diferansiyel denklemi ele alalım. Eğer f fonksiyonu y değişkenine bağlı değilse, yani $f(x,y)=g(x)$ ise,

$$\frac{dy}{dx}=g(x) \tag{2.1}$$

denklemi doğrudan integral alınarak çözülebilir. Eğer $g(x)$ sürekli bir fonksiyon ise (2.1) in her iki tarafının x e göre integrali alındığında,

$$y=\int g(x)dx=G(x)+c,\quad G(x):g(x) \text{ in ilkeli}$$

elde edilir. Örneğin, $dy/dx=1+e^{3x}$ ise bunun çözümü aşağıdaki şekilde olur:

$$y=\int\left(1+e^{3x}\right)dx \quad \Rightarrow \quad y=x+\frac{1}{3}e^{3x}+c\,.$$

B) Değişkenlerine Ayrılabilir Denklemler

Tanım 2.1: Birinci mertebeden bir diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dx}=g(x)h(y) \quad \text{veya} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{h(y)} \quad \text{veya} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{h(y)}{g(x)}$$

formlarından birinde bulunuyorsa bu denkleme “ayrılabilir” veya “ayrılabilir değişkenlere sahiptir” denir.

Örneğin,

$$\frac{dy}{dx}=x\,y^2e^{x+2y} \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{dx}=y+\cos x$$

denklemleri sırasıyla ayrılabilir ve ayrılamaz denklemlerdir. İlk denklemde $f(x,y)=x\,y^2e^{x+2y}$ yi sadece x in ve sadece y nin fonksiyonları olarak $f(x,y)=\left(x\,e^{x}\right)\left(y^2e^{2y}\right)$ şeklinde çarpanlarına ayırabilirken, ikinci denklemdeki $f(x,y)=y+\cos x$ i sadece x in ve sadece y nin fonksiyonlarının çarpımı veya bölümü şeklinde yazmamız mümkün değildir.

Çözüm Metodu:

$$\frac{dy}{dx}=g(x)h(y)\quad\Rightarrow\quad \underbrace{\frac{1}{h(y)}}_{p(y)\ \text{diyelim}}dy=g(x)dx\quad\Rightarrow\quad\int p(y)dy=\int g(x)dx\quad\Rightarrow\quad P(y)=G(x)+c$$

Not: Yukarıdaki sonuçta iki integral sabiti kullanmamıza gerek yoktur. Çünkü $P(y)+c_1=G(x)+c_2$ yazsak bile $P(y)=G(x)+c_2-c_1$ den c_2-c_1 yerine tek bir keyfi sabit c kullanabiliriz. Dolayısıyla birinci mertebeden bir diferansiyel denklemin genel çözümünde sadece bir keyfi sabitin bulunması gerekmektedir.

Örnek 2.2: $(x+1)\,dy-ydx=0$ biçimindeki diferansiyel denklemi çözünüz.

Çözüm:

$$(x+1)\,dy-ydx=0\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x+1}\quad\Rightarrow\quad\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x+1}\quad\Rightarrow\quad\ln|y|=\ln|x+1|+c_1$$

$$y=e^{\ln|x+1|+c_1}\quad\Rightarrow\quad y=e^{\ln|x+1|}e^{c_1}\quad\Rightarrow\quad y=e^{c_1}|x+1|\quad\Rightarrow\quad y=\mp e^{c_1}(x+1)\quad\Rightarrow\quad y=c(x+1)$$

Yukarıdaki sonuçta mutlak değer tanımı kullanılmış ve $\mp e^{c_1}$ sabiti yerine c yazılmıştır.

Not: Yukarıda her bir integralin sonucu logaritmik olduğundan ilk satırın son işleminde c_1 yerine $\ln|c_1|$ kullanmak daha akıllıca olurdu. Bu durumda

$$\ln|y|=\ln|x+1|+\ln|c_1|\quad\Rightarrow\quad\ln|y|=\ln|c_1(x+1)|\quad\Rightarrow\quad y=c_1(x+1)$$

sonucunu kolayca elde edebiliriz.

Örnek 2.3: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y},\quad y(3)=-4$, biçimindeki başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\quad\Rightarrow\quad ydy=-xdx\quad\Rightarrow\quad\int ydy=-\int xdx\quad\Rightarrow\quad\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+c_1\quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=c^2$$

Yukarıdaki sonuca ulaşmak için $2c_1$ yerine c^2 kullanılmıştır. Bu çözüm merkezleri orijin olan eş merkezli çemberler ailesini temsil etmektedir. Şimdi verilen başlangıç koşulu kullanılırsa:

$$x=3, \quad y=-4 \quad \Rightarrow \quad 3^2+(-4)^2=c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2=25 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2=25 \quad \text{bulunur.}$$

Sonuç olarak verilen başlangıç değer probleminin çözümü merkezi orijin ve yarıçapı 5 olan bir çemberdir. Bu kapalı çözümün sadeliğinden dolayı başlangıç koşulunu sağlayan bir açık çözüm aşağıdaki gibi bulunabilir (Bkz. Ders 1, Örnek 1.10):

$$x^2+y^2=25 \quad \Rightarrow \quad y=-\sqrt{25-x^2}, \quad -5<x<5$$

Bir çözüm eğrisi diferansiyellenebilir bir fonksiyonun grafiğidir. Bu durum için çözüm eğrisi $(3,-4)$ noktasından geçen alt yarı düzlemdeki yarım çemberdir.

Örnek 2.4: $\dfrac{dy}{dx}=y^2-4$ şeklindeki diferansiyel denklemi çözünüz.

Çözüm: Denklemi hiç çözmeden gözlem yoluyla $y=\mp 2$ nin bu denklemin sabit çözümleri olduğunu söyleyebiliriz. Bu denklem değişkenlerine ayrılabilir olduğundan aşağıdaki yolla çözebiliriz.

$$\frac{dy}{dx}=y^2-4 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y^2-4}=dx \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dy}{y^2-4}=\int dx \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dy}{(y-2)(y+2)}=x+c_1$$

$$\Rightarrow \quad \int\left[\frac{1}{4}\frac{1}{(y-2)}-\frac{1}{4}\frac{1}{(y+2)}\right]dy=x+c_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}\ln|y-2|-\frac{1}{4}\ln|y+2|=x+c_1$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y-2|-\ln|y+2|=4x+4c_1 \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|=4x+c_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y-2}{y+2}=\mp e^{4x+c_2}=\mp e^{c_2}e^{4x}$$

Yukarıda $4c_1$ yerine c_2 yazılmıştır. Son olarak $\mp e^{c_2}$ yerine c yazıp elde edilen ifadeyi y için çözersek

$$y=2\left(\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}}\right),$$

şeklinde bir parametreli çözümler ailesini elde ederiz. Eğer bu çözümde $c=0$ kullanılırsa $y=2$ sabit çözümü elde edilir. Fakat c yerine her ne değer alırsak alalım $y=-2$ çözümünü elde edemeyiz. Dolayısıyla $y=-2$ denklemin bir tekil çözümüdür. Bu çözüm yukarıdaki çözüm aşamasında kaybolmuştur. Zaten ilk satırdaki integrali göz önüne alırsak $y=\mp 2$ yi dışarıda bırakmamız gerektiği anlaşılmaktadır.

Örnek 2.5: Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözünüz.

$$\left(e^{2y}-y\right)\cos x\frac{dy}{dx}=e^y\sin 2x, \quad y(0)=0$$

Çözüm:

$$\left(e^{2y}-y\right)\cos x\frac{dy}{dx}=e^{y}\sin 2x \quad\Rightarrow\quad \frac{e^{2y}-y}{e^{y}}dy=\frac{\sin 2x}{\cos x}dx \quad\Rightarrow\quad \left(e^{y}-ye^{-y}\right)dy=\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}dx$$

$$\Rightarrow\quad \left(e^{y}-ye^{-y}\right)dy=2\sin x\,dx \quad\Rightarrow\quad \int\left(e^{y}-ye^{-y}\right)dy=2\int\sin x\,dx$$

$$\Rightarrow\quad e^{y}+ye^{-y}+e^{-y}=-2\cos x+c$$

Bu son ifadede başlangıç koşulu kullanılırsa ($x=0$ iken $y=0$) $c=4$ olarak bulunur. Dolayısıyla verilen başlangıç değer probleminin bir çözümü aşağıdaki şekilde bulunmuş olur.

$$e^{y}+ye^{-y}+e^{-y}=-2\cos x+4$$

İntegrallerle Tanımlanmış Çözümler: Genel Matematik derslerinden bilindiği üzere: $f(x)$ fonksiyonu a noktasını içeren bir I açık aralığında sürekli ise, her $x\in I$ için

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)=f(x) \quad \text{dir.}$$

Diferansiyel denklemlerin çözümünde bu formun uygun olduğu zamanlar vardır. Örneğin, $f(x)$ fonksiyonu x_0 ve x noktalarını içeren bir I aralığında sürekli olsun. Bu durumda $dy/dx=f(x),\quad y(x_0)=y_0$, biçimindeki başlangıç değer probleminin bu I aralığında tanımlı bir çözümü

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t)dt \qquad \text{biçiminde olur.}$$

Aşağıdaki örnek buradaki fikri açıklamaktadır.

Örnek 2.6: $\dfrac{dy}{dx}=e^{-x^2},\quad y(3)=4$, biçimindeki başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm: $f(x)=e^{-x^2}$ fonksiyonu $(-\infty,\infty)$ aralığında süreklidir. Fakat bu fonksiyonun ilkeli elementer bir fonksiyon değildir. t yi duyarsız (kukla) integral değişkeni olarak kullanırsak:

$$\int_3^x\frac{dy}{dt}dt=\int_3^x e^{-t^2}dt \quad\Rightarrow\quad y(t)\Big|_3^x=\int_3^x e^{-t^2}dt \quad\Rightarrow\quad y(x)-y(3)=\int_3^x e^{-t^2}dt \quad\Rightarrow y(x)=4+\int_3^x e^{-t^2}dt$$

Not: Bu örnekte takip edilen yol, $f(x)$, ilkeli elementer fonksiyon olmayan ve $g(y)$ de ilkeli elementer bir fonksiyon olan fonksiyonlar olmak üzere $dy/dx=f(x)g(y)$ şeklindeki ayrılabilir denklemde de takip edilebilir.

C) Değişkenlerine Ayrılabilir Forma İndirgenebilen Denklemler

Bazı özel durumlarda değişken değiştirme işlemi yapılarak verilen bir diferansiyel denklemi çözüm yöntemini bildiğimiz diferansiyel denklem formlarından birine indirgeyebiliriz. Şimdi bunlardan birini göreceğiz.

$$\frac{dy}{dx} = F\left(ax+by+c\right), \quad a,b \neq 0, c: \text{ sabit sayılar} \tag{2.2}$$

formundaki bir diferansiyel denklem için çözüm yöntemi:

$ax+by+c=u$ dersek ve her iki tarafın x e göre türevini alırsak (kapalı fonksiyonun türevi),

$a+b\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx}-a\right)$ elde edilir. Bu son ifadeyi (2.2) de yerine yazarsak,

$$\frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx}-a\right)=F(u) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}=bF(u)+a=G(u) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{G(u)}=dx \quad \Rightarrow \quad \int\frac{du}{G(u)}=\int dx \quad \Rightarrow \quad H(u)=x+c$$

elde edilir. Son olarak, tekrar orijinal değişkenlerimize dönersek: $H\left(ax+by+c\right)=x+c$ şeklinde verilen diferansiyel denklemin bir çözümünü bulmuş oluruz.

Örnek 2.7: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y+1}$ şeklindeki diferansiyel denklemi çözünüz.

Çözüm: $x+y+1=u$ diyelim. Bu durumda yukarıdaki yol izlenirse:

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}-1=\frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}=\frac{1+u}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{1+u}du=dx$$

$$\int\frac{u}{1+u}du=\int dx \quad \Rightarrow \quad \int\left(1-\frac{1}{1+u}\right)du=x+c_1 \quad \Rightarrow \quad u-\ln\left|1+u\right|=x+c_1$$

$$x+y+1-\ln\left|x+y+2\right|=x+c_1 \quad \Rightarrow \quad y+1-\ln\left|x+y+2\right|=c_1 \quad \text{veya} \quad x+y+2=ce^{y}$$

şeklinde çözüm elde edilir.

DERS 2: ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki diferansiyel denklemleri çözünüz.

a) $\dfrac{dy}{dx}=(x+1)^2$

b) $dx+e^{2x}dy=0$

c) $\dfrac{dy}{dx}+3xy^2=0$

ç) $\dfrac{dy}{dx}=e^{2x+3y}$

d) $y\ln x\dfrac{dx}{dy}=\left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2$

e) $\csc y\,dx+\sec^2 x\,dy=0$

f) $(e^y+1)^2e^{-y}dx+(e^x+1)^3e^{-x}dy=0$

g) $\dfrac{dQ}{dr}=2Q$

ğ) $\dfrac{dT}{dt}=k(T-75),\quad k$: sabit

h) $\dfrac{dN}{dt}+N=Nte^{t+3}$

ı) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$

i) $\dfrac{dy}{dx}=x\sqrt{1-y^2}$

2. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözünüz.

a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-1}{x^2-1},\quad y(3)=4$

b) $\dfrac{dx}{dt}=4(x^2+1),\quad x\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

c) $\dfrac{dy}{dt}+2y=1,\quad y(0)=\dfrac{5}{2}$

ç) $(1+x^4)dy+x(1+4y^2)dx=0,\quad y(1)=0$

d) $x^2\dfrac{dy}{dx}=y-xy,\quad y(-1)=-1$

e) $\dfrac{dy}{dx}=y^2\sin(x^2),\quad y(-2)=\dfrac{1}{3}$

3. $x\dfrac{dy}{dx}=y^2-y$ denkleminin aşağıdaki noktalardan geçen çözümlerini bulunuz.

a) $(0,0)$ b) $(0,1)$ c) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ ç) $\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$

4. $2x\sin^2 y\,dx-(x^2+10)\cos y\,dy=0$ biçimindeki diferansiyel denklemin bir kapalı çözümünün $\ln(x^2+10)+\csc y=c$ şeklinde olduğunu gösteriniz. Eğer varsa diferansiyel denklemin çözümü esnasında kaybolan sabit çözümleri belirleyiniz.

5. Aşağıdaki diferansiyel denklemleri çözünüz.

a) $\dfrac{dy}{dx}=(x+y+1)^2$

b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-x-y}{x+y}$

c) $\dfrac{dy}{dx}=\tan^2(x+y)$

ç) $\dfrac{dy}{dx}=2+\sqrt{y-2x+3}$

d) $\dfrac{dy}{dx}=\sin(x+y)$

e) $\dfrac{dy}{dx}=1+e^{y-x+5}$