



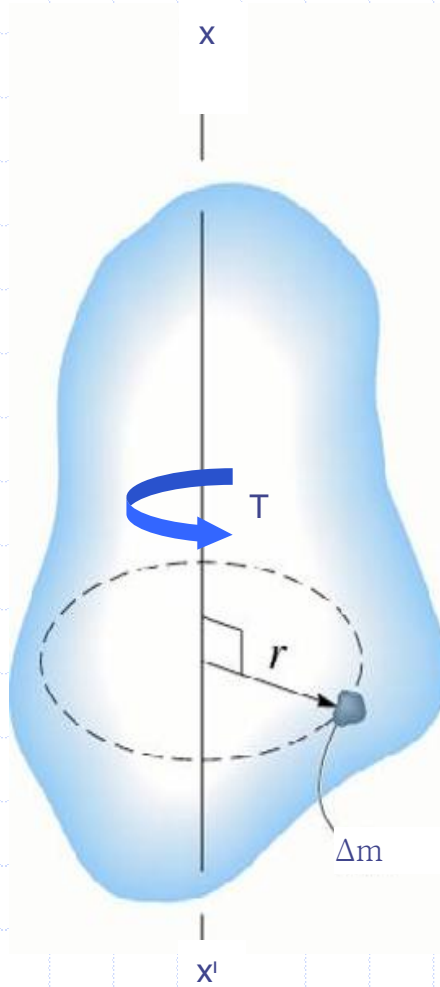
BÖLÜM

06.02

KÜTLE

ATALET MOMENTİ

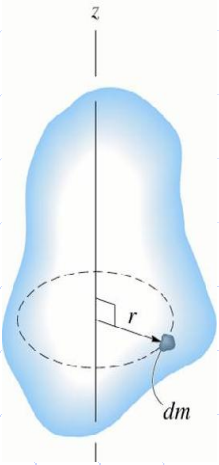
KÜTLE ATALET MOMENTLERİ



xx' eksen takımından r kadar uzaklıkta bir Δm kütlesi düşünelim buna bir kuvvet çifti uygulayalım (T). Sistem hareketsizken Δm kütlesi xx' eksenini etrafında dönmeye başlayacaktır. Burada sistemin verilen bir dönme hızına erişmesi için gerekli zamanın Δm kütlesiyle orantılı olduğunu göstermek istiyoruz.

Bundan dolayı $r^2 \cdot \Delta m$ çarpımını sistemin ataletinin (eylemsizliğinin) yani sistemi harekete geçirmeye çalıştığımızda bunun direncinin bir ölçüsüdür.

$r^2 \cdot \Delta m$ çarpımına Δm kütlelerinin xx' eksenine göre **kütle atalet momenti** denir.



Kütle eksenden ne kadar uzakta \rightarrow dönmeye o kadar dirençli

$$m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i = (\Delta m_1 + \Delta m_2 + \Delta m_3 + \dots + \Delta m_n)$$

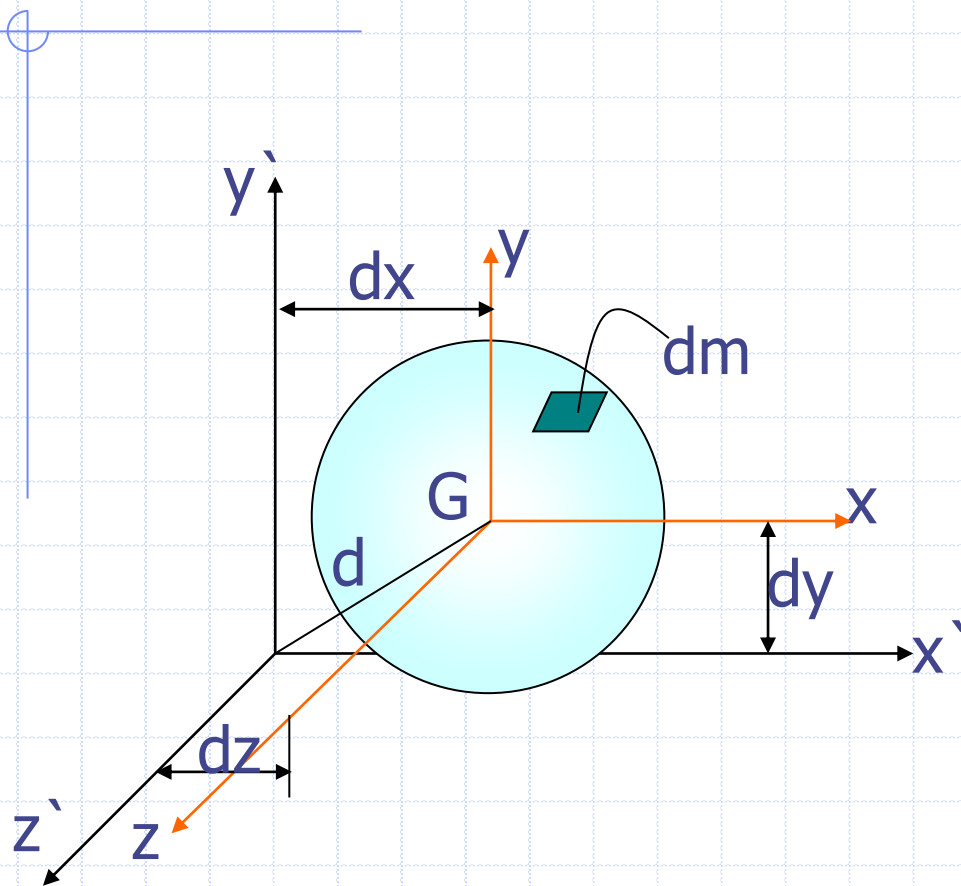
$$I = \sum r_i^2 \Delta m_i = r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \dots + r_n^2 \Delta m_n$$

$$I = \int r^2 dm = k^2 m \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (\text{atalet yarıçapı})$$

Burada **k** atalet yarıçapı, **I** sabit kalmak üzere cismin tüm kütlelerinin konulması gereken uzaklığı ifade eder.

k = cismin tüm kütlelerini aynı etkiyi verecek şekilde yerleştireceğin uzaklıktır.

PARALEL EKSENLER TEOREMİ



$$d = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$I = I_G + m \cdot d^2$$

$$(I_x)_k = (I_G)_k + m \cdot d_{y2}$$

Örnek

İnce Levhaların Kütle Atalet Momentleri

ρ : birim hacmin kütlesi (kg / m^3)

t : sabit

$$d_m = t\rho dA$$

$$(I_{xx})_{\text{kütle}} = \int r^2 dm$$

$$(I_{xx})_k = \int r^2 t\rho dA = t\rho \int r^2 dA$$

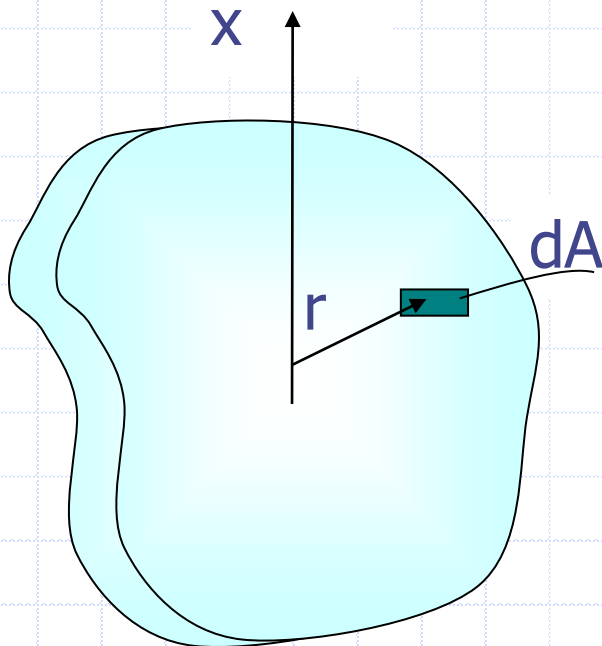
burada $\int r^2 dA$ Polar At. M

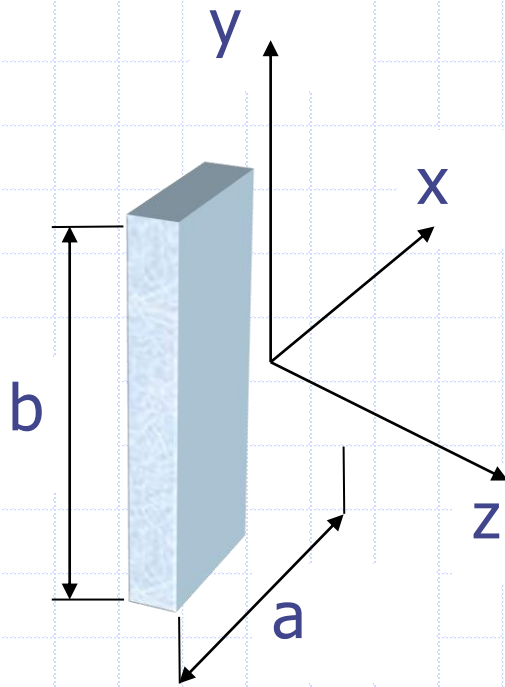
$$(I_{xx})_{\text{kütle}} = t\rho (I_{xx})_{\text{alan}}$$

birimi ise (kg.m^2) dir

$$(I_{yy})_{\text{kütle}} = t\rho (I_{yy})_{\text{alan}}$$

$$(I_o)_{\text{kütle}} = t\rho (I_o)_{\text{alan}}$$





$$(I_{xx})_{\text{k\u00fctle}} = t\rho(I_{xx})_{\text{alan}} = t\rho\left(\frac{ab^3}{12}\right)$$

$$(I_{yy})_{\text{k\u00fctle}} = t\rho(I_{yy})_{\text{alan}} = t\rho\left(\frac{ba^3}{12}\right)$$

$V = a \cdot b \cdot t$ ve $m = \rho V$ yukarıdaki ifadelerde yerine konulursa

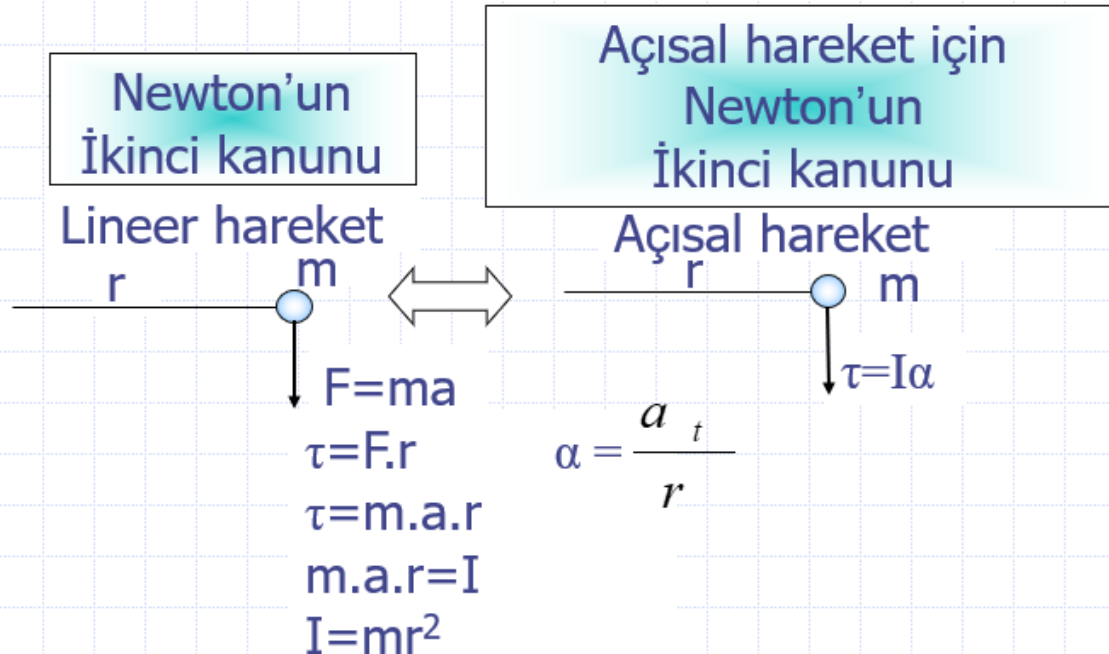
$$(I_x)_{\text{k\u00fctle}} = mb^2/12 \text{ ve}$$

$$(I_y)_{\text{k\u00fctle}} = ma^2/12$$

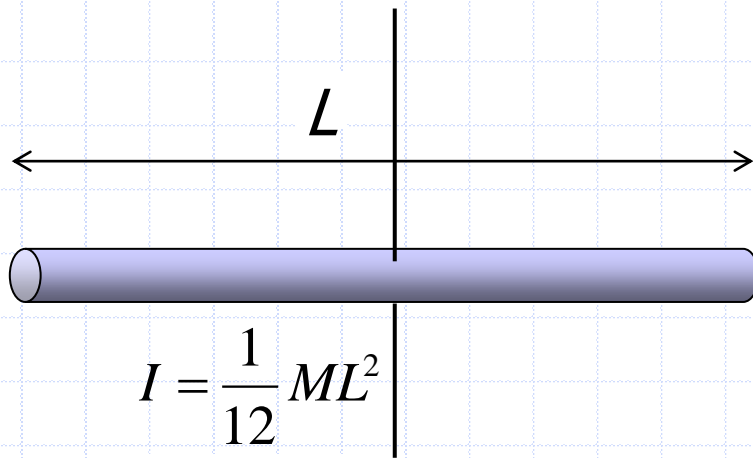
$$(I_o)_{\text{k\u00fctle}} = (m/12) \cdot (a^2 + b^2) \text{ elde edilir.}$$

LİNEER VE AÇISAL HAREKET

Sabit bir noktadan r kadar uzaklıktaki m kütlesi sabit bir eksen etrafında döndürülmek istensin. Bu lineer hareket Newton'un ikinci kanunundaki kuvvet ve ivme tanımlanabilir. Sadece dönme olarak ele alınsa da bu dönen sistemde ikinci kanun uygulanabilir ve buradan kütle atalet momenti tanımlanabilir.

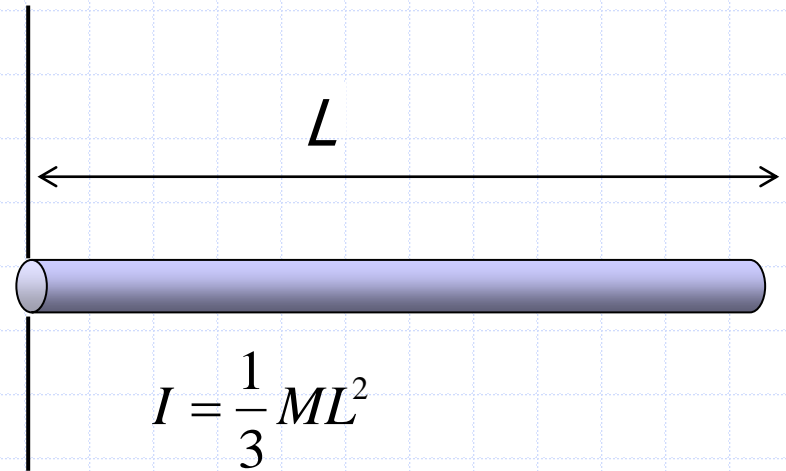


BAZI CİSİMLERİN KÜTLE ATALET MOMENTLERİ



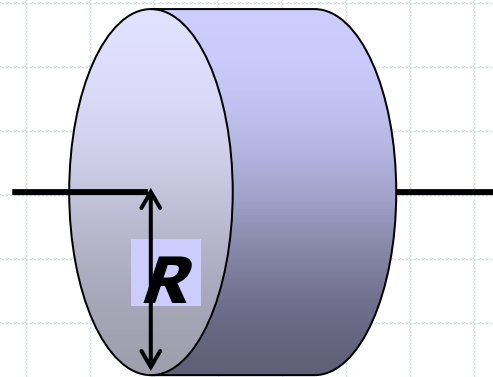
$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

İnce
Çubuk



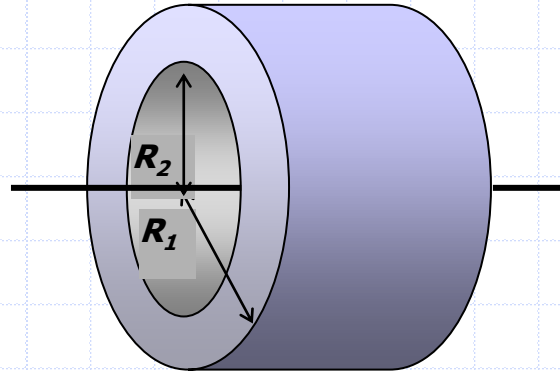
$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

İnce
Çubuk



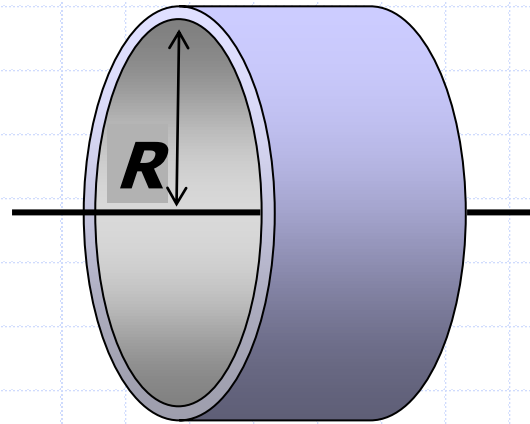
$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Disk



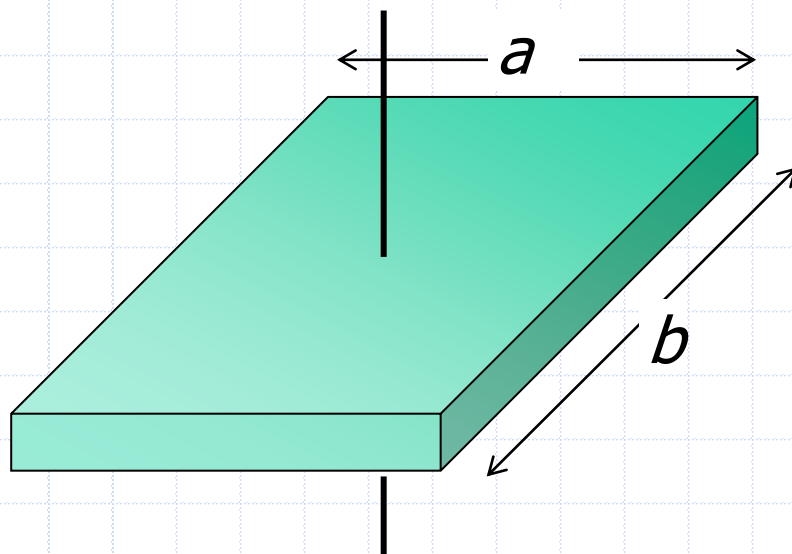
$$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$$

İçi boş silindir.



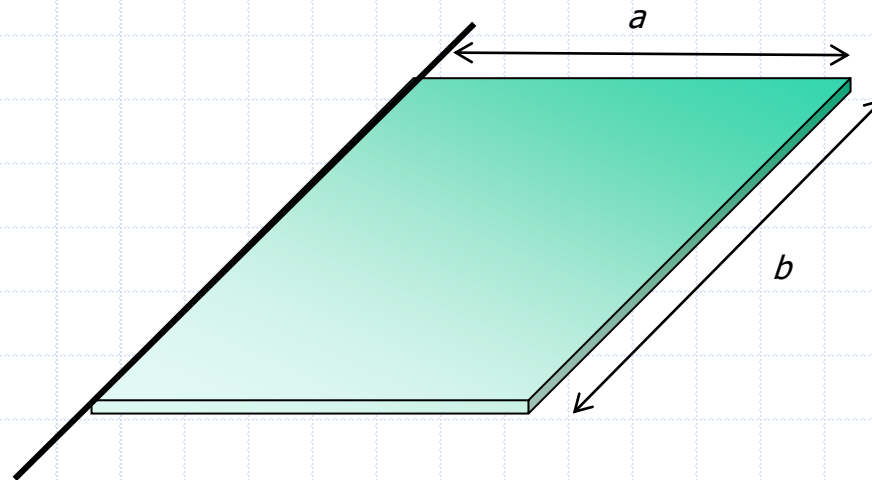
$$I = MR^2$$

İnce Cidarlı silindir



$$I = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$

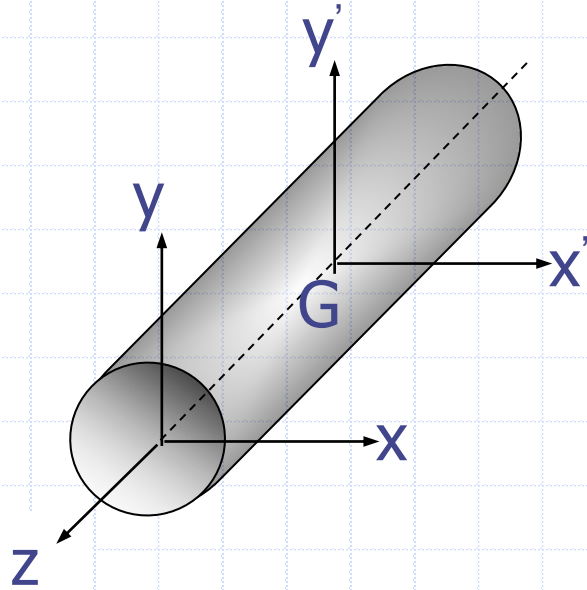
Dikdörtgen levha



$$I = \frac{1}{3}Ma^2$$

Dikdörtgen levha

KÜTLE ATALET MOMENTİ İLE İLGİLİ ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER



$L=50$ mm ve $\rho=7.85$ gr/cm³ olan ince bir çubuğun;

a) y' eksenini etrafında dönmesi durumunda meydana gelen kütle atalet momentini

b) y eksenini etrafında dönmesi durumunda meydana gelen kütle atalet momentini hesaplayınız.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot L = \pi \cdot 22.5 = 62.831 \text{ cm}^3$$

$$m = \rho \cdot V = 7.85 \cdot 62,831$$

$$m = 493,223 \text{ gr}$$

a)

$$I_y = \frac{1}{12} m.L^2$$

$$I_y = \frac{1}{12} 493.223.(5)^2$$

$$I_y = 1027,548 \text{ gr.cm}^2$$

b)

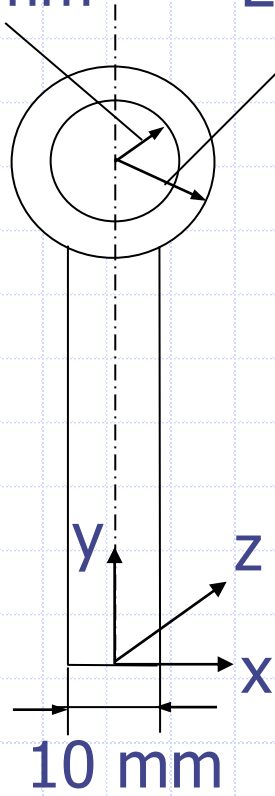
$$I_y = \frac{1}{3} m.L^2$$

$$I_y = \frac{1}{3} 493.223.(5)^2$$

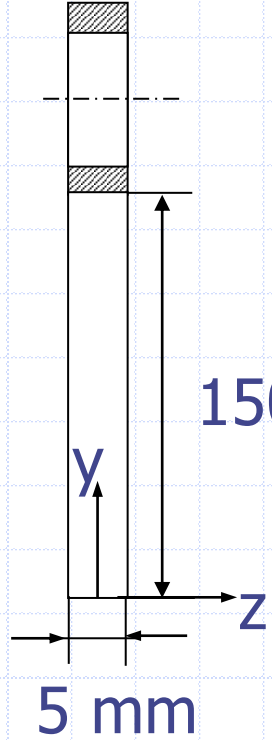
$$I_y = 4110,19 \text{ gr.cm}^2$$

20 mm

25 mm



10 mm



150 mm

5 mm

Şekilde gösterilen cismin x ve z eksenleri etrafında döndürülmesi durumunda kütle atalet momentlerini bulunuz. ($\rho=7,85 \text{ gr/cm}^3$)

$$I_{x1} = \frac{1}{3} m_1 a^2$$

$$V_1 = 0,5 \cdot 1 \cdot 15 = 7,5 \text{ cm}^3$$

$$m_1 = \rho \cdot V_1 \Rightarrow m_1 = 7,85 \cdot 7,5 \Rightarrow m_1 = 58,875 \text{ gr}$$

$$I_{x1} = \frac{1}{3} m_1 a^2 = \frac{1}{3} \cdot 58,875 \cdot (15)^2 \Rightarrow I_{x1} = 4415,625 \text{ gr.cm}^2$$

$$I_{x_2} = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) \cdot \rho \cdot t + m_2 \cdot d^2$$

$$V_2 = \pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot t = \pi \cdot (2,5^2 - 2^2) \cdot 0,5 = 3,53 \text{ cm}^3$$

$$m_2 = \rho \cdot V_2 \Rightarrow m_2 = 7,85 \cdot 3,53 \Rightarrow m_2 = 27,71 \text{ gr}$$

$$I_{x_2} = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) \cdot \rho \cdot t + m_2 \cdot d^2$$

$$I_{x_2} = \frac{\pi}{4} (R^2 + r^2) \cdot (R^2 - r^2) \cdot \rho \cdot t + m_2 \cdot d^2$$

$$I_{x_2} = \frac{m_2}{4} (R^2 + r^2) + m_2 \cdot d^2 = \frac{27,71}{4} \cdot (2,5^2 + 2^2) + 27,71 \cdot (17,5)^2$$

$$I_{x_2} = 8557,19 \text{ gr.cm}^2$$

$$I_{xT} = I_{x_1} + I_{x_2}$$

$$I_{xT} = 4415,625 + 8557,19$$

$$I_{xT} = 12928,815 \text{ gr.cm}^2$$

$$I_{z1} = \frac{1}{3} m_1 a^2$$

$$I_{z1} = \frac{1}{3} \cdot 58,875 \cdot (15)^2$$

$$I_{z1} = 4415,625 \text{ gr.cm}^2$$

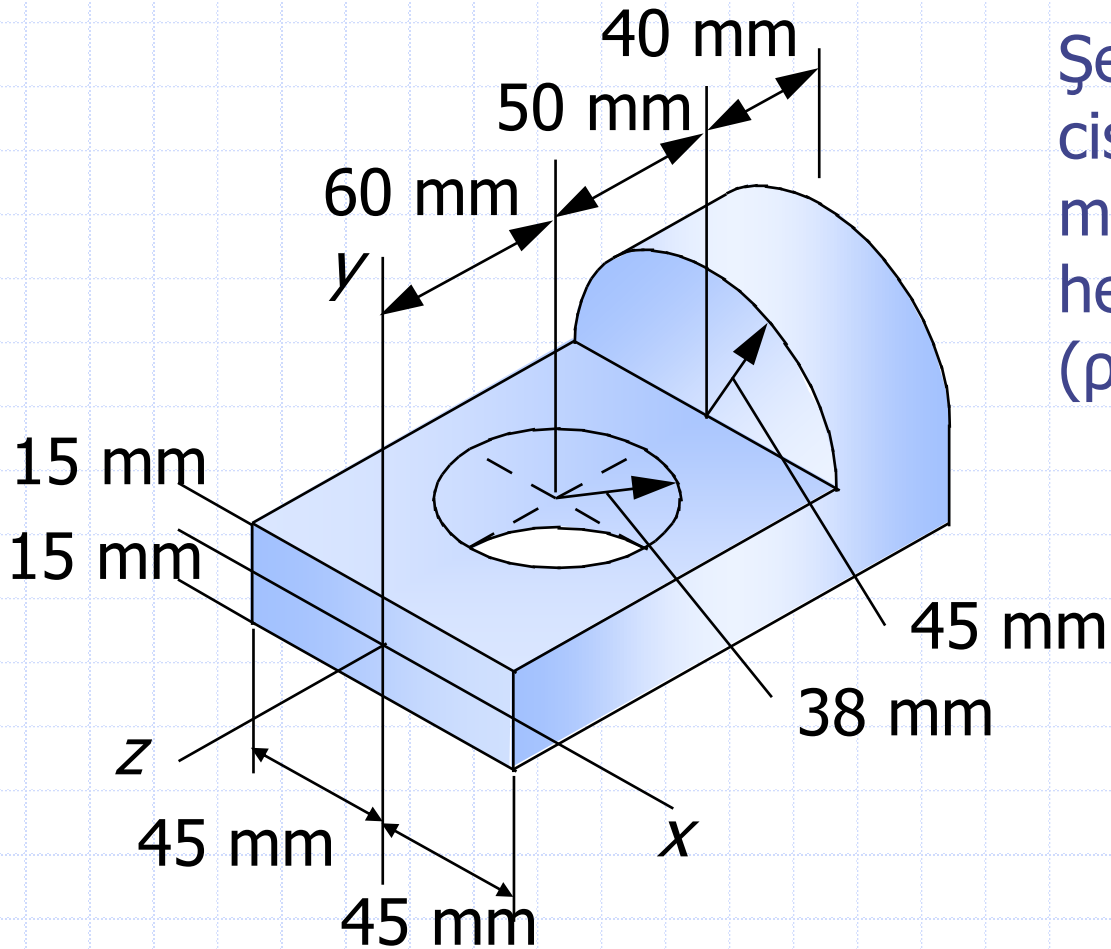
$$I_{z2} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (R^2 + r^2) + m_2 \cdot d^2$$

$$I_{z2} = \frac{1}{2} \cdot 27,71 \cdot (2,5^2 + 2^2) + 27,71 \cdot (17,5)^2 = 8628,2 \text{ gr.cm}^2$$

$$I_{zT} = I_{z1} + I_{z2}$$

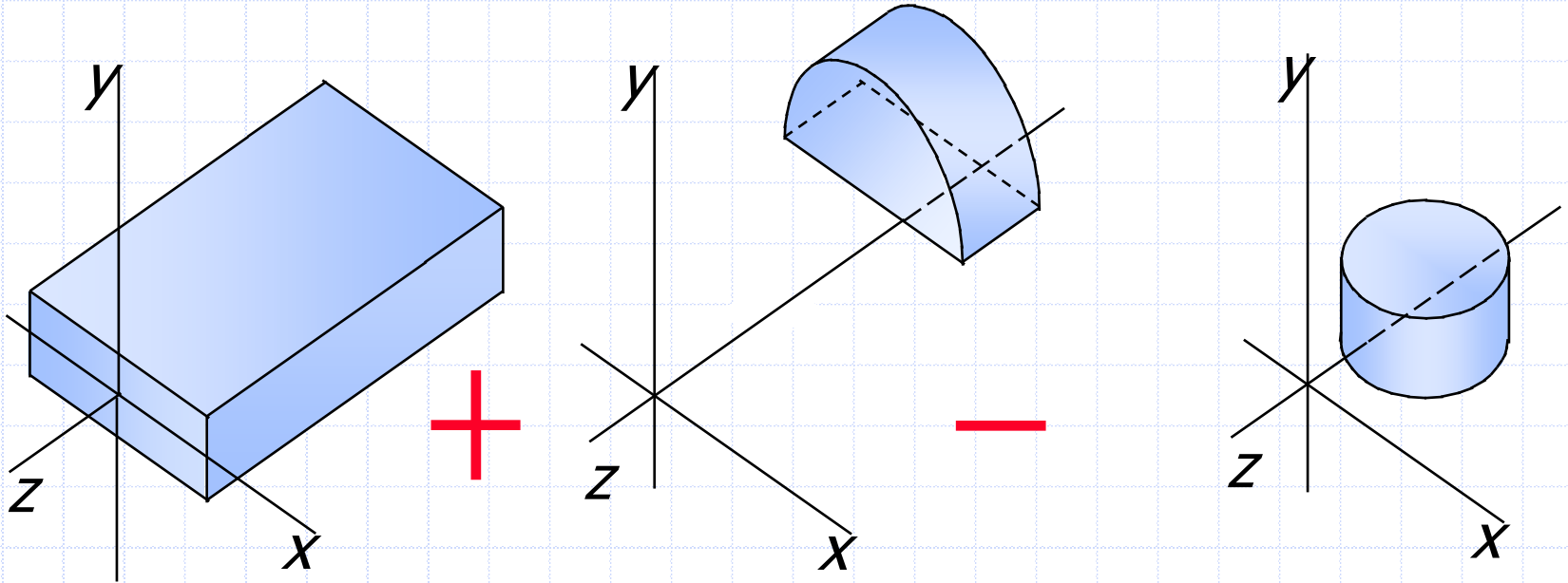
$$I_{zT} = 4415,625 + 8628,2$$

$$I_{zT} = 13043,82 \text{ gr.cm}^2$$



Şekli aşağıda verilen
cismin kütle atalet
momentini
hesaplayınız.
($\rho=7850 \text{ kg/m}^3$)

Cismin atalet momenti paralel eksenler teoremi ile çözülebilir. $I = I + m d^2$. Cisim aşağıdaki gibi atalet momenti kolaylıkla hesaplanabilen küçük parçalara ayrılır.



Dikdörtgen cisim için;

$$m = \rho V$$

$$V = (0.15 \text{ m})(0.09 \text{ m})(0.03 \text{ m})$$

$$V = 4.05 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$m = (7850 \text{ kg/m}^3)(4.05 \times 10^{-4} \text{ m}^3)$$

$$m = 3.18 \text{ kg}$$

$$I_{x1} = \frac{1}{3} m_1 a^2 = \frac{1}{3} \cdot 3,18 \cdot (0,15)^2$$

$$I_{x1} = 0,02385 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

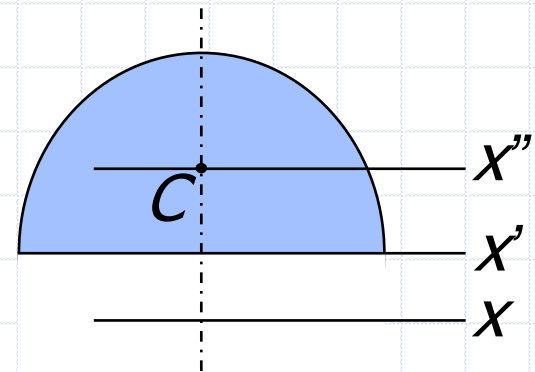
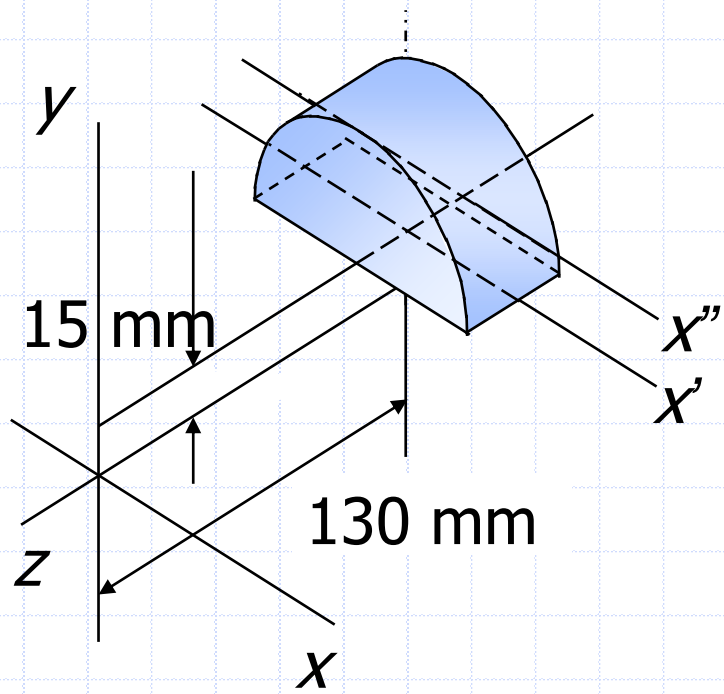
Yarım daire için;

$$V = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \cdot t$$

$$V = \frac{\pi}{2} \cdot (0,045)^2 \cdot 0,04 = 1,27 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$m = \rho \cdot V \Rightarrow m = 7850 \cdot 1,27 \cdot 10^{-4}$$

$$m = 1,0 \text{ kg}$$



$$I_{x_2} = \frac{\pi.r^4}{8} \rho.t + m.d^2$$

$$I_{x_2} = \frac{m.r^2}{8} + m.d^2 = 875.15 \Rightarrow I_{x_1} = \frac{1.(0.045)^2}{8} + 1.(0,13)^2$$

$$I_{x_2} = 0,0171 \text{ kg.m}^2$$

Tam daire delik için;

$$V = \pi.r^2 .t$$

$$V = \pi.(0,038)^2 .0,03 = 1,36.10^{-4} \text{ m}^3$$

$$m = \rho.V \Rightarrow m = 7850.1,36.10^{-4}$$

$$m = 1,068 \text{ kg}$$

$$I_{x3} = \frac{1}{3}m.L^2 + m.d^2$$

$$I_{x3} = \frac{1}{3}.1,068.(0,03)^2 + 1,068.(0,06)^2$$

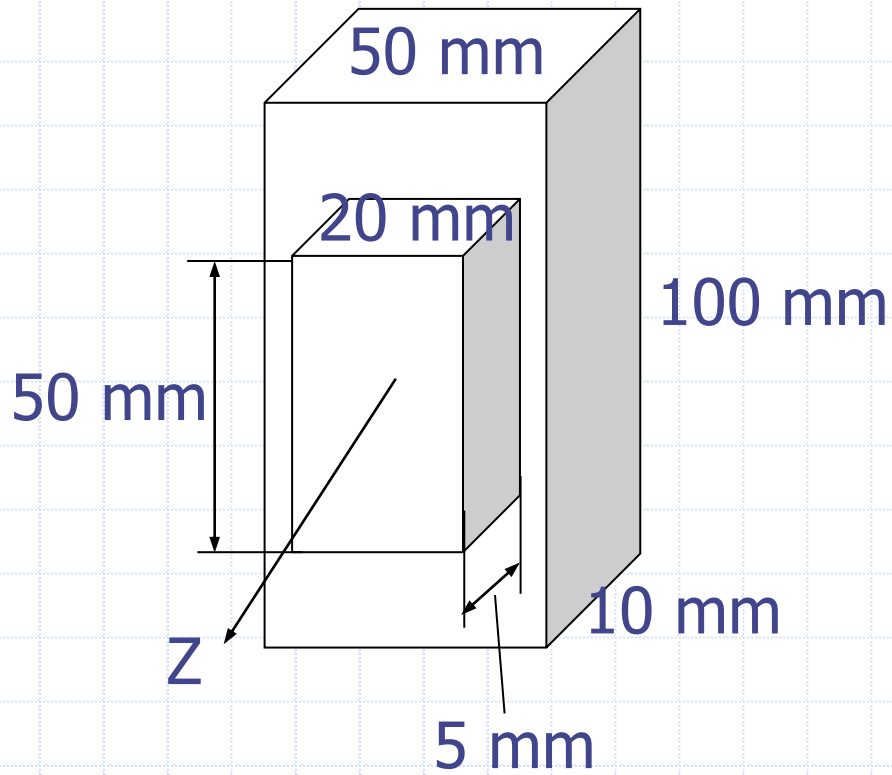
$$I_{x3} = 0,0041 \text{ kg.m}^2$$

Sonuçta hepsini toplarsak;

$$I_{xT} = I_{x1} + I_{x2} - I_{x3}$$

$$I_{xT} = 0,02385 + 0,0171 - 0,0041$$

$$I_{xT} = 0.03685 \text{ kg.m}^2$$



Şekilde verilen cismin z
eksenine göre kütle
atalet momentini
bulunuz.
($\rho=7,85 \text{ gr/cm}^3$)

$$V_1 = 2.0,5.5 = 5 \text{ cm}^3$$

$$m_1 = \rho.V_1 \Rightarrow m_1 = 7,85.5$$

$$m_1 = 39,25 \text{ gr}$$

$$I_{z1} = \frac{1}{12} m_1 (a^2 + b^2)$$

$$I_{z1} = \frac{1}{12} .39,25.(5^2 + 2^2)$$

$$I_{z1} = 94,85 \text{ gr.cm}^2$$

$$V_2 = 10.1.5 = 50 \text{ cm}^3$$

$$m_2 = \rho.V_2 \Rightarrow m_2 = 7,85.50$$

$$m_2 = 392,5 \text{ gr}$$

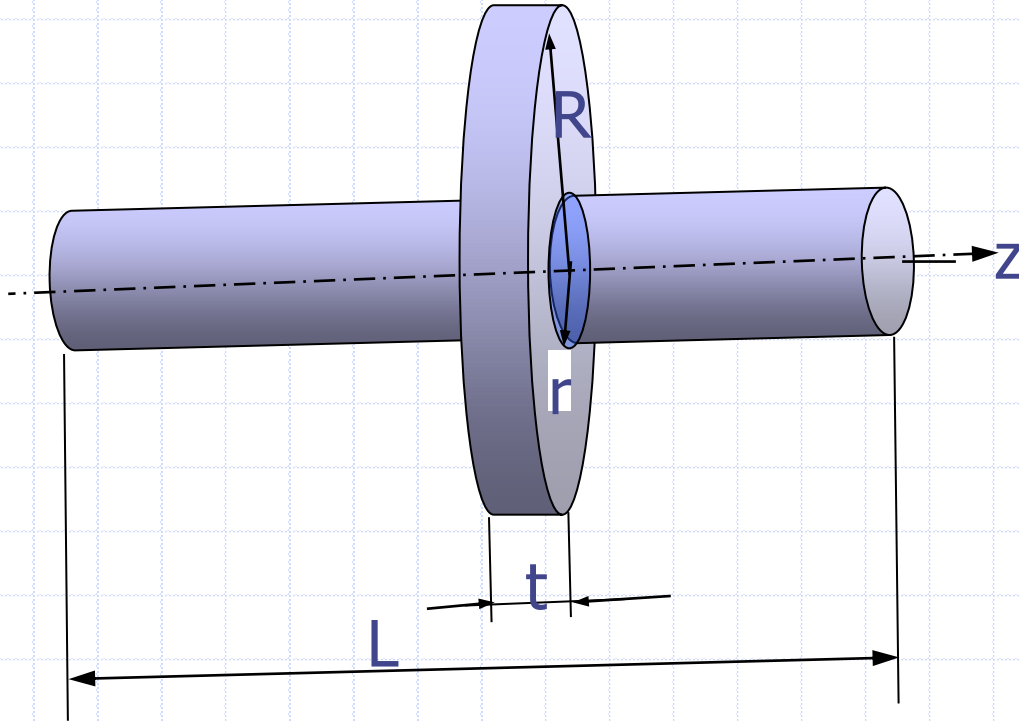
$$I_{z_2} = \frac{1}{12} m_2 (a^2 + b^2)$$

$$I_{z_2} = \frac{1}{12} .392,5.(5^2 + 10^2)$$

$$I_{z_2} = 4088,54 \text{ gr.cm}^2$$

$$I_{z_T} = 94,85 + 4088,54$$

$$I_{z_T} = 4183,39 \text{ gr.cm}^2$$



$R=100$ mm, $r=25$ mm, $L=300$ mm, $t=5$ mm ve $\rho=7.85$ gr/cm³ olan şekildeki parça için z ekseninde dönmesi durumunda meydana gelen kütle atalet momentini hesaplayınız.

$$V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot L$$

$$V_1 = \pi \cdot (2,5)^2 \cdot 30$$

$$V_1 = 589,04 \text{ cm}^3$$

$$m_1 = \rho \cdot V_1 \Rightarrow m_1 = 7,85 \cdot 589,04$$

$$m_1 = 4624,03 \text{ gr}$$

$$I_{z1} = \frac{1}{2} m_1 \cdot r^2$$

$$I_{z1} = \frac{1}{2} \cdot 4624,03 \cdot (2,5)^2$$

$$I_{z1} = 14450 \text{ gr.cm}^2$$

$$V_2 = \pi.(R^2 - r^2).L$$

$$V_2 = \pi.(10^2 - 2,5^2).0,5$$

$$V_2 = 147,26 \text{ cm}^3$$

$$m_2 = \rho.V_2 \Rightarrow m_2 = 7,85.147,26$$

$$m_2 = 1156 \text{ gr}$$

$$I_{z2} = \frac{1}{2}m_2.(R^2 + r^2)$$

$$I_{z2} = \frac{1}{2}.1156.(10^2 + 2,5^2)$$

$$I_{z2} = 61412,5 \text{ gr.cm}^2$$

$$I_{zT} = 14450 + 61412,5$$

$$I_{zT} = 75862,5 \text{ gr.cm}^2$$