PAÜ FEN FAKÜLTESİ FİZİK BÖLÜMÜ
FIZ 343 KUANTUM FİZİĞİNE GİRİŞ DERSİ
2025-2026 BAHAR DÖNEMİ FİNAL SINAVI SORULARI

S1	S2	S3	S4	S5	BONUS	T

Adı-Soyadı: ..... CEVAP ANAHTARI

Öğrenci No: .....
İmza:

NOT: Cep telefonu kullanılması yasaktır. Hesap makinesi kullanabilirsiniz. SÜRE: 120 dakika
01.06.2026

Soru 1 (20 P): Bir parçacığın momentum dağılım fonksiyonu $\emptyset(p) = \sqrt{\frac{a}{\hbar}} e^{-\frac{a}{\hbar}|p|}$ olarak veriliyor (Not:Bu fonksiyon çift fonksiyondur).

a) Tek boyutlu x-uzayındaki $\psi(x)$ dalga fonksiyonu bulun (8 P).

$$\emptyset(p) = \sqrt{\frac{a}{\hbar}}\, e^{-\frac{a}{\hbar}|p|}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \emptyset(p)\, e^{ipx/\hbar}\, dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sqrt{\frac{a}{\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{\hbar}|p|}\, e^{ipx/\hbar}\, dp$$

$$= \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{0} e^{(a+ix)p/\hbar}\, dp + \int_{0}^{\infty} e^{(a+ix)p/\hbar}\, dp$$

$$= \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \frac{1}{\hbar} \left[\frac{\hbar}{a+ix} + \frac{-\hbar}{-a+ix} \right] = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \frac{2a}{x^2+a^2}$$

$$\boxed{\psi(x) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}}\, \frac{2a}{x^2+a^2}}$$

b) $\emptyset(p)$ momentum dalga fonksiyonunu kullanarak momentumun beklenen değerini bulun (6 P).

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p\, |\emptyset(p)|^2\, dp = 0$$

↳ tek × çift = tek fonk.

$$\boxed{\langle p \rangle = 0}$$

c) $\emptyset(p)$ momentum dalga fonksiyonunu kullanarak kinetik enerjinin beklenen değerini bulun (7 P).

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle = \int \frac{p^2}{2m} |\emptyset(p)|^2 dp$$

$$|\emptyset(p)|^2 = \frac{a}{\hbar}\, e^{-\frac{2a}{\hbar}|p|}$$

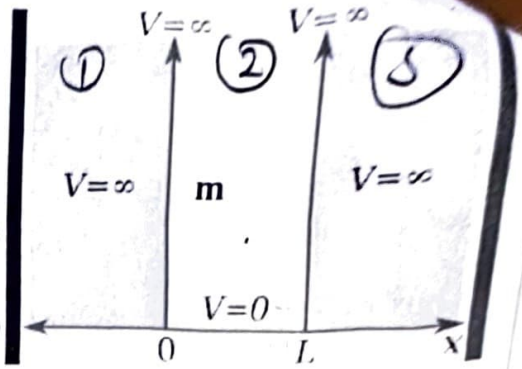
$$\langle K \rangle = \frac{1}{2m} \frac{a}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} p^2 e^{-\frac{2a}{\hbar}|p|} dp = \frac{1}{2m} \frac{a}{\hbar}\, 2 \int_{0}^{\infty} p^2 e^{-\frac{2ap}{\hbar}} dp$$

$$= \frac{a}{m\hbar}\, 2\, \frac{\hbar^3}{8a^3} = \frac{\hbar^2}{4ma^2}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$\boxed{\langle K \rangle = \frac{\hbar^2}{4ma^2}}$$

Soru 2 (20 P): Şekildeki sonsuz potansiyel kuyusunda hareket eden m kütleli kuantum parçacığını ele alalım.



a) Bu parçacığı niteleyen normalize dalga fonksiyonunu bulunuz (15 P).

Gizli sınır şartı: 1. ve 3. bölgede $V=\infty$ olduğu için $\psi_1=0$ ve $\psi_3=0$

②. Bölge: $0\le x\le L$ $V=0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}=E\psi \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi=0$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\psi=0,\quad k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}>0$$

$$\psi(x)=A'e^{ikx}+B'e^{-ikx}$$

$$\psi(x)=A\sin kx+B\cos kx$$

Sınır şartları:

i) $x=0$'da $\psi=0 \Rightarrow 0+B=0 \Rightarrow \psi(x)=A\sin kx$

$x=L$'da $\psi=0 \Rightarrow A\sin kL=0 \Rightarrow kL=n\pi,\ n=1,2,3\ldots$

$$k=\frac{n\pi}{L}$$

Normalize edelim:

$$\int_0^L \psi^*(x)\psi(x)\,dx=1 \Rightarrow A^2\int_0^L \sin^2\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{A^2}{2}\int_0^L\left[1-\cos\frac{2n\pi x}{L}\right]$$

$$=\frac{|A|^2}{2}\left[x-\frac{L}{2n\pi}\sin\left(n\frac{2\pi x}{L}\right)\right]_0^L=\frac{|A|^2}{2}L$$

$$\frac{|A|^2}{2}L=1 \Rightarrow A=\sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\boxed{\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x}$$

$n=1,2,3\ldots$

b) Bu parçacığın enerji özdeğerlerini bulunuz (5 P).

$$k^2=\frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{\hbar^2}{2m}\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

$$\boxed{E=n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}}$$

Soru 3 (20 P): n kuantum durumunda bulunan bir harmonik salınıcının $\hat{x}$ konum ve $\hat{p}$ momentum operatörleri $\hat{a}^+$yükseltme, $\hat{a}$ alçaltma ve $\hat{N}$ sayı operatörleri cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}(\hat{a} + \hat{a}^+)$, $\hat{p} = i\sqrt{\frac{mhw}{2}}(\hat{a}^+ - \hat{a})$,

$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2mw}(\hat{a}^2 + \hat{a}^{+2} + 2\hat{N} + 1)$ ve $\hat{p}^2 = -\frac{mhw}{2}(\hat{a}^2 + \hat{a}^{+2} - 2\hat{N} - 1)$.

Burada, $\hat{a}^+|n> = \sqrt{n+1}\,|n+1>$, $\hat{a}|n> = \sqrt{n}\,|n-1>$ ve $\hat{N}|n> = n\,|n>$. Harmonik salınıcının

a) konum ve momentumun beklenen değerlerini (7 P)

$$\langle \hat{x} \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2mw}} \langle n|\hat{a} + \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2mw}} \left(\langle n|\hat{a}|n\rangle + \langle n|\hat{a}^+|n\rangle \right)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2mw}} \left[\sqrt{n}\langle n|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle \right] = 0$$

$$\langle \hat{p} \rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar w}{2}} \left[\langle n|\hat{a}^+|n\rangle - \langle n|\hat{a}|n\rangle \right]$$

$$= i\sqrt{\frac{m\hbar w}{2}} \left[\sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle - \sqrt{n}\langle n|n-1\rangle \right] = 0$$

$\langle x \rangle = 0$

$\langle p \rangle = 0$

b) konum ve momentumun karelerinin beklenen değerlerini (8 P).

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{\hbar}{2mw} \langle n|\hat{a}^2 + \hat{a}^{+2} + 2\hat{N} + 1|n\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2mw} \left[\langle n|\hat{a}^2|n\rangle + \langle n|\hat{a}^{+2}|n\rangle + \langle n|2\hat{N} + 1|n\rangle \right]$$

$$= \frac{\hbar}{2mw} \left[\sqrt{n(n-1)}\langle n|n-2\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}\langle n|n+2\rangle + (2n+1)\langle n|n\rangle \right]$$

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{\hbar}{2mw}(2n+1)$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = -\frac{m\hbar w}{2} \left[\langle n|\hat{a}^2|n\rangle + \langle n|\hat{a}^{+2}|n\rangle - \langle n|2\hat{N} + 1|n\rangle \right]$$

$$= -m\frac{\hbar w}{2}\left[-2n - 1 \right]$$

$$= \frac{m\hbar w}{2}(2n+1)$$

$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2mw}(2n+1)$

$\langle p^2 \rangle = \frac{m\hbar w}{2}(2n+1)$

c) belirsizlikler çarpanını ($\Delta x \Delta p$) bulun (6 P).

$$\Delta x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{mw}(2n+1)}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2} = \sqrt{\frac{m\hbar w}{2}(2n+1)}$$

$$\Delta x \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar}{mw}(2n+1) \cdot \frac{m\hbar w}{2}(2n+1)}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(2n+1) = \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$

$n > 0$ olduğu için $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

Soru 4 (20 P): Beş ortonormal vektör $|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$, $|\phi_3\rangle$, $|\phi_4\rangle$ ve $|\phi_5\rangle$ cinsinden aşağıdaki $|\psi\rangle$ durumunu ele alınız:

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{19}}|\phi_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{19}}|\phi_2\rangle + \sqrt{\frac{3}{19}}|\phi_3\rangle + \sqrt{\frac{4}{19}}|\phi_4\rangle + \sqrt{\frac{5}{19}}|\phi_5\rangle$$

Burada, $|\phi_n\rangle$ vektörleri, n=1,2,3,4,5, için $\hat{H}|\phi_n\rangle = n\varepsilon_0|\phi_n\rangle$ özelliğini sağlayan bir $\hat{H}$ Hamiltonyen operatörünün öz vektörleridir.

a) $|\psi\rangle$ durumunun normalize edilmiş formunu bulunuz (8 P).

$$\langle 4|4\rangle = \frac{1}{19}\langle\phi_1|\phi_1\rangle + \frac{2}{19}\langle\phi_2|\phi_2\rangle + \frac{3}{19}\langle\phi_3|\phi_3\rangle + \frac{4}{19}\langle\phi_4|\phi_4\rangle + \frac{5}{19}\langle\phi_5|\phi_5\rangle = \frac{1}{19} + \frac{2}{19} + \frac{4}{19} + \frac{5}{19} = N^2$$

$$\Rightarrow N^2 = \frac{15}{19} \Rightarrow N = \sqrt{\frac{19}{15}}$$

$$|4'\rangle = \sqrt{\frac{19}{15}}|4\rangle = \sqrt{\frac{19}{15}}\left[\frac{1}{\sqrt{19}}|\phi_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{19}}|\phi_2\rangle + \sqrt{\frac{3}{19}}|\phi_3\rangle + \sqrt{\frac{4}{19}}|\phi_4\rangle + \sqrt{\frac{5}{19}}|\phi_5\rangle\right]$$

$$|4'\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}}\left(|\phi_1\rangle + \sqrt{2}|\phi_2\rangle + \sqrt{3}|\phi_3\rangle + \sqrt{4}|\phi_4\rangle + \sqrt{5}|\phi_5\rangle\right)$$

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}}\left(|\phi_1\rangle + \sqrt{2}|\phi_2\rangle + \sqrt{3}|\phi_3\rangle + \sqrt{4}|\phi_4\rangle + \sqrt{5}|\phi_5\rangle\right)$$

b) Sistemin her bir özdurumunda bulunma olasılığını hesaplayınız (7 P).

$E_1 = \varepsilon_0$ $\quad P_1(E_1) = \langle\phi_1|4'\rangle = C_1^2 = \frac{1}{15}$

$E_2 = 2\varepsilon_0$ $\quad P_2(E_2) = \langle\phi_2|4'\rangle = C_2^2 = \frac{2}{15}$

$E_3 = 3\varepsilon_0$ $\quad P_3(E_3) = \langle\phi_3|4'\rangle = C_3^2 = \frac{3}{15}$

$E_4 = 4\varepsilon_0$ $\quad P_4(E_4) = \langle\phi_4|4'\rangle = C_4^2 = \frac{4}{15}$

$E_5 = 5\varepsilon_0$ $\quad P_5(E_5) = \langle\phi_5|4'\rangle = C_5^2 = \frac{5}{15}$

$P_1 = 1/15$

$P_2 = 2/15$

$P_3 = 3/15$

$P_4 = 4/15$

$P_5 = 5/15$

c) $\hat{H}$ operatörünün beklenen değerini hesaplayınız (5 P).

$$\langle\hat{H}\rangle = \langle 4'|\hat{H}|4'\rangle = P_1E_1 + P_2E_2 + P_3E_3 + P_4E_4 + P_5E_5$$

$$= \frac{1}{15}\varepsilon_0 + \frac{2}{15}2\varepsilon_0 + \frac{3}{15}3\varepsilon_0 + \frac{4}{15}4\varepsilon_0 + \frac{5}{15}5\varepsilon_0$$

$$= \varepsilon_0\frac{55}{15} = 3{,}67\,\varepsilon_0$$

$\langle\hat{H}\rangle = 3{,}67\,\varepsilon_0$

Soru 5 (20 P) $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$ operatörü/matrisi Hermitsel midir? Bu operatörün özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \hat{A}^+ = (\hat{A}^T)^* = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix} = \hat{A}$

$\hat{A}^+ = \hat{A}$ olduğu için Hermitsel'dir. (5)

$A\psi = \lambda\psi$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3-\lambda & i \\ -i & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & i \\ -i & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (3-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ (5)

$\lambda_1 = 2$ için özvektörü bulalım:

$\begin{pmatrix} 3-2 & i \\ -i & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow c_1 + ic_2 = 0$ } iki si de aynı denklem
$-c_1 i + c_2 = 0$ } $a = -ic_2$

$\Rightarrow |\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ic_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Normalize edelim:

$\langle\psi_1|\psi_1\rangle = 1 \Rightarrow (ic_2 \;\; c_2)\begin{pmatrix} -ic_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = 2c_2^2 = 1$

$c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ (5)

$\lambda_2 = 4$ için özvektörü bulalım:

$\begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $-c_1 + ic_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -ic_2$
$-ic_1 - c_2 = 0$

$|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} ic_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Normalize edelim

$\langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1$

$(-ic_2 \;\; c_2)\begin{pmatrix} ic_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = 2c_2^2 = 1$

$c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ (5)

Hermitsel midir? Evet/Hayır

$\lambda_1 = 2 \quad |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 4 \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

Bonus Soru (30 P): Hamiltonyen operatörü $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ olan bir kuantum sistemini ele alalım. Açısal momentum vektörü $\vec{L}$ nin bileşenleri $L_x = yp_z - zp_y$, $L_y = zp_x - xp_z$ ve $L_z = xp_y - yp_x$ olarak tanımlanıyor.

a) $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}$ momentum operatörünün hareket sabiti olup olmadığını gösteriniz (10 P).

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2}{2m}$$

$$[\hat{H}, \hat{p}] = \frac{1}{2m}[\hat{p}^2, \hat{p}] = 0$$

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{H}, \hat{p}]\rangle = 0 \Rightarrow \langle p\rangle = \text{sabit}$$

p momentum hareket sabitidir

b) $[L_x, L_y] = ?$ sonucunu bulunuz (10 P).

$$[L_x, L_y] = [yp_z - zp_y,\ zp_x - xp_z]$$

$$= [yp_z, zp_x] - [yp_z, xp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z]$$

(1) (2) (3) (4)

(1) $[yp_z, zp_x] = y[p_z, z]p_x = -i\hbar y p_x$

(2) $[yp_z, xp_z] = y[p_z, xp_z] = yx[p_z, p_z] = 0$

(3) $[zp_y, zp_x] = [z, z]p_y p_x = 0$

(4) $[zp_y, xp_z] = x[z, p_z]p_y = i\hbar x p_y$

$$[L_x, L_y] = -i\hbar y p_x + 0 + 0 + i\hbar x p_y = i\hbar(xp_y - yp_x) = i\hbar L_z$$

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

c) $\Delta L_x \Delta L_y$ belirsizlik bağıntısını bulunuz (b şıkkındaki işlemin sonucunu kullanabilirsiniz) (10 P).

$$\Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{1}{2}|\langle[L_x, L_y]\rangle|$$

$$\geq \frac{1}{2}|\langle i\hbar L_z\rangle|$$

$$\Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{\hbar}{2}|\langle L_z\rangle|$$