

NO: İSİM SOYİSİM:

FİZ 201 FİZİKTE MATEMATİK METOTLAR FİNAL SINAVI
2021 - 2022 Güz, Fizik Bölümü, Pamukkale Üniversitesi, Denizli

Soru : 1 (25P) Aşağıda verilen A matrisini düşünelim. (a) $H = \frac{1}{2}(A + A^\dagger)$ hermitsel matrisini oluşturunuz. (b) H matrisinin özdeğerlerinin -1 ve 4 olduğunu gösteriniz. (c) Her özdeğere karşılık gelen bir boylandırılmış (normalize) özvektörleri bulunuz. (d) Bu vektörlerin dik olduğunu gösteriniz.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4i \\ 0 & 3 + 2i \end{pmatrix}$$

Soru : 2 (25P) m, b, g pozitif reel sabitler olmak üzere aşağıdaki başlangıç değer problemini düşünelim.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} - mg = 0, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0$$

$dx/dt = v$ atamasıyla diferansiyel denklemin mertebesini düşürerek bu problemi çözünüz.

Soru : 3 (25P) Aşağıdaki diferansiyel denklemin iki çözümünü $x = 0$ civarında seri olarak en az üç terim tutarak yazınız.

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

Soru : 4 (25P) $f(x) = x^2$ fonksiyonunu $-L \leq x \leq +L$ aralığında $T = 2L$ periyotlu trigonometrik fonksiyonlar cinsinden Fourier serisine açınız.

BAŞARILAR ... 12.01.2022 Saat: 14.00 (80 dk) Prof.Dr. Muzaffer ADAK

%%%%%%%%%%%%%% Bazı faydalı olabilecek formüller %%%%%%%%%%%%%%%

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad \frac{2\pi}{\theta} = \frac{T}{x}$$

C E V A P L A R

Cevap : 1 (a) $A^\dagger = (A^*)^T$ matrisini oluşturup iki matrisi toplayacağız.

$$H = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 4i \\ 0 & 3 + 2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4i & 3 - 2i \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Özdeğer denklemini hatırlayalım: $H\vec{x} = \lambda\vec{x}$ veya $(H - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = 0$ olarak ifade edelim. Bunun matris biçimi şöyle olur.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 2i \\ -2i & 3 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

a ve b bileşenlerinin her ikisinin de sıfır olmaması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2i \\ -2i & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1 \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = 4$$

(c) Önce $\lambda_1 = -1$ özdeğerine karşı gelen \vec{x}_1 özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -2ib_1$$

$$\text{Normalizasyon} \quad |a_1|^2 + |b_1|^2 = 1. \quad \text{Birlikte} \quad \vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Şimdi de $\lambda_2 = 4$ özdeğerine karşı gelen \vec{x}_2 özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} -4 & 2i \\ -2i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad b_2 = -2ia_2$$

$$\text{Normalizasyon} \quad |a_2|^2 + |b_2|^2 = 1. \quad \text{Birlikte} \quad \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$$

(d) İki vektörün skaler çarpımı sıfır ise diktirler.

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2i & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} = \frac{1}{5} (2i - 2i) = 0$$

Cevap : 2 $dx/dt = v$ atamasıyla diferansiyel denklem şu hale gelir.

$$m \frac{dv}{dt} + bv - mg = 0$$

Bu diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılabilir.

$$\frac{mdv}{mg - bv} = dt \quad \Rightarrow \quad m \int \frac{-bdv}{mg - bv} = -b \int dt$$

Her iki integral de kolayca çözülebilir.

$$\ln(mg - bv) = \frac{c_1 - bt}{m} \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{mg}{b} - e^{\frac{c_1 - bt}{m}}$$

Başlangıç şartlarından birini uygulayarak integral sabiti c_1 'i belirleyelim.

$$v(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{c_1/m} = \frac{mg}{b} \quad \Longrightarrow \quad v(t) = \frac{mg}{b} (1 - e^{-bt/m})$$

Şimdi de $dx/dt = v$ kullanarak $x(t)$ bağımlı değişkenini hesaplayalım.

$$x = \int v dt = \frac{mg}{b} \int (1 - e^{-bt/m}) dt = \frac{mg}{b} t + \frac{m^2 g}{b^2} e^{-bt/m} + c_2$$

Diğer başlangıç şartını kullanarak ikinci integral sabiti c_2 'yi belirleyelim.

$$x(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 + \frac{m^2 g}{b^2} + c_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = -\frac{m^2 g}{b^2}$$

Sonuçta başlangıç değer probleminin tam çözümü şöyle olur.

$$x(t) = \frac{mg}{b} t - \frac{m^2 g}{b^2} (1 - e^{-bt/m})$$

Cevap : 3 $x = 0$ noktası düzgün tekil nokta olduğu için $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+m}$ önerelim. Bunu diferansiyel denkleme yerleştirelim.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4(n+m)(n+m-1)c_n x^{n+m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+m)c_n x^{n+m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+m} = 0$$

Ortak paranteze alalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\{(n+m)[2(n+m)-1]\}c_n x^{n+m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+m} = 0$$

Birinci toplamda $n \rightarrow n+1$ yazalım. Bu durumda yeni toplam $n = -1$ den başlar.

$$\sum_{n=-1}^{\infty} 2\{(n+m+1)[2(n+m+1)-1]\}c_{n+1} x^{n+m} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+m} = 0$$

Birinci toplamda $n = -1$ yazıp, toplamı $n = 0$ dan başlatalım.

$$2C_0 m(2m-1)x^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+m+1)(2n+2m+1)c_{n+1} + c_n]x^{n+m} = 0$$

Buradan indis kökleri ve tekrarlar bağıntısı şöyle olur.

$$m_1 = 0, \quad m_2 = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad c_{n+1} = \frac{-c_n}{2(n+m+1)(2n+2m+1)}$$

Her bir indis kökü bir çözüm verir. Buna göre birinci çözüm için tekrarlar bağıntısında $m = 0$ yerleştiririz:

$$c_{n+1} = \frac{-c_n}{(2n+1)(2n+2)}$$

O halde, $c_1 = -c_0/2!$, $c_2 = c_0/4!$, \dots olur. Sonuçta,

$$y_1(x) = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 \left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - + \dots \right) = c_0 \cos \sqrt{x}$$

İkinci çözüm için tekrarlama bağıntısında $m = 1/2$ yerleştiririz:

$$c_{n+1} = \frac{-c_n}{(2n+2)(2n+3)}$$

O halde, $c_1 = -c_0/3!$, $c_2 = C_0/5!$, \dots olur ve sonuçta,

$$y_2(x) = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 \left(x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3!} + \frac{x^{5/2}}{5!} - + \dots \right) = c_0 \sin \sqrt{x}$$

Cevap : 4 Bu notasyonda ve periyotta Fourier serisi şöyledir.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right]$$

Burada $f(x) = x^2$ için $-L \leq x \leq +L$ aralığında a_0 , a_n ve b_n hesap edelim.

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} x^2 dx = \frac{1}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{L^2}{3}$$

a_n için hesap yapalım.

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} x^2 \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

Burada $u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$ ve $dv = \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \rightarrow v = \frac{L}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$.

$$a_n = \frac{-4}{n\pi} \int_0^L x \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

Tekrar $u = x \rightarrow du = dx$ ve $dv = \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \rightarrow v = \frac{-L}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$.

$$a_n = \left(\frac{2L}{n\pi} \right)^2 \cos(n\pi) = \left(\frac{2L}{n\pi} \right)^2 (-1)^n$$

Simetrik aralık ve çift fonksiyon olduğu için $b_n = 0$ olur.

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} x^2 \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = 0$$

Sonuçta,

$$x^2 = \frac{L^2}{3} + \left(\frac{2L}{\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$