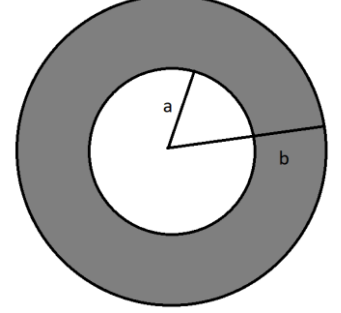


ELEKTROMANYETİK TEORİ:

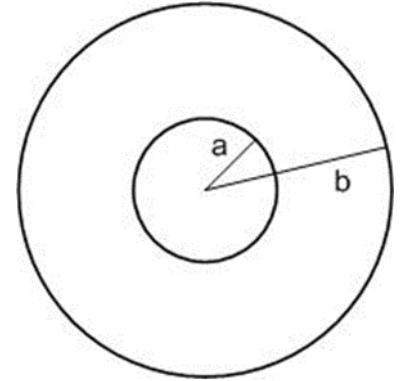
S1	S2	T

1. İç yarıçapı a , dış yarıçapı b olan kalın bir küresel kabuk, $a < r < b$ olmak üzere $\rho = k r^2$ ifadesiyle değişen bir yük taşımaktadır. Gauss yasasını kullanarak, $r < a$, $a < r < b$, ve $b < r$ için elektrik alanı hesaplayınız.



2. a ve b yarıçaplarına sahip ($a < b$) eş-merkezli iki küresel kabuktan içteki $V_a(a, \theta) = V_0 P_3(\cos \theta)$, dıştaki $V_b(b, \theta) = V_0 P_5(\cos \theta)$ potansiyellerinde tutulmaktadır. Burada P_n 'ler Legendre polinomlarıdır. Kabuklar arasında kalan bölgede (yani; $a \leq r \leq b$) elektrik potansiyeli, Laplace denkleminin küresel koordinatlardaki çözümünden yola çıkarak hesaplayınız. (Boylamsal simetri olduğuna dikkat ediniz.)

$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$



$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

İSTATİSTİK MEKANİĞİ:

S1	S2	T

- Başlangıçta T_0 sıcaklığına sahip tek atomlu bir mol gazın hacmi, V_0 'dan $2V_0$ 'a;
 - Sabit bir sıcaklıkta
 - Sabit bir basınçtaÇıkartılırsa, genleşme sırasında yapılan işi (W) ve gaz tarafından emilen ısıyı (Q) hesaplayınız?
- İki boyutlu kutudaki tek parçacık için girilebilir durum sayısını bulunuz?

KUANTUM MEKANİĞİ:

S1	S2	T

1. V_0 pozitif bir sabit olmak üzere $V(x) = -V_0\delta(x)$ çekici bir delta potansiyeline bağlı bir parçacık için;

a) Negatif enerji durumunda bu parçacığın tek bir bağlı duruma sahip olduğunu göstererek bağlanma enerjisi ve dalga fonksiyonunu bulunuz.

b) Parçacığın $-a \leq x \leq +a$ aralığında bulunma olasılığını bulunuz.

c) $E > 0$ durumunda dalga fonksiyonunu ve sınır koşullarının verdiği denklemleri yazınız.

2. Bir d elektronunu ($\ell = 2$, $s = \frac{1}{2}$) düşünelim.

a) Tüm bağlanımlı durumları $|jm_j\rangle \equiv |jm_j; \ell s\rangle$ ve bağlanımsız durumları $|\ell m_\ell\rangle |sm_s\rangle$ yazınız.

b) Eğer elektron $|\frac{5}{2} \frac{3}{2}\rangle$ durumunda ise hangi m_ℓ değerlerine hangi olasılıklarla sahip olabilir?

c) Eğer elektron $|21\rangle |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ durumunda ise $\langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle = ?$

KLASİK MEKANİK:

S1	S2	T

1. Uzunluğu b olan ucunda m kütlesi asılı bir basit sarkaç, dikey olarak yukarı doğru doğru sabit a ivmesi ile hareket eden kütesiz bir desteğe tutturulmuştur. Sistemin kinetik ve potansiyel enerjisini yazarak hareket denklemini bulunuz.

2. Dünyanın merkezinden geçecek şekilde açılan bir deliğe bir parçacık bırakılmıştır. Dönme etkilerini ihmal ederek, Dünya'nın kütle dağılımının düzgün olduğu kabul edilirse, hareketin basit harmonik hareket olduğunu gösteriniz. Salınımın periyodunu bulunuz.

SEÇMELİ:

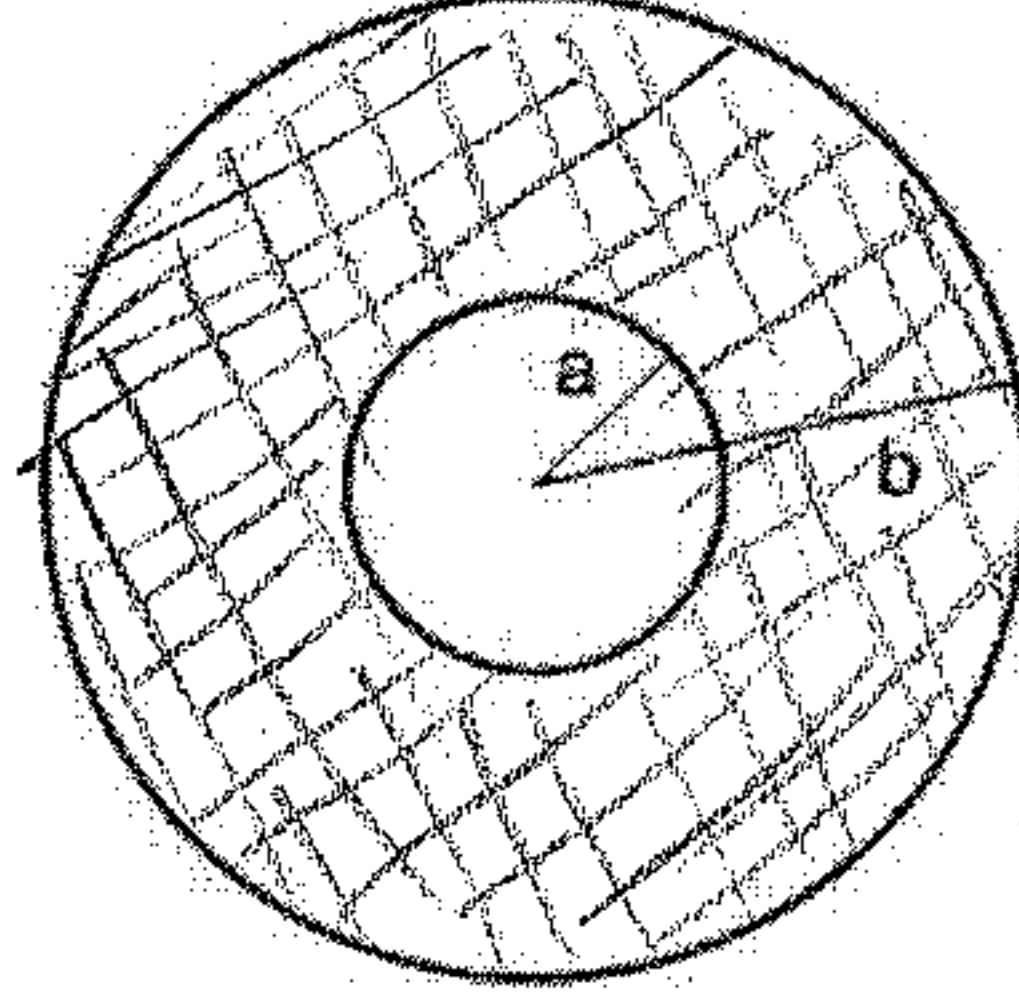
S1	S2	T

1. $\mathbb{R}^3$ içine gömülü H^2 manifoldu (2-hiperbol) $z^2 - x^2 - y^2 = a^2$ denklemiyle tanımlanır. Burada a pozitif bir sabittir. $x = a \sinh \psi \cos \phi$, $y = a \sinh \psi \sin \phi$ ve $z = a \cosh \psi$ koordinat dönüşümüyle $x^\mu = (\psi, \phi)$, $\mu = 1, 2$, koordinat haritasında H^2 manifoldu ve $g = dx^2 + dy^2 - dz^2$ metriği için Riemann eğrilik skalerini hesaplayınız.

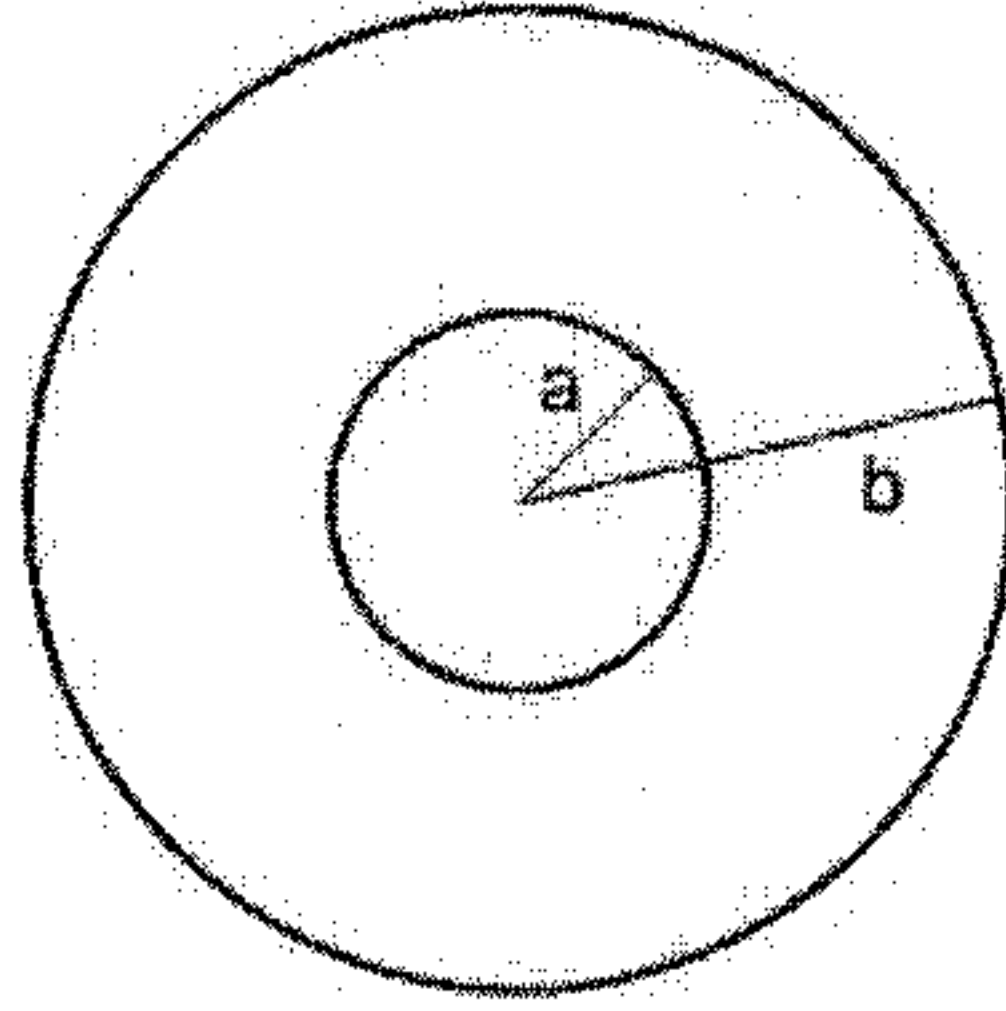
2. $\mathbb{R}^3$ 'de $x^\mu = (x^1, x^2, x^3) = (r, \phi, z)$ ile gösterilen silindirik koordinat haritasında
$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = dr \otimes dr + r^2 d\phi \otimes d\phi + dz \otimes dz$$
metriği yardımıyla bir $f(r, \phi, z)$ fonksiyonunun, A 1-formunun ve B 2-formunun dış türevini hesaplayınız. Sonuçları gradyan, diverjans ve rotasyonel cinsinden ifade ediniz.

EMT

1. İç yarıçapı a , dış yarıçapı b olan kalın bir küresel kabuk, $a < r < b$ olmak üzere $\rho = k r^2$ ifadesiyle değişen bir yük taşımaktadır. Gauss yasasını kullanarak, $r < a$, $a < r < b$, ve $b < r$ için elektrik alanı hesaplayınız.



2. a ve b yarıçaplarına sahip ($a < b$) eş-merkezli iki küresel kabuktan içteki $V_a(a, \theta) = V_a P_3(\cos \theta)$, dıştaki $V_b(b, \theta) = V_b P_5(\cos \theta)$ potansiyellerinde tutulmaktadır. Burada P_n 'ler Legendre polinomlarıdır. Kabuklar arasında kalan bölgede (yani; $a \leq r \leq b$) elektrik potansiyeli, Laplace denkleminin küresel koordinatlardaki çözümünden yola çıkarak hesaplayınız. (Boylamsal simetri olduğuna dikkat ediniz.)



$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

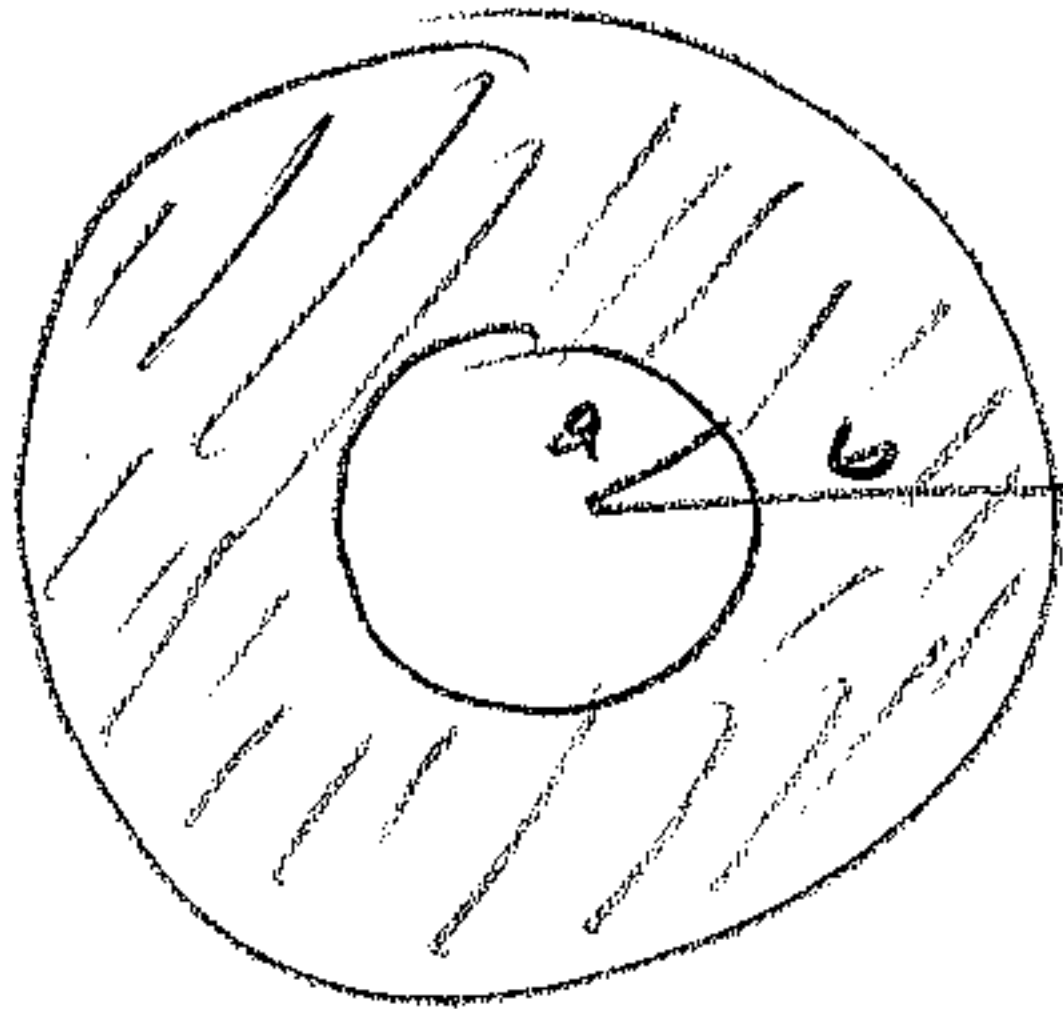
PAU Fizik Doktora

Yeterlilik Sınavı

E.M.T. Cevapları 23.12.2021

1

1.



$$\rho = kr^2 \quad a \leq r \leq b$$

$$Q_T = k \int_a^b r^4 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

$$Q_T = \frac{k \cdot 4\pi (b^5 - a^5)}{5}$$

$$\rho(r, \theta, \phi) = \rho(r)$$

küresel simetrik yük dağılımı var

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{ik}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} \parallel d\vec{a} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{a} = E da$$

Gauss Yüzeyinde $|\vec{E}| = s.b$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = E \oint da = E 4\pi r^2$$

$$\boxed{r < a \Rightarrow Q_{ik} = 0 \Rightarrow E 4\pi r^2 = 0}$$
$$\vec{E} = 0$$

$$a \leq r \leq b \Rightarrow Q_{\text{enc}} = k \int_a^r r^4 dr \sin \theta d\theta d\varphi \quad (2)$$

$$Q_{\text{enc}} = \frac{k 4\pi (r^5 - a^5)}{5}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot 4\pi r^2 = \frac{k 4\pi (r^5 - a^5)}{5\epsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{k}{5\epsilon_0} \frac{(r^5 - a^5)}{r^2} \hat{r} \quad a \leq r \leq b}$$

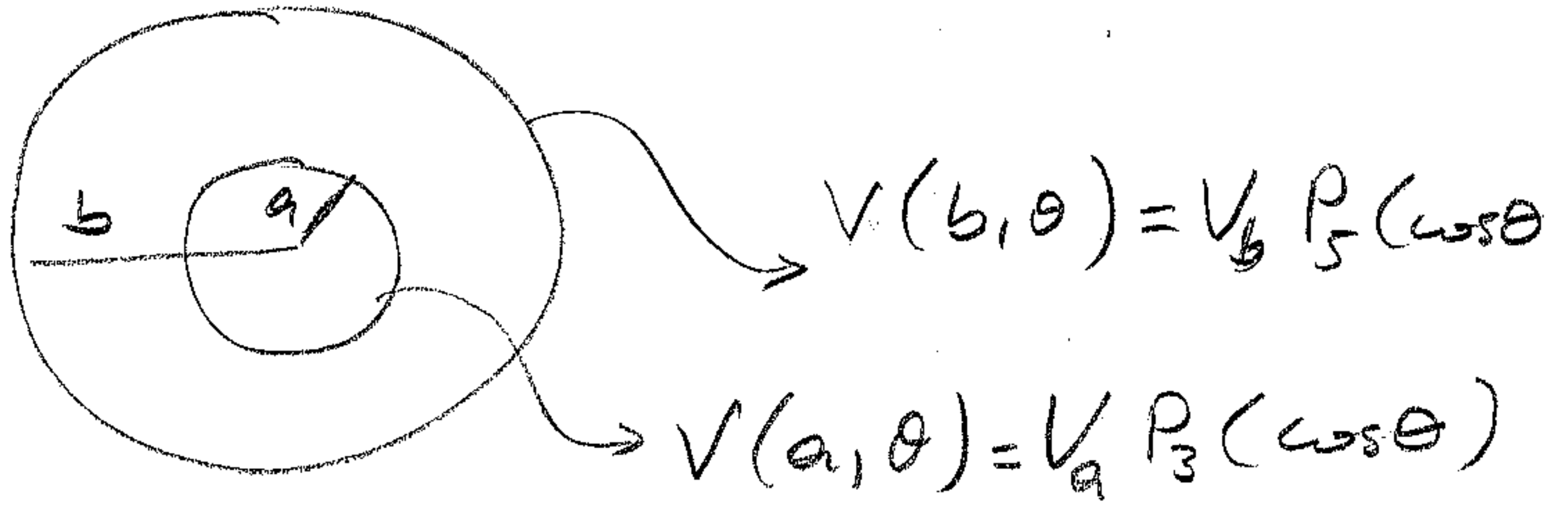
$$b < r \Rightarrow Q_{\text{enc}} = Q_T = \frac{k 4\pi (b^5 - a^5)}{5}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot 4\pi r^2 = \frac{k 4\pi (b^5 - a^5)}{5\epsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{k}{5\epsilon_0} \frac{(b^5 - a^5)}{r^2} \hat{r} \quad b < r}$$

2_

③



$$a \leq r \leq b \quad \text{işin} \quad V(r, \theta) = ?$$

$$\nabla^2 V = 0 \quad (a \leq r \leq b)$$

$$V(r, \theta, \phi) = V(r, \theta) \quad (\text{boyamsal simetri})$$

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

$r=a$ da

$$V(r=a, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l a^l + \frac{B_l}{a^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) = V_a P_3(\cos \theta)$$

her iki taraf $P_l(\cos \theta)$ ile çarpılıp $0-\pi$ aralığında integre edilirse;

$$\left(A_3 a^3 + \frac{B_3}{a^4} \right) = V_a \quad \text{bulunur, } l=3 \text{ için}$$

$$\left(A_l a^l + \frac{B_l}{a^{l+1}} \right) = 0 \quad \text{bulunur, } l \neq 3 \text{ için.}$$

(4)

Beriadun;

$$B_l = \begin{cases} (V_a - A_3 a^3) a^4 & l=3 \\ -A_l a^{2l+1} & l \neq 3 \end{cases}$$

$$V(r, \theta) = \left(A_3 r^3 + (V_a - A_3 a^3) \frac{a^4}{r^4} \right) P_3(\cos \theta) + \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq 3}}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

$$V(b, \theta) = V_b P_5(\cos \theta) \rightarrow$$

$$= \left(A_3 b^3 + (V_a - A_3 a^3) \frac{a^4}{b^4} \right) P_3(\cos \theta)$$

$$+ \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq 3}}^{\infty} A_l \left(b^l - \frac{a^{2l+1}}{b^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

Benzen şelwde her ilu toraf $P_l(\cos \theta)$ ile
 qarpılıp $0 - \pi$ aralığında integrall olursa;

$$A_l = \begin{cases} 0 & l \neq 3, \text{ ve } l \neq 5 \\ \frac{V_b b^6}{(b^6 - a^6)} & l = 5 \end{cases}$$

 $\Rightarrow$

$$A_l =$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \downarrow \\ \frac{-V_a a^4}{(b^7 - a^7)} \end{array} \right.$$

$$l = 3.$$

(5)

$$V(r, \theta) = V_a \frac{a^4}{r^4} \left(1 - \frac{(r^7 - a^7)}{(b^7 - a^7)} \right) P_3(\cos \theta)$$

$$+ V_b \frac{b^6}{(b^{11} - a^{11})} \left(\frac{r^{11} - a^{11}}{r^6} \right) P_5(\cos \theta)$$

Soru 1.Başlangıçta T_o sıcaklığına sahip tek atomlu bir mol gazın hacmi, V_o 'dan $2V_o$ 'a;

- a) Sabit bir sıcaklıkta
- b) Sabit bir basınçta

Çıkartılırsa, genişleme sırasında yapılan işi (W) ve gaz tarafından emilen ısıyı (Q) hesaplayınız?

CEVAP:

Sabit bir sıcaklıkta yapılan iş (W);

$$W = \int_A^B p dV = RT_o \int_{V_o}^{2V_o} \frac{dv}{v} = RT_o \ln(V)_{V_o}^{2V_o} = RT_o \ln 2$$

Sabit sıcaklıkta iç enerjide meydana gelen değişim sıfır olduğundan, gaz tarafından emilen ısı (Q), yapılan işe eşit olur.

$$Q = W = RT_o \ln 2$$

Sabit bir basınç altında yapılan iş (W);

$$W = \int_{V_o}^{2V_o} p dV = p(2V_o - V_o) = pV_o = RT_o \quad \text{olur. } (pV = nRT)$$

Sabit basınçta iç enerjide meydana gelen artış;

$$\Delta U = C_v \Delta T = \frac{3}{2} R \Delta T = \frac{3}{2} p dV = \frac{3}{2} p V_o = \frac{3}{2} RT_o \quad \text{olarak bulunur.}$$

Sonuç olarak gaz tarafından emilen ısı;

$$Q = \Delta U + W = \frac{3}{2} RT_o + RT_o = \frac{5}{2} RT_o$$

Olur.

Soru 2. İki boyutlu kutudaki tek parçacık için girilebilir durum sayısını bulunuz?

m kütleli parçacığın iki boyutlu bir kutuda serbestçe hareket edebildiğini varsayalım.

Parçacığın enerji düzeyleri;

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2)$$

şeklinde olacaktır. n_x ve n_y büyüklükleri iki boyutlu bir kare yüzeyine yerleşeceklerdir.

$$n_x^2 + n_y^2 = R^2$$

$$R^2 = \frac{2mEL^2}{\hbar^2 \pi^2}$$

$$R = \sqrt{2mE} \left(\frac{L}{\hbar \pi} \right)$$

R yarıçaplı dairenin içinde kalan n_x , n_y değerleri verilen bir E değeri için geçerli olur.

Dairenin $\frac{1}{4}$ 'ü E enerjili durumları oluşturur.

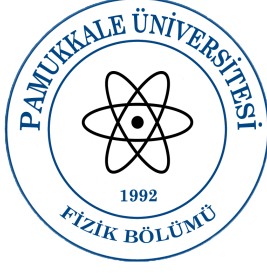
$$\phi(E) = \frac{1}{4} (\pi R^2)$$

$$= \frac{1}{4} \pi (2mE) \frac{L^2}{\hbar^2 \pi^2}$$

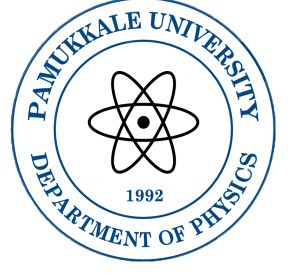
$$\Omega(E) = \frac{d\phi(E)}{dE} \delta E$$

$$\phi(E) = \frac{L^2 m E}{2 \hbar^2 \pi}$$

$$\Omega(E) = \frac{m L^2}{2 \pi \hbar^2} \delta E$$



PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FİZİK BÖLÜMÜ
DOKTORA YETERLİLİK SINAVI



KUANTUM MEKANİĞİ SORULARI VE CEVAPLARI

Soru: $V(x) = -V_0\delta(x)$, $V_0 > 0$ olan çekici bir delta potansiyeline bağlı bir parçacık için;

a) Negatif enerji durumunda bu parçacığın tek bir bağlı duruma sahip olduğunu göstererek bağlanma enerjisi ve dalga fonksiyonunu bulunuz.

b) Parçacığın $-a \leq x \leq a$ aralığında bulunma olasılığını bulunuz.

c) $E > 0$ durumunda dalga fonksiyonunu ve sınır koşullarının verdiği denklemleri yazınız.

Cevap: a) $E < 0$ için Schrödinger denklemi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$x \neq 0$ için $\delta(x)$ sıfır olduğundan

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mV_0}{\hbar^2}\delta(x)\psi(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0$$

$x \neq 0$ için $\delta(x)$ sıfır olduğundan, Schrödinger denklemi $E = -|E| < 0$ yazarak

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{2m|E|}{\hbar^2}\psi(x) = 0$$

Bu denklemin genel çözümü

$$\psi(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

Burada $k = \sqrt{2m|E|}/\hbar$ dır. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x)$ ifadelerinin sonlu olma koşulunu kullanarak çözüm

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_-(x) = Ae^{kx}, & x < 0 \\ \psi_+(x) = Be^{-kx}, & x > 0 \end{cases}$$

haline gelir. Bu dalga fonksiyonu $x = 0$ da sürekli olmalıdır, $\psi_-(0) = \psi_+(0)$. Buradan $A = B$ ve dalga fonksiyonu $\psi(x) = Ae^{-k|x|}$. Schrödinger denkleminin $[-\epsilon, +\epsilon]$ aralığında integralini alırsak,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d\psi_+(x)}{dx} \Big|_{x=+\epsilon} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d\psi_-(x)}{dx} \Big|_{x=-\epsilon} + \frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(0) = 0$$

$k = \frac{mV_0}{\hbar^2}$ bulunur.

$$k = \frac{mV_0}{\hbar^2} = \sqrt{2m|E|}/\hbar$$

eşitliğinden bağlı durum enerjisi $E = -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2}$ bulunur. Dalga fonksiyonu normalize edilirse

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = \frac{A^2}{k} = 1$$

$A = \sqrt{k}$ bulunur. Böylece

$$E = -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2} \quad \psi(x) = \sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}} e^{-\frac{mV_0}{\hbar^2}|x|}$$

b) Parçacığın $-a \leq x \leq a$ aralığında bulunma olasılığı

$$\begin{aligned} P &= \frac{\int_{-a}^a |\psi(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx} = k \int_{-a}^a e^{-2k|x|} dx \\ &= k \int_{-a}^0 e^{-2kx} dx + k \int_0^a e^{-2kx} dx = 1 - e^{-2ka} \\ &= 1 - e^{-2mV_0 a/\hbar^2} \end{aligned}$$

c)

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0$$

denkleminin $E > 0$ için çözümü

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_-(x) = Ae^{ikx} + BAe^{-ikx}, & x < 0 \\ \psi_+(x) = Ce^{ikx}, & x > 0 \end{cases}$$

Burada $k = \sqrt{2mE/\hbar}$ $x = 0$ da $\psi(x)$ in süreklilik koşulu

$$A + B = C$$

Schrödinger denkleminin $[-\epsilon, +\epsilon]$ aralığında integralinde bu dalga fonksiyonunu kullanırsak

$$ik(C - A + B) + \frac{2mV_0}{\hbar^2}C = 0$$

Soru: Bir d elektronunu ($\ell = 2$, $s = \frac{1}{2}$) düşünelim.

(a) Tüm bağlanımlı durumları $|jm_j\rangle$ ve bağlanımsız durumları $|\ell m_\ell\rangle|sm_s\rangle$ yazınız.

(b) Eğer elektron $|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\rangle$ durumunda ise hangi m_ℓ değerlerine hangi olasılıklarla sahip olabilir?

(c) Eğer elektron $|21\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$ durumunda ise $\langle\vec{L}.\vec{S}\rangle = ?$

Cevap: : (a) $\ell = 2$ ve $s = 1/2$ ise $|\ell - s| \leq j \leq \ell + s$ şunu verir; $j = 3/2, 5/2$.

Çiftlenimli durumlar, $|jm_j\rangle$: $|\frac{5}{2}\frac{5}{2}\rangle, |\frac{5}{2}\frac{3}{2}\rangle, |\frac{5}{2}\frac{1}{2}\rangle, |\frac{5}{2}\frac{-1}{2}\rangle, |\frac{5}{2}\frac{-3}{2}\rangle, |\frac{5}{2}\frac{-5}{2}\rangle, |\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle, |\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}\frac{-1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}\frac{-3}{2}\rangle$.

Çiftlenimsiz durumlar, $|\ell m_\ell\rangle|sm_s\rangle$: $|22\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle, |21\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle, |20\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle, |22\rangle|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle, |21\rangle|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle, |20\rangle|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle, |2-1\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle, |2-2\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle, |2-1\rangle|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle, |2-2\rangle|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle$.

(b) $|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\rangle$ çiftlenimli durumunu çiftlenimsiz durumlar cinsinden yazmamız gerekiyor. Bunu yapmanın yolu maksimum durumdan başlayıp sonra $J_- = L_- + S_-$ uygulamaktır.

$$\begin{aligned} \left|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\right\rangle &= |22\rangle \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \\ J_- \left|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\right\rangle &= (L_- |22\rangle) \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle + |22\rangle \left(S_- \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle\right) \\ \left|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{5}} |22\rangle \left|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}} |21\rangle \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \end{aligned}$$

O halde

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|^2 &= \%20 \quad \text{ihtimalle} \quad m_\ell = 2 \\ \left|\frac{2}{\sqrt{5}}\right|^2 &= \%80 \quad \text{ihtimalle} \quad m_\ell = 1 \end{aligned}$$

(c) Şöyle başlayalım.

$$\langle\vec{L}.\vec{S}\rangle = \left(\langle 21|\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle\right) (\vec{L}.\vec{S}) \left(|21\rangle\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle\right)$$

Burada $|21\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$ durumu L^2 ile S^2 nin ortak özvektörüdür. O halde, $\vec{L}.\vec{S}$ operatörünü L^2 ve S^2 cinsinden yazmamız gerekiyor.

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}.\vec{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$$

Buradan şuna ulaşırız.

$$\langle\vec{L}.\vec{S}\rangle = \frac{1}{2} \left(\langle 21|\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \left[\left(J^2 |21\rangle \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \right) - (L^2 |21\rangle) \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle - |21\rangle \left(S^2 \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \right) \right] \right)$$

Köşeli parantezin içindeki ilk terimi düzenlememiz gerekiyor, çünkü $|21\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$ durumu J^2 nin öz durumu değil. Yani, $|21\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$ çiftlenimsiz durumunu çiftlenimli durumlar cinsinden yazmamız gerekiyor. $|21\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$ durumunda $m_\ell = 1$ ve $m_s = 1/2$ olduğu için kesinlikle $m_j = 3/2$ dir. Bu durumda bize gerekli olan çiftlenimli durumlar $|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\rangle$ ve $|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle$ dir. Birincisi yukarıda zaten var. İkincisini hesap edelim. Önce $|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\rangle = a|22\rangle|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle + b|21\rangle|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$ yazarız. Burada $m_j = m_\ell + m_s$ şartını

sağlayan muhtemel bütün çiftlenimsiz durumların lineer toplamını düşünürüz. Sonra $\langle \frac{3}{2} \frac{3}{2} | \frac{3}{2} \frac{3}{2} \rangle = 1$ normalizasyon ile $\langle \frac{5}{2} \frac{3}{2} | \frac{3}{2} \frac{3}{2} \rangle = 0$ dikliğini kullanarak a ve b katsılarını hesap ederiz.

$$\left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} |22\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{-1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{5}} |21\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

Artık bize lazım olan şu bilgiyi hesaplayabiliriz.

$$|21\rangle \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} \left| \frac{5}{2} \frac{3}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{5}} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle$$

Toparlayalım.

$$\begin{aligned} \langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \left\langle \frac{5}{2} \frac{3}{2} \right| - \frac{1}{\sqrt{5}} \left\langle \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right| \right) J^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \left| \frac{5}{2} \frac{3}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{5}} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\langle 21 | \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right| \right) \left[(L^2 |21\rangle) \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \right] - \left(\langle 21 | \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right| \right) \left[|21\rangle (S^2 \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle) \right] \right\} \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \left[\left(\frac{4}{5} \right) \left(\frac{5}{2} \right) \left(\frac{7}{2} \right) + \left(\frac{1}{5} \right) \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{5}{2} \right) - (2)(3) - \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{3}{2} \right) \right] \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \end{aligned}$$

SEÇMELİ DERS (DIŞ CEBİR) SORULARI VE CEVAPLARI

Soru: $\mathbb{R}^3$ içine gömülü $\mathbb{H}^2$ 2-hiperbolü $z^2 - x^2 - y^2 = a^2$ denklemiyle tanımlanır ki burada $a > 0$ bir sabit. $x = a \sinh \psi \cos \phi$, $y = a \sinh \psi \sin \phi$ ve $z = a \cosh \psi$ koordinat dönüşümüyle $x^\mu = (\psi, \phi)$ koordinat haritasında $\mathbb{H}^2$ manifoldu ve $g = dx^2 + dy^2 - dz^2$ metriği için Riemann eğrilik skalerini hesaplayınız.

Cevap: Verilen koordinat dönüşümlerinden

$$dx = a \cosh \psi \cos \phi d\psi - a \sinh \psi \sin \phi d\phi$$

$$dy = a \cosh \psi \sin \phi d\psi + a \sinh \psi \cos \phi d\phi$$

$$dz = a \sinh \psi d\psi$$

hesap edilir. Bu durumda verilen metrik

$$g = dx^2 + dy^2 - dz^2 = a^2 d\psi^2 + a^2 \sinh^2 \psi d\phi^2$$

olur. Buradan ortonormal 1-formlar ve tersleri şöyle yazılır:

$$e^1 = a d\psi \quad , \quad e^2 = a \sinh \psi d\phi \quad \Leftrightarrow \quad d\psi = \frac{e^1}{a} \quad , \quad d\phi = \frac{e^2}{a \sinh \psi}$$

Levi-Civita bağlantı 1-formlarını hesap etmek için de^a hesap edilmelidir.

$$de^1 = 0 \quad , \quad de^2 = a \cosh \psi d\psi \wedge d\phi = \frac{\cosh \psi}{a} e^1 \wedge e^2$$

Bunları $\omega^a_b \wedge e^b = -de^a$ denkleminde yerleştirelim.

$$\omega^1_2 \wedge e^2 = -de^1 = 0$$

$$\omega^2_1 \wedge e^1 = -de^2 = \frac{\cosh \psi}{a} e^2 \wedge e^1$$

Birinci denklem hiç bilgi vermezken ikinci denklemden $\omega^2_1 = \frac{\cosh \psi}{a} e^2$ buluruz. Dolayısıyla

$$\omega^1_2 = -\frac{\cosh \psi}{a} e^2 = -\cosh \psi d\phi$$

Şimdi, Riemann eğrilik 2-formunu $R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b$ hesap edelim. 2-boyutlu Riemann geometrisinde her zaman $\omega^a_c \wedge \omega^c_b = 0$ dır. O halde

$$R^1_2 = d\omega^1_2 = -\sinh \psi d\psi \wedge d\phi = -\frac{1}{a^2} e^1 \wedge e^2$$

Artık Ricci eğrilik 1-formunu $(Ric)_a = \iota_b R^b_a$ bağıntısından

$$(Ric)_1 = \iota_2 R^2_1 = -\frac{e^1}{a^2} \quad , \quad (Ric)_2 = \iota_1 R^1_2 = -\frac{e^2}{a^2}$$

şeklinde hesap ederiz. Son olarak eğrilik skalerini $\mathcal{R} = \iota_a (Ric)^a$ tanımından elde ederiz.

$$\mathcal{R} = \iota_1 (Ric)^1 + \iota_2 (Ric)^2 = -\frac{2}{a^2}$$

Soru: $\mathbb{R}^3$ te $x^\mu = (x^1, x^2, x^3) = (r, \phi, z)$ ile gösterilen silindirik koordinat haritasında

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = dr \otimes dr + r^2 d\phi \otimes d\phi + dz \otimes dz$$

metriği yardımıyla bir $f(r, \phi, z)$ fonksiyonunun, A 1-formunun ve B iki formunun dış türevini hesaplayınız. Sonuçları gradyan, diverjans ve rotasyonel cinsinden ifade ediniz.

Cevap:

$$e^1 = dr, \quad e^2 = r d\phi, \quad e^3 = dz$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \frac{\partial f}{\partial r} e^1 + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} e^2 + \frac{\partial f}{\partial z} e^3$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{i} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

$$A = A_r e^1 + A_\phi e^2 + A_z e^3 = A_r dr + A_\phi r d\phi + A_z dz$$

$$dA = \left(\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - r \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) d\phi \wedge dz + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) dz \wedge dr + \left(\frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) dr \wedge d\phi$$

$$dA = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) e^2 \wedge e^3 + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) e^3 \wedge e^1 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) e^1 \wedge e^2$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{j} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \hat{k}$$

$$B = B_r e^{23} + B_\phi e^{31} + B_z e^{12} = r B_r d\phi \wedge dz + B_\phi dz \wedge dr + r B_z dr \wedge d\phi$$

$$dB = \frac{\partial(r B_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + r \frac{\partial B_z}{\partial z} dr \wedge d\phi \wedge dz$$

$$dB = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r B_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + r \frac{\partial B_z}{\partial z} \right] e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

KLASİK MEKANİK:

1. Uzunluğu b olan ucunda m kütlesi asılı bir basit sarkaç, dikey olarak yukarı doğru doğru sabit a ivmesi ile hareket eden kütlesiz bir desteğe tutturulmuştur. Sistemin kinetik ve potansiyel enerjisini yazarak hareket denklemini bulunuz.



$$x = b \cdot \sin \theta$$

$$y = \frac{1}{2} a t^2 - b \cos \theta$$

$$\dot{x} = b \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\dot{y} = a t + b \dot{\theta} \sin \theta$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (b^2 \dot{\theta}^2 + a^2 t^2 + 2 a b t \dot{\theta} \sin \theta)$$

$$U = m g y = m g \left(\frac{1}{2} a t^2 - b \cos \theta \right)$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (b^2 \dot{\theta}^2 + a^2 t^2 + 2 a b t \dot{\theta} \sin \theta) - m g \left(\frac{1}{2} a t^2 - b \cos \theta \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\frac{d}{dt} [m b^2 \dot{\theta} + m a b t \sin \theta] = m a b t \dot{\theta} \cos \theta - m g b \sin \theta$$

$$b^2 \ddot{\theta} + a b \sin \theta + a b t \dot{\theta} \cos \theta = a b t \dot{\theta} \cos \theta - g b \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{a+g}{b} \sin \theta = 0$$

2. Dünyanın merkezinden geçecek şekilde açılan bir deliğe bir parçacık bırakılmıştır. Dönme etkilerini ihmal ederek, Dünya'nın kütle dağılımının düzgün olduğu kabul edilirse, hareketin basit harmonik hareket olduğunu gösteriniz. Salınımın periyodunu bulunuz.



m üzerindeki kuvvet

$$\vec{F}_r = - G \frac{m M}{r^2}$$

$$M = \rho \cdot V' = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

$$\vec{F}_r = - \frac{G \cdot m}{r^2} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \rho \right)$$

hareket denklemini;

$$\vec{F}_r = m \ddot{r} = - G \frac{m}{r^2} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \rho \right)$$

$$\ddot{r} + \underbrace{\left(\frac{4 \pi \rho G}{3} \right)}_{\omega_0^2} r = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{4 \pi \rho G}{3}$$

$$T = \frac{2 \pi}{\omega_0} = \sqrt{\frac{3 \pi}{\rho G}}$$