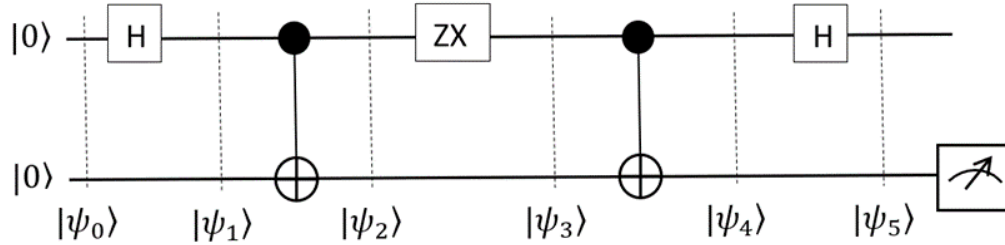


NO: İSİM SOYİSİM:

FİZ 431 KUANTUM HESAPLAMAYA GİRİŞ FİNAL SINAVI
2021 - 2022 Bahar, PAÜ, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

Soru : 1 (20P) İki olasılıklı bir sistemde, sistem %20 olasılıkla $|0\rangle$ durumunda ve %80 olasılıkla $|1\rangle$ durumundadır. Olasılık matrisini, $\hat{\rho}$, yazınız ve $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ olup olmadığını kontrol ediniz.

Soru : 2 (30P) Aşağıdaki kuantum devresinde her aşamadaki durum ketini yazınız. Bu devre süperyoğun kodlama olarak bilinir.



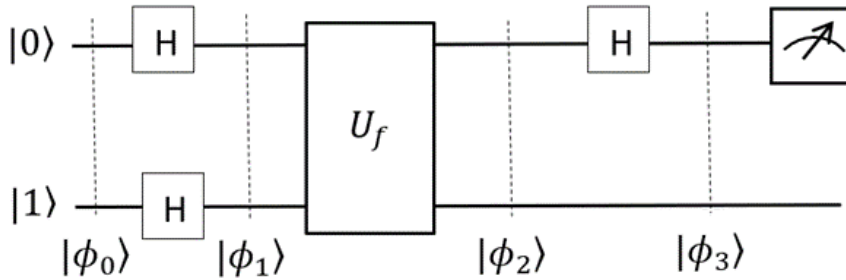
Soru : 3 (50P) (a) $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ fonksiyonu için kuantum kahin operatörü U_f aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$U_f|x, y\rangle = |x, y \oplus f(x)\rangle$$

burada $\oplus$ işareti ikilik sayı sisteminde toplamaı gösterir ve $|x\rangle$ ile $|y\rangle$ birer kubittir. Buna göre

$$U_f \left[|x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] = (-1)^{f(x)} \left[|x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right]$$

olduğunu gösteriniz. (b) $f(0) = f(1)$ ise f sabit fonksiyon, $f(0) \neq f(1)$ ise f dengeli fonksiyon adını alır. Klasik algoritmayla en kısa yoldan f 'nin türüne nasıl karar verebiliriz? (c) Aşağıdaki kuantum devresi yardımıyla f 'nin türüne bir ölçümle karar verebildiğimizi gösteriniz. Buna Deutsch algoritması denir.



C E V A P L A R

Cevap : 1 P_i niceliği, sistemin $|i\rangle$ öz durumunda olma olasılığını göstermek üzere $\hat{\rho} = \sum_i P_i |i\rangle\langle i|$ tanımını kullanalım.

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \frac{20}{100}|0\rangle\langle 0| + \frac{80}{100}|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{5}|0\rangle\langle 0| + \frac{4}{5}|1\rangle\langle 1| \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{4}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{4}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 4/5 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Bunun karesini hesap edelim.

$$\hat{\rho}^2 = \begin{bmatrix} 1/25 & 0 \\ 0 & 16/25 \end{bmatrix} \neq \hat{\rho}$$

O halde, verilen durum saf durum değildir.

Cevap : 2 Baştaki durum $|\psi_0\rangle = |0,0\rangle = |00\rangle = |0\rangle|0\rangle$ olarak verilmiş. Birinci kubiti H 'den geçirelim, ikinciye dokunmayalım.

$$|\psi_1\rangle = (H|0\rangle)|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,0\rangle)$$

Bunu $CNOT$ 'dan geçirelim.

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(CNOT|0,0\rangle + CNOT|1,0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle)$$

Bunun dolanık durum olduğuna dikkat ediniz. Şimdi birinci kubiti ZX 'den geçirelim, ikinciye dokunmayalım.

$$\begin{aligned}|\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(ZX|0\rangle)|0\rangle + (ZX|1\rangle)|1\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}}[(Z|1\rangle)|0\rangle + (Z|0\rangle)|1\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(-|1\rangle)|0\rangle + (|0\rangle)|1\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle - |1,0\rangle)\end{aligned}$$

Bunu $CNOT$ 'dan geçirelim.

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[CNOT|0,1\rangle - CNOT|1,0\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0,1\rangle - |1,1\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|1\rangle$$

Son olarak birinci kubiti H 'den geçirelim, ikinciye dokunmayalım.

$$|\psi_5\rangle = \left(H \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle = (HH|1\rangle)|1\rangle = (H^2|1\rangle)|1\rangle = |1,1\rangle$$

Cevap : 3 (a) Önce $|\phi\rangle \equiv \left[|x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$ diyelim.

$$|\psi\rangle = U_f|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}U_f(|x,0\rangle - |x,1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x,0 \oplus f(x)\rangle - |x,1 \oplus f(x)\rangle)$$

İlk terimde $0 \oplus f(x) = f(x)$ olur. İkinci terimde sadelik için f 'nin tümleyenini $\bar{f}(x) \equiv 1 \oplus f(x)$ tanımlayalım.

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 1, & f(x) = 0 \quad \text{ise} \\ 0, & f(x) = 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

Böylece $|\psi\rangle$ 'yi yeniden yazalım.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x, f(x)\rangle - |x, \bar{f}(x)\rangle) = |x\rangle \frac{|f(x)\rangle - |\bar{f}(x)\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \begin{cases} |x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = (+1)|x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}, & f(x) = 0 \quad \text{ise} \\ |x\rangle \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}} = (-1)|x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}, & f(x) = 1 \quad \text{ise} \end{cases} \end{aligned}$$

Burada

$$(-1)^{f(x)} = \begin{cases} +1, & f(x) = 0 \quad \text{ise} \\ -1, & f(x) = 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

sonucunu kullanırsak,

$$|\psi\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

yazabiliriz. Bu sonucu başladığımız ifade ile birleştirecek istenen cevaba ulaşırız.

$$U_f |\phi\rangle = |\psi\rangle \quad \Rightarrow \quad U_f \left[|x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] = (-1)^{f(x)} \left[|x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right]$$

Bu sonucun bir özdeğer denklemi olduğuna dikkat ediniz.

(b) Klasik algoritmada en az iki adım gereklidir.

1. adım: $f(0)$ hesapla
2. adım: $f(1)$ hesapla, karşılaştır, karar ver.

$f(0)$	$f(1)$	Tür
0	0	Sabit f
1	1	
0	1	Dengeli f
1	0	

(c) Devre $|\phi_0\rangle = |01\rangle = |0\rangle|1\rangle$ durumu ile başlıyor. Ardından her kubit birer tane H 'den geçiriyoruz.

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle &= (H|0\rangle)(H|1\rangle) = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Şimdi de bunu kuantum kahinden geçiriyoruz.

$$\begin{aligned}
|\phi_2\rangle &= U_f|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}U_f \left[|0\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] + \frac{1}{\sqrt{2}}U_f \left[|1\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{f(0)} \left[|0\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] + \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{f(1)} \left[|1\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \\
&= \left(\frac{(-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)
\end{aligned}$$

Birinci satırdan ikinci satıra geçerken (a) şıkkındaki sonucu kullandık. Bu aşamada iki olasılık vardır.

1. Sabit f olduğunda

- $f(0) = f(1) = 0$ ise $(-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle = +(|0\rangle + |1\rangle)$.
- $f(0) = f(1) = 1$ ise $(-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle = -(|0\rangle + |1\rangle)$.

2. Dengeli f olduğunda

- $f(0) = 0, \quad f(1) = 1$ ise $(-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle = +(|0\rangle - |1\rangle)$.
- $f(0) = 1, \quad f(1) = 0$ ise $(-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle = -(|0\rangle - |1\rangle)$.

O halde, $|\phi_2\rangle$ şöyle yazılabilir.

$$|\phi_2\rangle = \begin{cases} \pm \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) & \text{sabit } f \text{ için} \\ \pm \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) & \text{dengeli } f \text{ için} \end{cases}$$

Son olarak bunun ilk kubitini H 'den geçirelim, ikinciye dokunmayalım ve $H^2 = \mathbb{I}$ kullanalım.

$$\begin{aligned}
|\phi_3\rangle &= \begin{cases} \pm \left(H \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) & \text{sabit } f \text{ için} \\ \pm \left(H \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) & \text{dengeli } f \text{ için} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \pm (HH|0\rangle) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) & \text{sabit } f \text{ için} \\ \pm (HH|1\rangle) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) & \text{dengeli } f \text{ için} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \pm |0\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} & \text{sabit } f \text{ için} \\ \pm |1\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} & \text{dengeli } f \text{ için} \end{cases}
\end{aligned}$$

O halde, tek yapmamız birinci kubit bir defa ölçmektir.

0 ölçersek, f sabit

1 ölçersek, f dengeli