NO: ....   İSİM SOYİSİM: ....

FİZ 201 FİZİKTE MATEMATİK METOTLAR-I BÜTÜNLEME SINAVI
2020 - 2021 Güz, Pamukkale Üniversitesi, Denizli

Soru : 1 (*20P*) $0 \leq \theta \leq \pi$ ve $0 \leq \phi \leq 2\pi$ aralığında tanımlı

$$f(\theta, \phi) = \cos^2\theta + \sin\theta\cos\phi + 1$$

fonksiyonunu küresel harmonikler cinsinden yazınız.

Soru : 2 (*20P*) Aşağıdaki integrali Laguerre polinomlarının tekrarlama ve diklik bağıntılarını kullanarak hesaplayınız.

$$I = \int_0^\infty e^{-x} x L_p(x) L_{p+1}(x) dx = ?$$

Soru : 3 (*20P*) Reel kısmı $u(x, y) = e^{-x}\sin y - \frac{x}{x^2+y^2}$ olan $f(z)$ fonksiyonu analitik olabilir mi? Gösteriniz. Eğer "evet" diyorsanız analitik fonksiyonu bulunuz.

Soru : 4 (*20P*) $e^{3zi} = -1 + i$ bağıntısını sağlayan tüm z değerlerini bulunuz.

Soru : 5 (*20P*) $f(z) = 1/z$ fonksiyonuna göre z-düzlemindeki $y = 1/4$ doğrusunun w-düzlemindeki tasvirini bulunuz ve şekil çiziniz. z-düzleminde Şekil 2 de gösterilen taralı şerit şeklindeki bölge w-düzleminde hangi bölgeye haritalanır? Şekil çizerek gösteriniz.

Soru : 6 (*20P*) Aşağıdaki A matrisinin özdeğer ve boylandırılmış özvektörlerini bulunuz.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

BAŞARILAR ...   **07.02.2021**   **Prof.Dr. Muzaffer ADAK**   **Süre: 90 dk**

%%%%%%%%%%%%%% Bazı faydalı olabilecek formüller %%%%%%%%%%%%%%

$$Y_\ell^{-|m|} = (-1)^{|m|}\left(Y_\ell^{|m|}\right)^* \quad , \quad Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \quad , \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \quad , \quad Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1) \quad , \quad Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{16\pi}}\cos\theta\sin\theta e^{i\phi} \quad , \quad Y_2^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{2i\phi}$$

$$L_{p+1}(x) - (2p+1-x)L_p(x) + p^2 L_{p-1} = 0 \;\; , \quad \int_0^\infty e^{-x} x L_p(x) L_m(x) dx = (p!)^2 \delta_{pm}$$

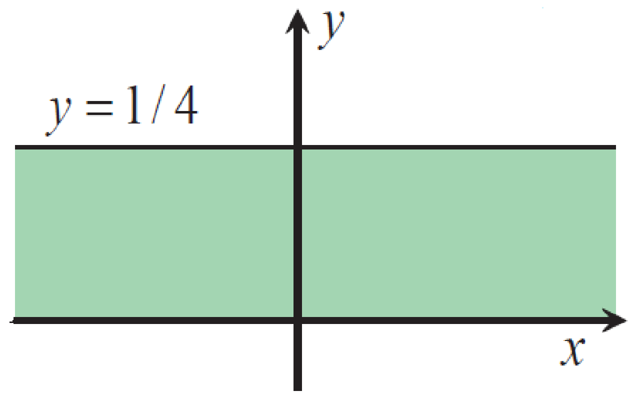

Figure 1: $f(z) = 1/z$ fonksiyonun tanım bölgesi

C E V A P L A R

Cevap : 1 Küresel harmoniklerin açık ifadeleri ek bilgi olarak verilmiş.

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1) \quad \rightarrow \quad \cos^2\theta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{16\pi}{5}}Y_2^0 + \frac{1}{3}$$

Benzer olarak $Y_1^{-1} - Y_1^1$ hesap edersek

$$\sin\theta\cos\phi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(Y_1^{-1} - Y_1^1\right)$$

buluruz. O halde

$$f(\theta,\phi) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{16\pi}{5}}Y_2^0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(Y_1^{-1} - Y_1^1\right) + \frac{4}{3}$$

yazabiliriz. Son terimi de

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \quad \rightarrow \quad 1 = \sqrt{4\pi}Y_0^0$$

yardımıyla yeniden yazarsak sonuç

$$f(\theta,\phi) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{16\pi}{5}}Y_2^0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left(Y_1^{-1} - Y_1^1\right) + \frac{4\sqrt{4\pi}}{3}Y_0^0$$

olur.

Cevap : 2 Ek bilgide verilen Laguerre polinomlarının tekrarlama bağıntısını kullanarak

$$xL_p(x) = -L_{p+1}(x) + (2p+1)L_p(x) - p^2L_{p-1}$$

yazabiliriz. Bunu sorulan integralde yerine yazalım:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty e^{-x}\left[xL_p(x)\right]L_{p+1}(x)dx \\ &= -\int_0^\infty e^{-x}L_{p+1}(x)L_{p+1}(x)dx + (2p+1)\int_0^\infty e^{-x}L_p(x)L_{p+1}(x)dx \\ &\quad -p^2\int_0^\infty e^{-x}L_{p-1}(x)L_{p+1}(x)dx \end{aligned}$$

Ek bilgide verilen diklik bağıntısa göre ikinci ve üçüncü integraller sıfırdır birinci integral de $(p+1)!^2$ dir. O halde sonuç şöyledir:

$$\int_0^\infty e^{-x} x L_p(x) L_{p+1}(x) dx = -(p+1)!^2$$

Cevap : 3 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonunun analitik olabilmesi için hem u hem de v iki-boyutlu Laplace denklemini sağlamalıdır. Kontrol edelim.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}\sin y + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x}\sin y + \frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x}\cos y + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-x}\sin y + \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

Evet! Gerçekten $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ sağlanıyor. O halde, analitik $f(z)$ vardır. Şimdi, $v(x,y)$ belirlemek için Cauchy-Riemann şartlarını kullanalım.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \rightarrow \quad v(x,y) = -\int \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] \partial x = -\int \left[e^{-x}\cos y + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right] \partial x$$
$$v(x,y) = e^{-x}\cos y + \frac{y}{x^2+y^2} + C(y)$$

x e göre kısmi türevden integrale geçtiğimiz için integral sabiti y ye bağlı olabilir: $C = C(y)$. Şimdi de C nin y bağımlılığını belirlemek için Cauchy-Riemann şartlarından diğerini kullanalım:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \frac{dC(y)}{dy} = 0$$

Yani $C(y)$ niceliği y bağlı değil, gerçekten bir sabitmiş! O halde,

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{-x}\sin y - \frac{x}{x^2+y^2} + i\left[e^{-x}\cos y + \frac{y}{x^2+y^2}\right] + C \\ &= e^{-x} i(\cos y - i\sin y) - \frac{x-iy}{x^2+y^2} + C \\ &= ie^{-x}e^{-iy} - \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} + C \\ &= ie^{-(x+iy)} - \frac{1}{x+iy} + C \\ &= ie^{-z} - \frac{1}{z} + C \end{aligned}$$

Cevap : 4 Öncelikle $-1+i$ kompleks sayısını $re^{i(\theta+2\pi k)}$ biçiminde yazalım.

$$r = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \quad , \quad \theta = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

O halde

$$e^{3zi} = 2^{1/2} e^{i(\frac{3\pi}{4}+2\pi k)} \quad \rightarrow \quad 3zi = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$$

yazabiliriz. Son olarak z yi çekersek sonuç şu olur.

$$z = \left(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{i}{6}\ln 2 \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Cevap : 5 Öncelikle u ile v leri x ve y cinsinden yazalım.

$$w = \frac{1}{z} \quad \rightarrow \quad u + iv = \frac{1}{x+iy} \quad \rightarrow \quad u + iv = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

O halde,

$$u = \frac{x}{x^2+y^2} \quad , \quad v = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

Burada her ikisinde $y = 1/4$ yazalım.

$$u = \frac{x}{x^2+1/16} \quad , \quad v = \frac{-1/4}{x^2+1/16}$$

Şimdi de taraf tarafa bölelim.

$$x = \frac{-u}{4v}$$

Bu sonucu bir üst satırda ikisinden birinde kullanırsak u ile v arasında

$$u^2 + v^2 + 4v = 0$$

bağıntısını elde ederiz. Bunu da tam kare biçiminde yazarsak

$$u^2 + (v+2)^2 = 2^2$$

sonucuna ulaşırız ki bu denklem merkezi $(u, v) = (0, -2)$ noktasında olan 2 br yarıçaplı bir çemberi tanımlar. Buna göre şeridin iç bölgesi bu dairenin dış bölgesine haritalanmıştır, bkz Şekil 2.

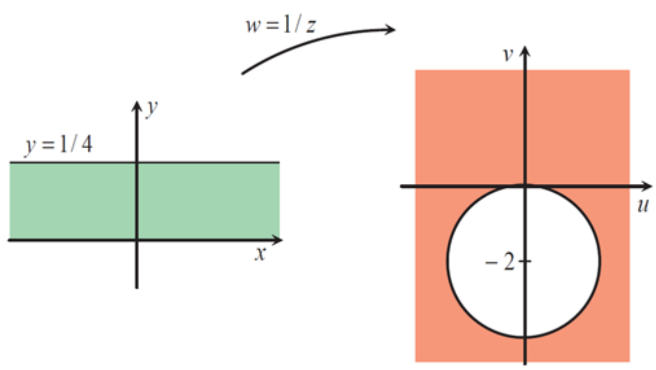

Figure 2: $f(z) = 1/z$ fonksiyonun tanım bölgesi

Cevap : 6 Önce özdeğer denklemini hatırlayalım: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ veya $(A - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = 0$ olarak ifade edelim. Bunun matris biçimi şöyle olur.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

Sıfırdan farklı a, b, c için katsayılar matrisinin determinantı sıfır omalıdır.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 0, \pm\sqrt{2}$$

Önce $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ özdeğerine karşı gelen $\vec{x}_1$ özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad c = a = \frac{-b}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Şimdi de $\lambda_2 = 0$ özdeğerine karşı gelen $\vec{x}_2$ özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad c = -a \; , \;\; b = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Son olarak $\lambda_3 = +\sqrt{2}$ özdeğerine karşı gelen $\vec{x}_3$ özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad c = a = \frac{b}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}$$