

NO: İSİM SOYİSİM:

FİZ 201 FİZİKTE MATEMATİK METOTLAR FİNAL SINAVI
2023 - 2024 Güz, Fizik Bölümü, Pamukkale Üniversitesi, Denizli

Soru : 1 (20P) (a) Aşağıdaki A matrisinden hermitsel $B = \frac{1}{2}(A + A^\dagger)$ matrisi elde ediniz. (b) B 'nin izini ve determinatını hesaplayınız. (c) B 'nin minörlerini hesaplayınız. (d) B 'nin tersini yazınız.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soru : 2 (20P) Aşağıdaki diferansiyel denklemlerde bağımsız değişkeni, bağımlı değişkeni, denklemin mertebesini ve denklemin derecesini alttaki tabloda uygun yerlere yazınız.

(a) $y^{(3)} - xy - e^x + 1 = 0$, (b) $s^2 \frac{d^2t}{ds^2} + st \frac{dt}{ds} = s + \pi$, (c) $3 \left(\frac{d^4b}{da^4} \right)^2 + 2 \left(\frac{db}{da} \right)^{10} + b^7 - b^5 = 0$

	Bağımsız Değişken	Bağımlı Değişken	Mertebe	Derece
(a)				
(b)				
(c)				

Soru : 3 (20P) $x'' + 2x' + 26x = 82 \cos(4t)$; $x(0) = 6$, $x'(0) = 0$, başlangıç değer problemini çözünüz.

Soru : 4 (20P) $a > 0$ bir sabit olmak üzere $f(x) = e^{-ax^2}$ fonksiyonunu $-\infty \leq x \leq +\infty$ aralığında normalize ediniz. Normalize $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz.

Soru : 5 (20P) Laguerre polinomlarının tekrarılama bağıntısını ve diklik bağıntısını biliyoruz.

$$(p+1)L_{p+1}(x) - (2p+1-x)L_p(x) + pL_{p-1}(x) = 0$$
$$\int_0^\infty e^{-x} L_p(x) L_m(x) dx = \delta_{pm}$$

Bu bilgiler yardımıyla aşağıdaki integrali hesap ediniz.

$$I = \int_0^\infty e^{-x} x L_p(x) L_{p+1}(x) dx$$

BAŞARILAR ... 17.01.2024 Saat: 10.00 - 11.30 Prof.Dr. Muzaffer ADAK

C E V A P L A R

Cevap : 1

(a)

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \frac{1}{2}(A + A^\dagger) = \begin{pmatrix} 0 & -i & 1 \\ i & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\text{Tr}B = 0 + (-1) + 0 = -1$$

$$\det B = (0) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - (-i) \begin{vmatrix} i & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} i & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 = 1$$

(c)

$$\begin{aligned} \text{Min}[B_{11}] &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, & \text{Min}[B_{12}] &= \begin{vmatrix} i & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, & \text{Min}[B_{13}] &= \begin{vmatrix} i & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \\ \text{Min}[B_{21}] &= \begin{vmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, & \text{Min}[B_{22}] &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, & \text{Min}[B_{23}] &= \begin{vmatrix} 0 & -i \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = i, \\ \text{Min}[B_{31}] &= \begin{vmatrix} -i & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, & \text{Min}[B_{32}] &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{vmatrix} = -i, & \text{Min}[B_{33}] &= \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & -1 \end{vmatrix} = -1 \end{aligned}$$

(d)

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} \text{Min}[B_{11}] & -\text{Min}[B_{21}] & \text{Min}[B_{31}] \\ -\text{Min}[B_{12}] & \text{Min}[B_{22}] & -\text{Min}[B_{32}] \\ \text{Min}[B_{13}] & -\text{Min}[B_{23}] & \text{Min}[B_{33}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & i \\ 1 & -i & -1 \end{pmatrix}$$

Cevap : 2

	Bağımsız Değişken	Bağımlı Değişken	Mertebe	Derece
(a)	x	y	3	1
(b)	s	t	2	1
(c)	a	b	4	2

Cevap : 3 Homojen çözüm: $x = e^{rt} \Rightarrow r^2 + 2r + 26 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm 5i$

$$x_h = e^{-t}(c_1 \cos 5t + c_2 \sin 5t)$$

Özel çözüm: $x_o = A \cos 4t + B \sin 4t$. Türevlerini alalım.

$$x'_o = -4A \sin 4t + 4B \cos 4t \Rightarrow x''_o = -16A \cos 4t - 16B \sin 4t$$

Bunları inhomojen denkleme yerleştirerek şunu elde ederiz.

$$A = 5 \quad \text{ve} \quad B = 4 \quad \Rightarrow \quad x_o = 5 \cos 4t + 4 \sin 4t$$

Genel çözüm: $x = x_c + x_p$ ve türevi şöyle olur.

$$x(t) = e^{-t}(c_1 \cos 5t + c_2 \sin 5t) + 5 \cos 4t + 4 \sin 4t$$

$$x'(t) = e^{-t}[(5c_2 - c_1) \cos 5t - (5c_1 + c_2) \sin 5t] - 20 \sin 4t + 16 \cos 4t$$

Başlangıç şartlarıyla c_1 ve c_2 yi belirleyelim.

$$(i) \quad x(0) = 6 \quad \Rightarrow \quad c_1 + 5 = 6 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1$$

$$(ii) \quad x'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5c_2 - c_1 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -3$$

Cevap : 4 Normalizasyon $(f(x), f(x)) = 1$, yani $N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = 1$ burada N normalizasyon katsayısı.

$$N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ax^2} dx = N^2 \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \quad \Rightarrow \quad N = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-ax^2}$$

Şimdi de Fourier dönüşüm integralini yazalım ve hesap edelim.

$$\begin{aligned} g(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 - ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left[\left(x + \frac{ik}{2a}\right)^2 - \left(\frac{ik}{2a}\right)^2\right]} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x + \frac{ik}{2a}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{k^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \left(\frac{1}{2\pi a}\right)^{1/4} e^{-k^2/4a} \end{aligned}$$

Cevap : 5 Laguerre polinomlarının tekrarlama bağıntısını

$$(p+1)L_{p+1}(x) - (2p+1-x)L_p(x) + pL_{p-1} = 0$$

kullanarak şunu yazarız.

$$xL_p(x) = -(p+1)L_{p+1}(x) + (2p+1)L_p(x) - pL_{p-1}$$

Bunu sorulan integralde yerine yazalım:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} e^{-x} x L_p(x) L_{p+1}(x) dx \\ &= -(p+1) \int_0^{\infty} e^{-x} L_{p+1}(x) L_{p+1}(x) dx \\ &\quad + (2p+1) \int_0^{\infty} e^{-x} L_p(x) L_{p+1}(x) dx \\ &\quad - p \int_0^{\infty} e^{-x} L_{p-1}(x) L_{p+1}(x) dx \end{aligned}$$

Bu aşamada diklik bağıntısını

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_p(x) L_m(x) dx = \delta_{pm}$$

kullanalım. İkinci ve üçüncü integraller sıfırdır birinci integral 1'dir. O halde sonuç şöyledir:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x L_p(x) L_{p+1}(x) dx = -(p+1)$$