

NO: İSİM SOYİSİM:

FİZ 201 FİZİKTE MATEMATİK METOTLAR ARASINAVI
2023 - 2024 Güz, Fizik Bölümü, Pamukkale Üniversitesi, Denizli

Soru : 1 (20P) $\vec{A} = y\hat{i} + x\hat{j} + z\hat{k}$ vektör alanı ve $\phi = xy$ skaler alanı için **a.** $\vec{\nabla}\phi = ?$ **b.** $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = ?$
c. $\vec{\nabla} \times \vec{A} = ?$

Soru : 2 (25P) $e^{z^2i} = -1 - i$ bağıntısını sağlayan tüm z değerlerini bulunuz.

Soru : 3 (25P) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$\text{a. } \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-2x^2} dx = ? \quad \text{ve} \quad \text{b. } \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2x^2} dx = ?$$

Soru : 4 (30P) Aşağıdaki matris verilmiştir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

- a. A 'nın tersini hesap ediniz.
- b. A^\dagger hesap ediniz? A ne tür bir matristir?
- c. A 'nın λ_1 ve λ_2 özdeğerlerini ve bunlara karşılık gelen \vec{x}_1 ve \vec{x}_2 normalize özvektörlerini bulunuz.
- d. Övektörler yardımıyla U matrisini oluşturunuz ve $U^\dagger U = \mathbb{I}$ olduğunu gösteriniz.
- e. $U^\dagger A U$ matrisini hesap ediniz.
- f. $U^\dagger \vec{x}_1$ ve $U^\dagger \vec{x}_2$ vektörlerini hesap ediniz.

BAŞARILAR ... 20.11.2021 Saat: 11.00 Prof.Dr. Muzaffer ADAK

C E V A P L A R

Cevap : 1 Gradyan, diverjans ve rotasyonel tanımlarını kullanalım.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k} = y\hat{i} + x\hat{j} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 + 0 + 1 = 1 \\ \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k} \\ &= (0 - 0)\hat{i} + (0 - 0)\hat{j} + (1 - 1)\hat{k} = 0\end{aligned}$$

Cevap : 2 Öncelikle $-1 - i$ kompleks sayısını $re^{i(\theta+2\pi k)}$, $k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$, biçiminde yazalım.

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad , \quad \theta = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \frac{5\pi}{4} \quad [3. \text{ bölgede}]$$

O halde

$$e^{z^2 i} = 2^{1/2} e^{i\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right)} \quad \Rightarrow \quad z^2 i = \frac{1}{2} \ln 2 + i \frac{\pi}{4} (5 + 8k)$$

yazabiliriz. Şimdi z^2 yi çekersek sonuç şu olur.

$$z^2 = \frac{\pi}{4} (5 + 8k) - \frac{i}{2} \ln 2 = Re^{i(\Theta+2\pi\ell)}, \quad \ell = 0, 1$$

Burada

$$R = \sqrt{\frac{\pi^2(5+8k)^2}{16} + \frac{(\ln 2)^2}{4}} \quad \text{ve} \quad \Theta = \arctan\left[\frac{-2 \ln 2}{(5+8k)\pi}\right]$$

Sonuçta z^2 eşitliğinin 1/2-inci kuvvetini alırsak şu olur.

$$z = \left[\frac{\pi^2(5+8k)^2}{16} + \frac{(\ln 2)^2}{4}\right]^{1/4} e^{\frac{i}{2}\{\arctan[\frac{-2 \ln 2}{(5+8k)\pi}] + 2\pi\ell\}}$$

burada $k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$ ve $\ell = 0, 1$ olabilir.

Cevap : 3 a. Simetrik aralık tek fonksiyon olduğu için sonuç sıfırdır.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-2x^2} dx = 0$$

b. Bilinen integralden faydalanalım.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

burada $\alpha > 0$ olan reel bir parametre. Her iki tarafın α 'ya göre türevini alalım.

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}}$$

Bu eşitlikte $\alpha = 2$ yerleştirerek cevabı elde ederiz.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2x^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Cevap : 4 a. Önce matrisin determinantını, $\det A = 0 - 1 = -1$, sonra da minörlerini (kofaktörlerini) hesap edelim.

$$\min A_{11} = 0, \quad \min A_{12} = -i, \quad \min A_{21} = i, \quad \min A_{22} = 1$$

Artık ters matrisi oluşturabiliriz.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \min A_{11} & -\min A_{21} \\ -\min A_{12} & \min A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$$

b. Bir matrisin hermitsel eşleniği demek matrisin transpozunun kompleks eşleniğini hesaplamak demektir.

$$A^\dagger = (A^T)^* = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = A$$

Yani, A hermitsel bir matristir.

c. Özdeğer denklemini hatırlayalım: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ veya $(A - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = 0$. Bunun matris biçimi şöyle olur.

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & i \\ -i & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

a ve b bileşenlerinin her ikisinin de sıfır olmaması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & i \\ -i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Önce $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ özdeğerine karşı gelen \vec{x}_1 özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & i \\ -i & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = ib_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Normalizasyon } |a_1|^2 + |b_1|^2 = 1. \quad \text{Birlikte } \vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{4 + \sqrt{5}}} \begin{pmatrix} \frac{i(1+\sqrt{5})}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Şimdi de $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ özdeğerine karşı gelen \vec{x}_2 özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & i \\ -i & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = ib_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Normalizasyon } |a_2|^2 + |b_2|^2 = 1. \quad \text{Birlikte } \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{4 - \sqrt{5}}} \begin{pmatrix} \frac{i(1-\sqrt{5})}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

d. \vec{x}_1 birinci sütun, \vec{x}_2 ikinci sütun olacak biçimde U matrisini oluşturalım ve hermitsel eşleniğini hesap edelim.

$$U = \begin{pmatrix} \frac{i(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{4+\sqrt{5}}} & \frac{i(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{4-\sqrt{5}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad U^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{-i(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{4+\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{5}}} \\ \frac{-i(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{4-\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{5}}} \end{pmatrix}$$

Bu iki matrisi çarparsak $U^\dagger U = \mathbb{I}$ olur. Yani, U üniter matristir.

e. A matrisi yardımıyla elde ettiğimiz bu U matrisi $U^\dagger A U$ bağıntısıyla A matrisini köşegen yapar. Köşegende A 'nın özdeğerleri olur.

$$U^\dagger A U = \begin{pmatrix} \frac{-i(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{4+\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{5}}} \\ \frac{-i(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{4-\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{4+\sqrt{5}}} & \frac{i(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{4-\sqrt{5}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{5}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

f. A 'yı köşegen yapan U matrisleri A 'nın özvektörlerini de doğal vektörler haline getirir.

$$U^\dagger \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-i(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{4+\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{5}}} \\ \frac{-i(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{4-\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} \frac{i(1+\sqrt{5})}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U^\dagger \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-i(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{4+\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{5}}} \\ \frac{-i(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{4-\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} \frac{i(1-\sqrt{5})}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$