

NO: İSİM SOYİSİM:

FIZ 201 FİZİKTE MATEMATİK METOTLAR FİNAL SINAVI
2020 - 2021 Güz, Fizik Bölümü, Pamukkale Üniversitesi, Denizli

Soru : 1 (20P) (a) Aşağıdaki A matrisinin hermitsel olduğunu gösteriniz. (b) A 'nın özdeğerlerini ve her özdeğere karşılık gelen normalize özvektörlerini bulunuz. (c) Bu özvektörlerin ortogonal (dik) olduklarını gösteriniz. (d) Aşağıda verilen \vec{S} vektörünü normalize ederek bulduğunuz ortonormal vektörler cinsinden yazınız ve bileşenleri (katsayıları) hesap ediniz.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \vec{S} = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Soru : 2 (20P) Aşağıdaki diferansiyel denklemlerde bağımsız değişkeni, bağımlı değişkeni, denklemin mertebesini ve denklemin derecesini alttaki tabloda uygun yerlere yazın.

(a) $y^{(3)} - xy - e^x + 1 = 0$, (b) $s^2 \frac{d^2t}{ds^2} + st \frac{dt}{ds} = s + \pi$, (c) $3 \left(\frac{d^4b}{da^4} \right)^2 + 2 \left(\frac{db}{da} \right)^{10} + b^7 - b^5 = 0$

	Bağımsız Değişken	Bağımlı Değişken	Mertebe	Derece
(a)				
(b)				
(c)				

Soru : 3 (20P) $x'' + 2x' + 26x = 82 \cos(4t)$; $x(0) = 6$, $x'(0) = 0$, başlangıç değer problemini çözün.

Soru : 4 (20P) $a > 0$ bir sabit olmak üzere $f(x) = e^{-ax^2}$ fonksiyonunu $-\infty \leq x \leq +\infty$ aralığında normalize ediniz. Normalize $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz.

Soru : 5 (20P) (a) E bir sabit olmak üzere $\psi'' + (E - x^2)\psi = 0$ diferansiyel denkleminin $x = \infty$ daki tekilliğini araştırınız. (b) $\psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} y(x)$ dönüşümüyle

$$y'' - 2xy' + (E - 1)y = 0$$

diferansiyel denklemini elde ediniz. Şimdi bu yeni denklemin $x = 0$ noktası civarındaki genel çözümünü *en az üçer* terim tutarak yazınız. Çözümün bir polinom olması (yani, belirli bir terimden sonra serinin diğer terimlerinin sıfırlanması) için E 'nin sağlaması gereken koşulu bulunuz.

BAŞARILAR ... 22.01.2021 Saat: 16.00-19.00 Prof.Dr. Muzaffer ADAK

C E V A P L A R

Cevap : 1 (a) Eğer A hermitsel ise $A^\dagger = (A^T)^* = A$ olmalıdır.

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^T)^* = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = A$$

(b) Önce özdeğer denklemini hatırlayalım: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ veya $(A - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = 0$ olarak ifade edelim. Bunun matris biçimi şöyle olur.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

a, b bileşenlerinin sıfırdan farklı olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = +1$$

Önce $\lambda_1 = -1$ özdeğerine karşı gelen \vec{x}_1 özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow b_1 = -ia_1$$

$$\text{Normalizasyon } |a_1|^2 + |b_1|^2 = 1. \quad \text{Birlikte } \vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Şimdi de $\lambda_2 = +1$ özdeğerine karşı gelen \vec{x}_2 özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow b_2 = ia_2$$

$$\text{Normalizasyon } |a_2|^2 + |b_2|^2 = 1. \quad \text{Birlikte } \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

(c) \vec{x}_1 ile \vec{x}_2 vektörlerinin biri birine dik olması için skaler çarpımları sıfır olmalıdır.

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \vec{x}_1^\dagger \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + i^2) = 0$$

(d) $\vec{S} = N \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$ burada N normalizasyon katsayısı. Normalizasyon $(\vec{S}, \vec{S}) = 1$.

$$N^2 \begin{pmatrix} -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} = 5N^2 \Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Şimdi bunu \vec{x}_1 ve \vec{x}_2 cinsinden yazalım.

$$\vec{S} = c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2$$

$$c_1 = (\vec{x}_1, \vec{S}) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3i}{\sqrt{10}}$$

$$c_2 = (\vec{x}_2, \vec{S}) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-i}{\sqrt{10}}$$

Cevap : 2

	Bağımsız Değişken	Bağımlı Değişken	Mertebe	Derece
(a)	x	y	3	1
(b)	s	t	2	1
(c)	a	b	4	2

Cevap : 3 Homojen çözüm: $x = e^{rt} \Rightarrow r^2 + 2r + 26 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm 5i$

$$x_h = e^{-t}(c_1 \cos 5t + c_2 \sin 5t)$$

Özel çözüm: $x_o = A \cos 4t + B \sin 4t$. Türevlerini alalım.

$$x'_o = -4A \sin 4t + 4B \cos 4t \Rightarrow x''_o = -16A \cos 4t - 16B \sin 4t$$

Bunları inhomojen denkleme yerleştirerek şunu elde ederiz.

$$A = 5 \quad \text{ve} \quad B = 4 \Rightarrow x_o = 5 \cos 4t + 4 \sin 4t$$

Genel çözüm: $x = x_c + x_p$ ve türevi şöyle olur.

$$x(t) = e^{-t}(c_1 \cos 5t + c_2 \sin 5t) + 5 \cos 4t + 4 \sin 4t$$

$$x'(t) = e^{-t}[(5c_2 - c_1) \cos 5t - (5c_1 + c_2) \sin 5t] - 20 \sin 4t + 16 \cos 4t$$

Başlangıç şartlarıyla c_1 ve c_2 yi belirleyelim.

$$(i) \quad x(0) = 6 \Rightarrow c_1 + 5 = 6 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$(ii) \quad x'(0) = 0 \Rightarrow 5c_2 - c_1 + 16 = 0 \Rightarrow c_2 = -3$$

Cevap : 4 Normalizasyon $(f(x), f(x)) = 1$, yani $N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = 1$ burada N normalizasyon katsayısı.

$$N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2ax^2} dx = N^2 \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \Rightarrow N = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \Rightarrow f(x) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-ax^2}$$

Şimdi de Fourier dönüşüm integralini yazalım ve hesap edelim.

$$\begin{aligned} g(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 - ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left[\left(x + \frac{ik}{2a}\right)^2 - \left(\frac{ik}{2a}\right)^2\right]} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x + \frac{ik}{2a}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{k^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \left(\frac{1}{2\pi a}\right)^{1/4} e^{-k^2/4a} \end{aligned}$$

Cevap : 5 (a) Diferansiyel denklemde $x = 1/z$ ataması yaparak yeni denklemde $z = 0$ noktasını inceleriz.

$$\psi_{zz} + \frac{2}{z}\psi_z + \frac{1}{z^4} \left(E - \frac{1}{z^2} \right) \psi = 0$$

Buna göre

$$\begin{aligned} z = 0 \text{ da } f_1(z) &= \frac{2}{z} = \infty & \text{ fakat } z f_1(z) &= \text{sonlu} \\ z = 0 \text{ da } f_2(z) &= \frac{1}{z^4} \left(E - \frac{1}{z^2} \right) = \infty & \text{ ve } z^2 f_2(z) &= \infty \end{aligned}$$

olduğu için $z = 0$, yani $x = \infty$, düzgün olmayan tekil noktadır.

(b) $\psi(x) = e^{-x^2/2}y(x)$ atamasıyla

$$\psi' = e^{-x^2/2} (y' - xy) \Rightarrow \psi'' = e^{-x^2/2} [y'' - 2xy' + (x^2 - 1)y]$$

olur ve diferansiyel denklem şu hale gelir; $y'' - 2xy'(E - 1)y = 0$. Burada $x = 0$ noktası bu diferansiyel denklem için “düzgün nokta” olduğu için $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ biçiminde seri çözümünü ararız.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

Bunları diferansiyel denkleme yerleştirelim ve x 'in kuvvetlerine göre düzenleyelim.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} [-2n c_n + (E-1) c_n] x^n = 0$$

İlk toplamda $n(n-1)$ çarpanından dolayı toplamı $n = 2$ 'den başlatabiliriz.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (E-1-2n) c_n x^n = 0$$

Şimdi de ilk toplamda toplam indisini $n \rightarrow n+2$ olarak değiştirelim.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (E-1-2n) c_n x^n = 0$$

Artık x^n ortak parantezine alabiliriz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2) c_{n+2} + (E-1-2n) c_n] x^n = 0$$

Buradan tekrarlama bağıntısını yazarız.

$$c_{n+2} = -\frac{E-1-2n}{(n+1)(n+2)} c_n$$

İlk altı katsayıyı yazalım.

$$\begin{aligned} c_0 \neq 0 &\Rightarrow c_2 = -\frac{E-1}{2!} c_0 \Rightarrow c_4 = \frac{(E-1)(E-5)}{4!} c_0 \\ c_1 \neq 0 &\Rightarrow c_3 = -\frac{E-3}{3!} c_1 \Rightarrow c_5 = \frac{(E-3)(E-7)}{5!} c_1 \end{aligned}$$

Sonuçta seri çözümü $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$ şu hale gelir.

$$y(x) = c_0 \underbrace{\left[1 + \frac{1-E}{2!}x^2 + \frac{(1-E)(5-E)}{4!}x^4 + \dots \right]}_{y_1(x)} + c_1 \underbrace{\left[x + \frac{3-E}{3!}x^3 + \frac{(3-E)(7-E)}{5!}x^5 + \dots \right]}_{y_2(x)}$$

$x \rightarrow \pm\infty$ iken hem $y_1(x)$ hem de $y_2(x)$ ıraksaktır. Bu çözümü yakınsak yapmak için sonsuz seri belli bir terimde kesilmelidir. Yani, $E = 2n + 1$ burada $n = 0, 1, 2, \dots$ olmalıdır.

$$E = 1, 5, 9, \dots \quad \text{iken} \quad c_0 \neq 0 \quad \text{ve} \quad c_1 = 0$$

$$E = 3, 7, 11, \dots \quad \text{iken} \quad c_0 = 0 \quad \text{ve} \quad c_1 \neq 0$$