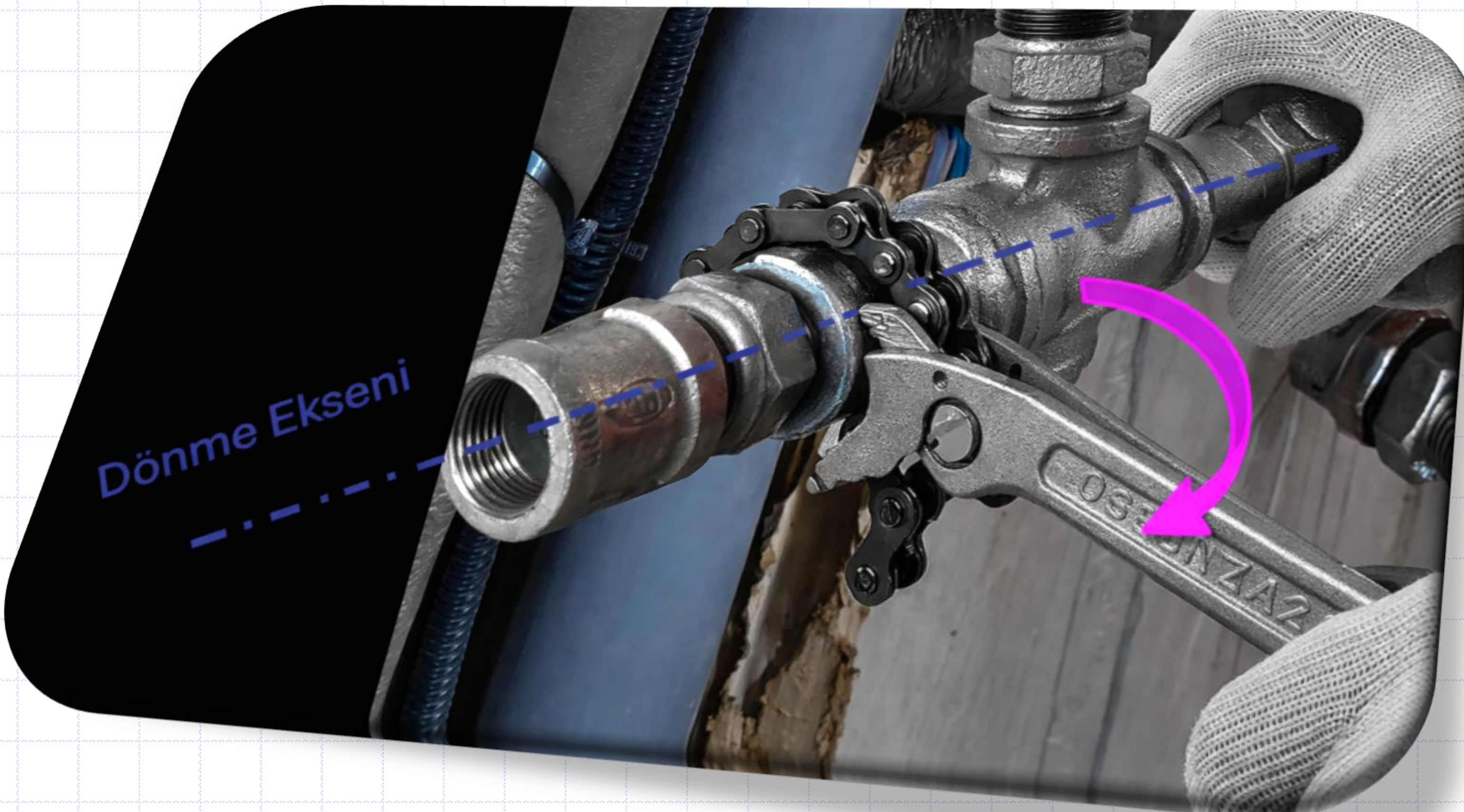
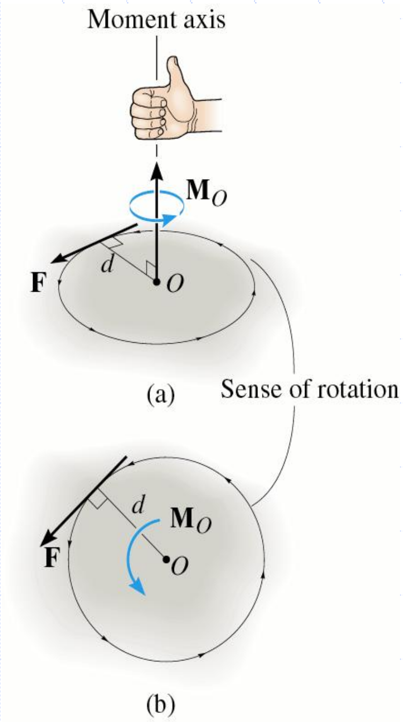
BÖLÜM 3

MOMENT



BİR KUVVETİN BİR EKSENE GÖRE MOMENTİ

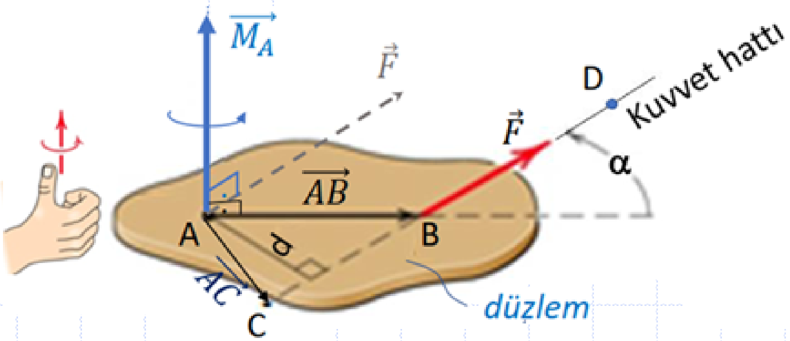
Tanım: Bir kuvvetin tatbik edildiği cismi sabit bir eksen etrafında döndürme eğilimine kuvvetin o eksene göre momenti denir.



- Bir kuvvet bir ***cismi ötelemeye*** zorladığı gibi ***döndürmeye*** de zorlar
- Bu döndürme etkisine ***moment*** denir.
- Moment ***vektörel*** bir büyüklüktür
- Doğrultusu ***dönme düzlemine diktir***
- Yönü sağ el kaidesi ile bulunur

- ***Momentin şiddeti = Kuvvet x Kuvvet kolu*** şeklinde ifade edilir

Bir kuvvetin bir noktaya göre momenti, moment alınan noktadan kuvvet hattı üzerindeki herhangi bir noktaya çizilen konum vektörü ile kuvvetin vektörel çarpımına eşittir.



Yandaki şekle göre; CD hattı üzerindeki F kuvvetinin A noktasına göre momenti şu şekilde bulunur:

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}$$

Moment alınan nokta

Kuvvet hattı üzerindeki herhangi bir nokta

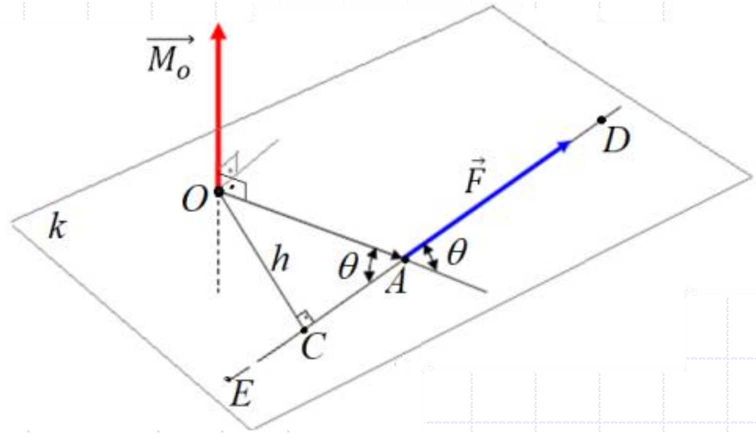
Kuvvet

Moment vektörü k düzlemine diktir. $\vec{F}$ kuvvetini moment alınan noktaya taşıyıp, $\overrightarrow{AB}$ vektörünü sağ elimizle $\vec{F}$ kuvvetini üzerine kapatırsak, baş parmağımızın yönü moment vektörünün yönünü gösterecektir.

Kuvvet hattı üzerinde farklı noktalar da alınabilir ve aynı sonuç bulunur: Yani: $\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AC} \times \vec{F} = \overrightarrow{AD} \times \vec{F}$

Vektörel çarpımda sıra önemlidir. $\overrightarrow{AB}$ yerine $\overrightarrow{BA}$ yazmak veya $\vec{F}$ kuvvetini önce yazmak sonucu etkiler.

Dik uzaklık (d) ile F İn şiddetini çarparsak sadece Momentin şiddetini elde ederiz (M=Fd). Ancak vektörel çarpım yaparsak bu işleme gerek yoktur. Zira momentin vektörel ifadesi belli olunca, şiddeti de hesaplanabilir.



$$\overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{OA} x \vec{F} = \overrightarrow{OC} x \vec{F} = \overrightarrow{OD} x \vec{F} = \overrightarrow{OE} x \vec{F}$$

!!! DİKKAT !!!

OA ve F vektörleri k düzlemi üzerindedir.
$\overrightarrow{M_o}$ vektörü k düzlemine diktir.

Momentin Şiddeti:

Dik uzaklık biliniyorsa: $|\overrightarrow{\mathrm{M_o}}| = |\vec{\mathrm{F}}|\mathrm{h}$

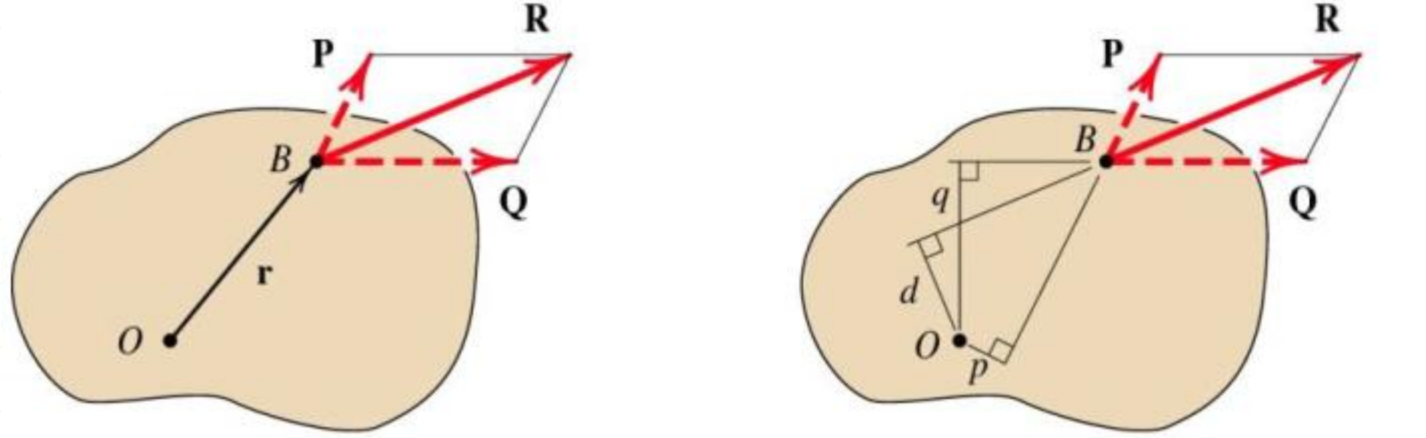
veya $\vec{M} = M_x\vec{\imath} + M_y\vec{\jmath} + M_z\vec{k}$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

F kuvvetinin O noktasına göre momenti, Moment alınan noktadan (O), kuvvet hattı üzerindeki herhangi bir noktaya (A, C, D veya E) çizilen konum vektörü ile kuvvetin vektörel çarpımına eşittir.

VARİGNON TEOREMİ

Bu teorem şunu ifade eder: Bir kuvvetin bir noktaya göre momenti o kuvvetin bileşenlerinin aynı noktaya göre momentlerinin toplamına eşittir.



$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{R}, \qquad \vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}, \qquad \vec{M}_o = \vec{r} \times \left(\vec{P} + \vec{Q}\right) = \vec{r} \times \vec{P} + \vec{r} \times \vec{Q}$$

$\overrightarrow{OB}$

Dik uzaklıkları biliyor muyum !

$$M_o = Rd = Qq - Pp$$

P neden (–) ?

HATIRLATMA

$$\overrightarrow{OA} = \vec{r} = r_x.\vec{i} + r_y.\vec{j} + r_z.\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x.\vec{i} + F_y.\vec{j} + F_z.\vec{k}$$

$$(\,M_o\,) = \vec{r} x \vec{F}$$

$$M_o = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

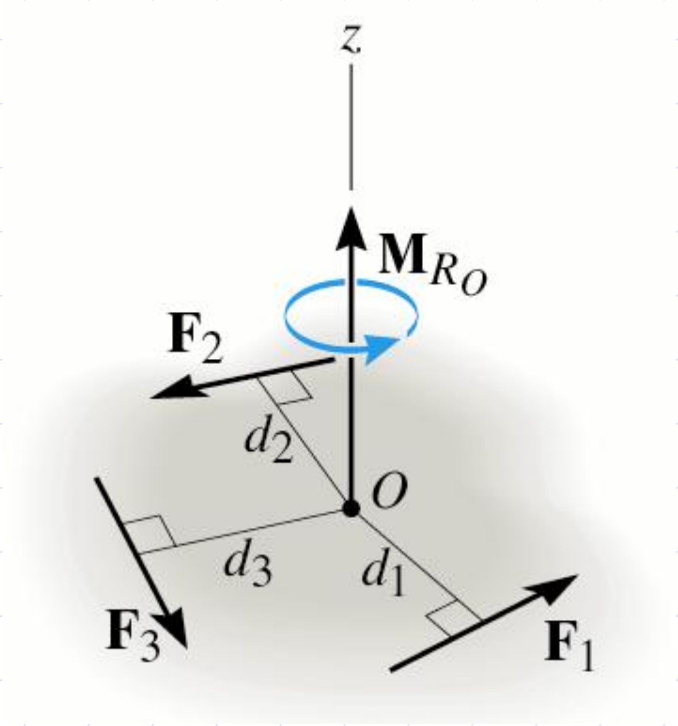
$$M_o = M_x.i + M_y.j + M_z.k$$

$$M_o = (F_z.r_y - F_y.r_z\,)i - (F_z.r_x - F_x.r_z)j + (F_y r_x + F_x r_y)k$$

Momentlerin Toplanması

Sisteme birden çok kuvvetin etkimesi durumunda;

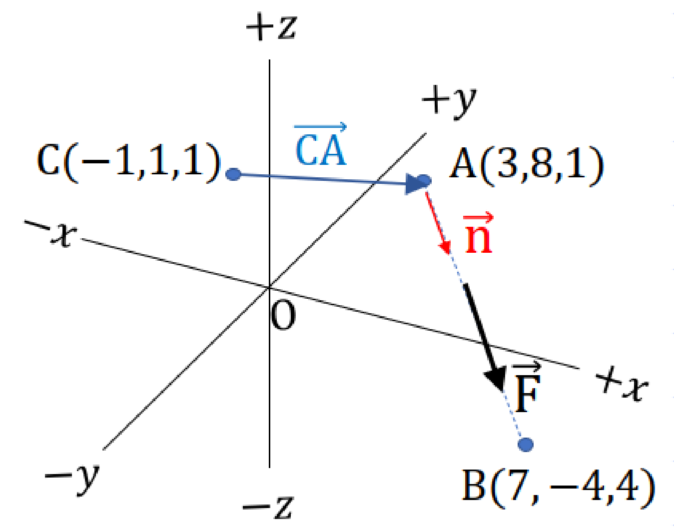
Momentlerin hepsi toplanır.

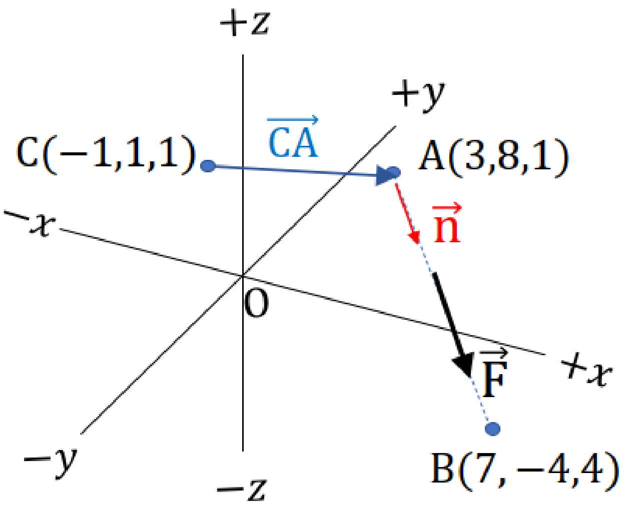


$$+M_{R_O} = \sum Fd$$

Örnek

Doğrultusu A(3,8,1) ve B(7,–4,4) noktalarından geçen, 130 N şiddetinde olan ve A dan B ye doğru yönlendirilmiş F kuvvetinin C(-1,1,1) noktasına göre momentini bulunuz.





$$\vec{M}_C = \overrightarrow{CA} x \vec{F} \qquad , \vec{F} = |\vec{F}|\vec{n}$$

Moment alınan nokta   Kuvvet hattı üzerindeki herhangi bir nokta

$$\overrightarrow{CA} = [3-(-1)]\vec{i} + (8-1)\vec{j} + (1-1)\vec{k} \quad \rightarrow \overrightarrow{CA} = (4\vec{i} + 7\vec{j})$$

Birim vektör: $\vec{n} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{(7-3)\vec{i} + (-4-8)\vec{j} + (4-1)\vec{k}}{|\overrightarrow{AB}|}$

$$= \frac{4\vec{i} - 12\vec{j} + \overrightarrow{3k}}{\sqrt{4^2 + (-12)^2 + 3^2}} \qquad \rightarrow \vec{n} = \frac{4}{13}\vec{i} - \frac{12}{13}\vec{j} + \frac{3}{13}\vec{k}$$

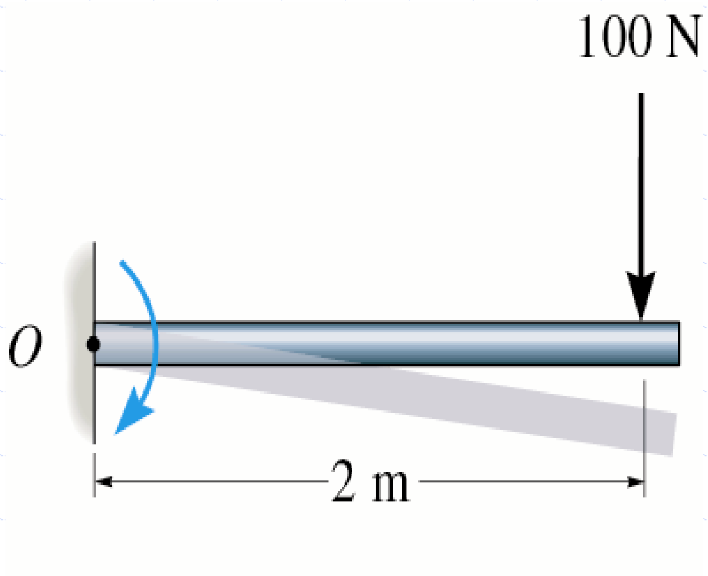
$$\vec{F} = 130\left(\frac{4}{13}\vec{i} - \frac{12}{13}\vec{j} + \frac{3}{13}\vec{k}\right) \rightarrow \quad \vec{F} = 40\vec{i} - 120\vec{j} + 30\vec{k}$$

$$\vec{M}_c = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 7 & 0 \\ 40 & -120 & 30 \end{vmatrix}$$

$$(30x7 - (-120x0))\vec{i} - (30x4 - 40x0)\vec{j} + (-120x4 - 40x7)\vec{k}$$

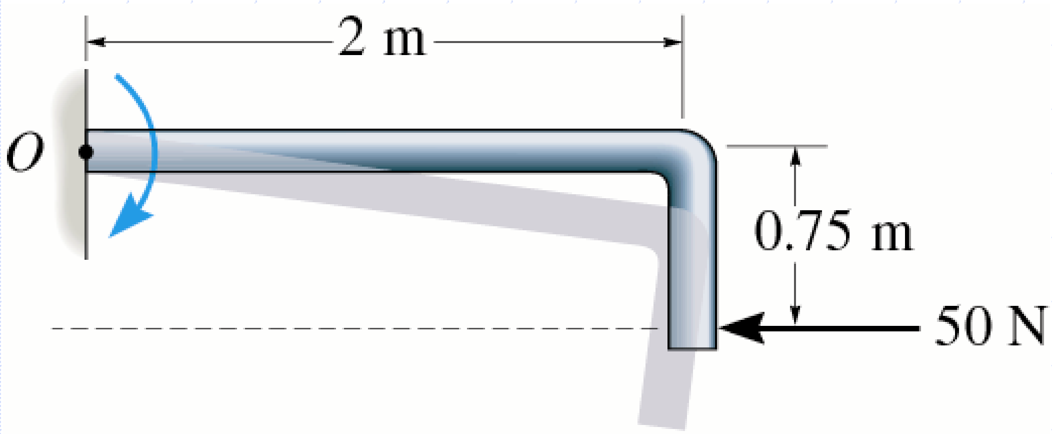
$$\vec{M}_c = (210\vec{i} - 120\vec{j} - 760\vec{k})$$

Örnek



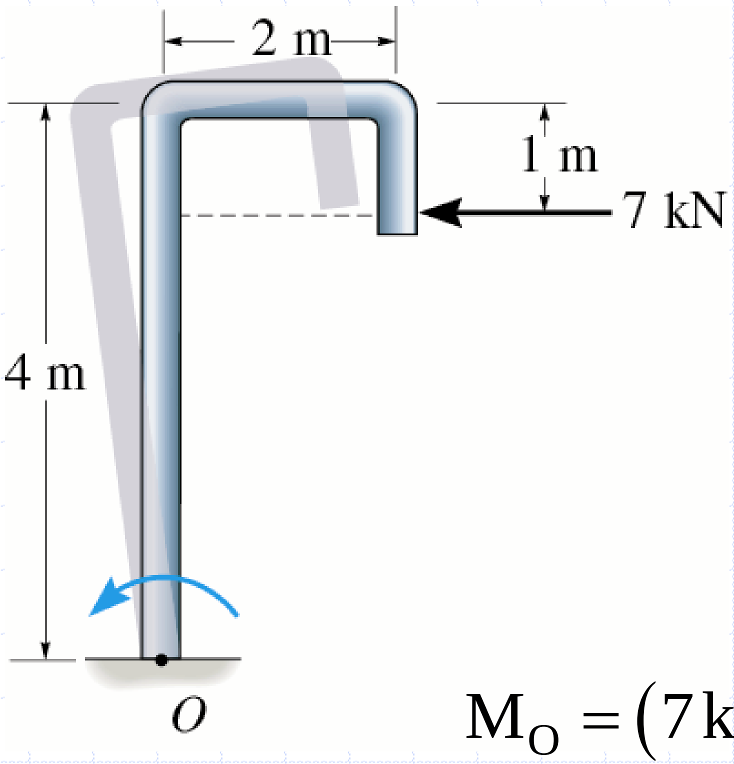
$$M_O = (100\,\mathrm{N})(2\,\mathrm{m}) = 200\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

Örnek



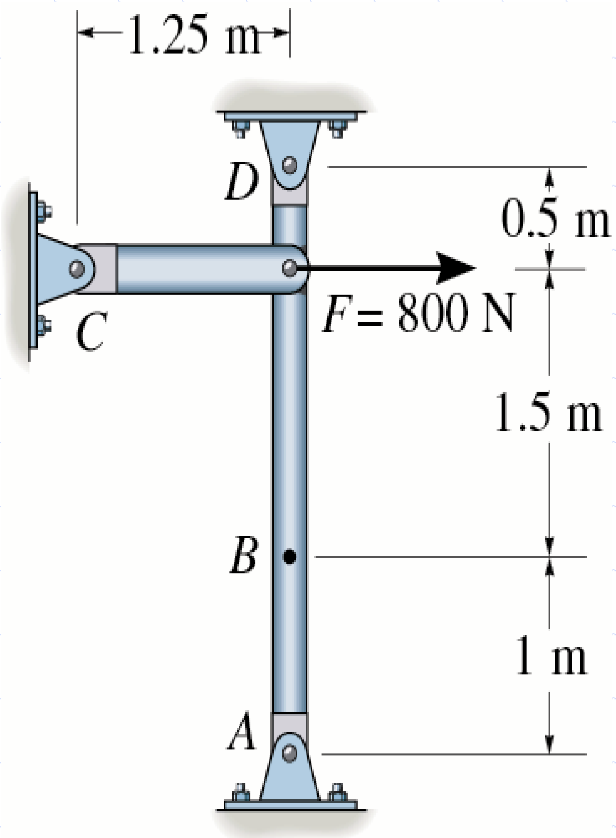
$$M_O = (50\,\mathrm{N})(0.75\,\mathrm{m}) = 75\,\mathrm{N \cdot m}$$

Örnek



$$M_O = (7\,\text{kN})(4-1\,\text{m}) = 21.0\,\text{kN}\cdot\text{m}$$

Örnek



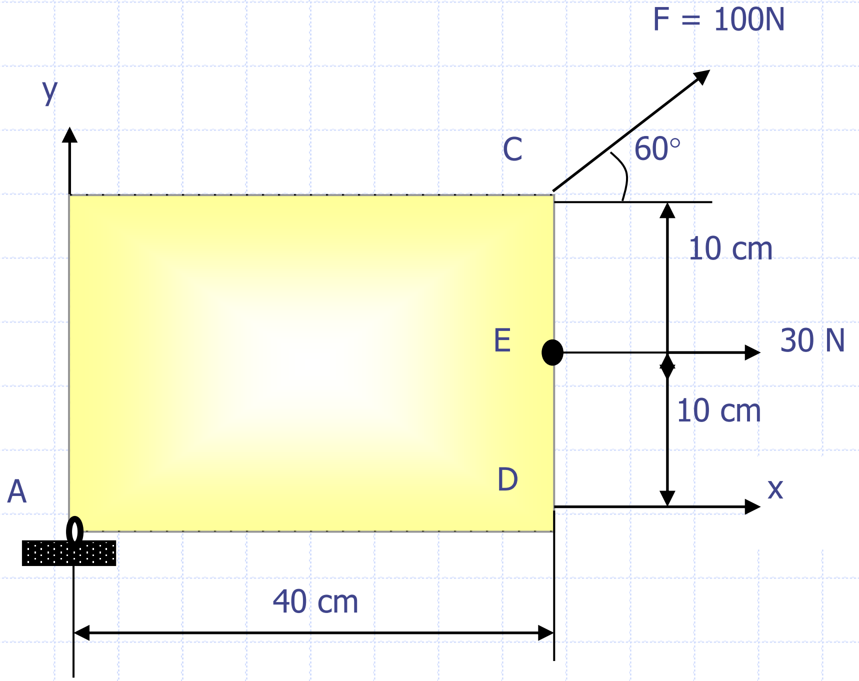
$$M_A = 800\ \text{N}\ (2.5\ \text{m}) = 2000\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_B = 800\ \text{N}\ (1.5\ \text{m}) = 1200\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = 800\ \text{N}\ (0\ \text{m}) = 0\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_D = 800\ \text{N}\ (0.5\ \text{m}) = 400\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Örnek – Ödev ?

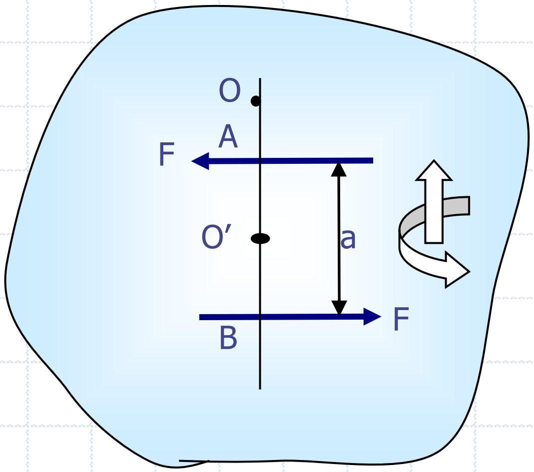


$M_A = ?$

KUVVET ÇİFTİ

Zıt yönlerde etkiyen eşit iki kuvvetten meydana gelen sisteme kuvvet çifti denir. Burada dengelenmiş bir moment bulunmaktadır.

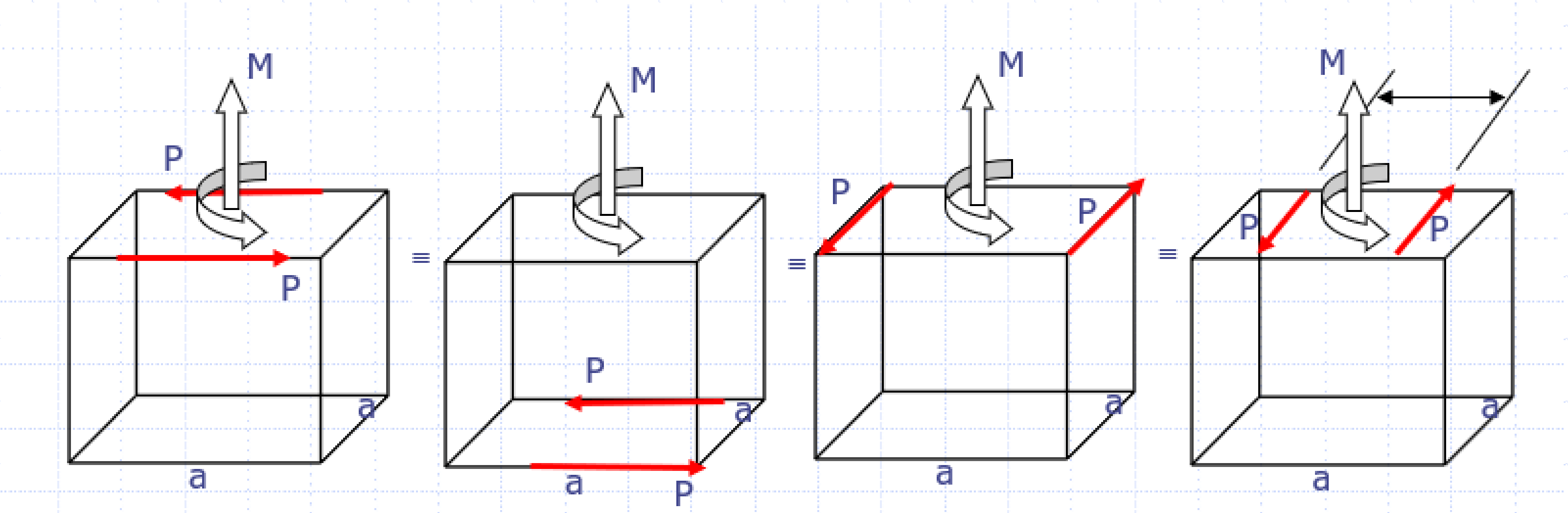
Moment merkezi, kuvvetlerin arasında veya dışında yada kuvvetlerden biri üzerinde alınsa yine aynı şiddette ve aynı döndürme yönünde kuvvet çifti elde edilir.



$$M_0 = -(OA)F + F.(OB) \qquad M_{0'} = (O'A).F + (O'B).F$$

$$M_0 = F.a \qquad M_{0'} = F.a$$

Moment vektörlerinin büyüklüğü moment merkezine bağlı olmadığı için aynı zamanda düzlem üzerinde herhangi bir noktaya kayabilirler.



Kuvvet Çiftlerinin Konumu

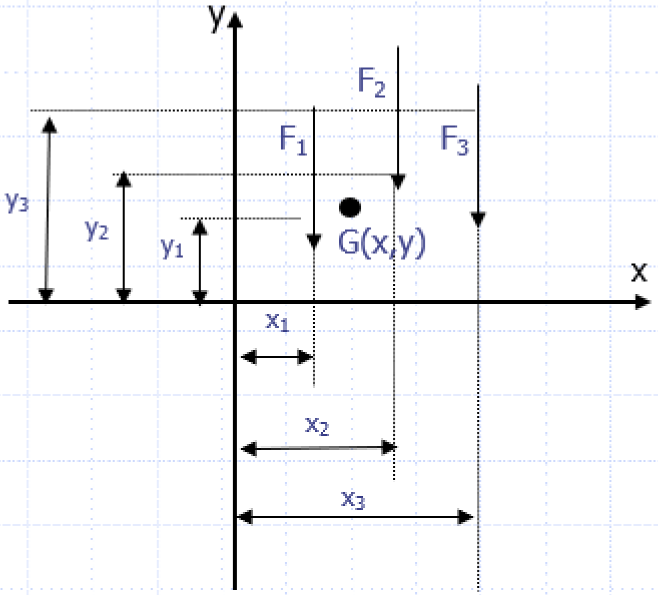
KUVVET SİSTEMLERİNİN BİLEŞKELERİ

Mekanikte birçok problem kuvvet sistemlerini ilgilendirir. Bu kuvvet sistemlerinin yapacağı tesiri izah ederek en basit hale dönüştürmek gerekir.

Bir kuvvet sisteminin bileşkesi rijit cisme tesir eden dış etkileri değiştirmeksizin orijinal kuvvetlerin en basit kombinezonudur. Bir cismin dengesi için üzerine tesir eden bütün kuvvetlerin bileşkesinin sıfır olması şarttır.

Eğer bir cisme tesir eden kuvvetlerden doğan bileşke sıfır değilse cismin kütlesiyle ivmenin çarpımını bileşke kuvvete eşitleyerek ivme tanımlanır.

- Bileşkenin şiddeti sistemi meydana getiren kuvvetlerin skaler toplamına eşittir.
- Bileşkenin tesir çizgisinin konumu Varignon teoremi ile bulunur.



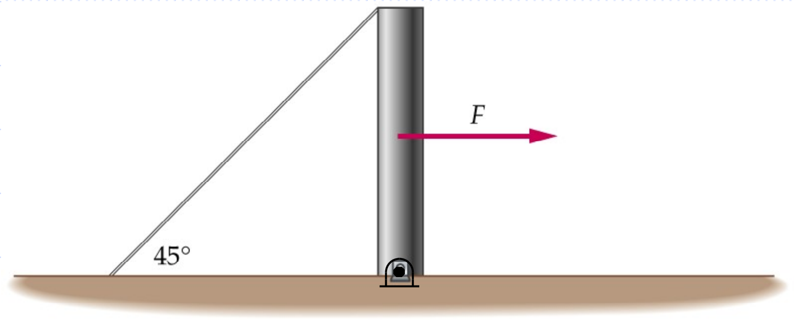
$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i x_i}{R} \qquad y = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i y_i}{R}$$

$$xR = F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3$$

$$yR = F_1y_1 + F_2y_2 + F_3y_3$$

ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

Örnek

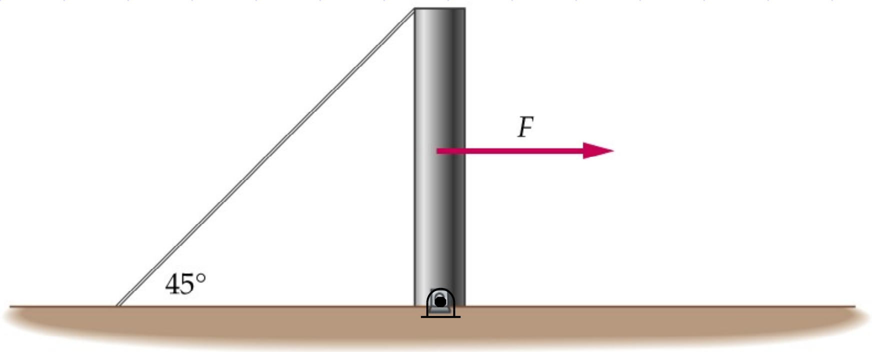


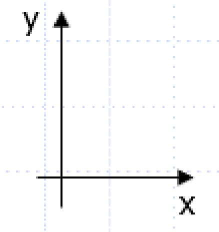
Ağırlığı ihmal edilen ve boyu L olan bir çubuk bir pim ile şekilde görüldüğü gibi zemine bağlanmıştır. Ayrıca çubuğun üst kısmı da bir kablo ile zemine bağlanmıştır. Eğer çubuğun ortasına bir F kuvveti yatay olarak uygulanırsa;

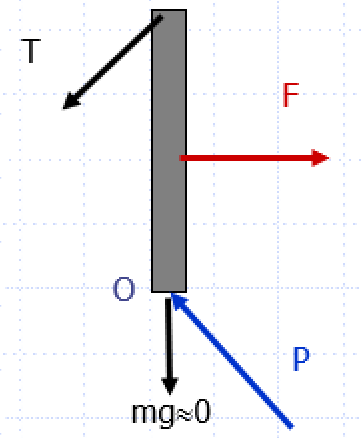
a. Kablodaki çeki kuvveti

b. Çubuğa ve pime etkiyen yatay ve dikey kuvvet bileşenlerini bulunuz.

Çözüm







$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_x = 0 \Rightarrow -T.Cos\,45 + F - P_x = 0 \;.......(I)$$

$$\sum F_y = 0 \qquad \sum F_y = 0 \Rightarrow -T.Sin\,45 + P_y = 0 \;........(II)$$

$$\sum M_0 = 0 \qquad \sum M_0 = 0 \Rightarrow T.Cos\,45.L - F.\frac{L}{2} = 0 \;.........(III)$$

$$I.denklemden;\ P_x = \frac{T}{\sqrt{2}} - F$$

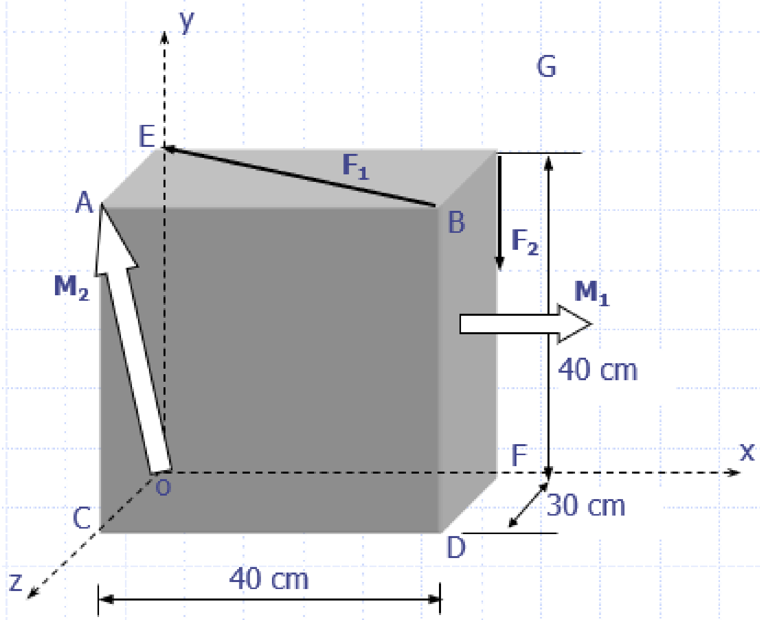
$$II.denklemden;\ P_y = \frac{T}{\sqrt{2}}$$

$$III.denklemden; \frac{T}{\sqrt{2}}.L = F.\frac{L}{2} \Rightarrow T = F.\frac{\sqrt{2}}{2}\ olarak\ bulunur.$$

$$Buna\ göre;\ P_x = -\frac{F}{2}$$

$$P_y = \frac{F}{2}\ olarak\ elde\ edilir.$$

Örnek



Verilen kuvvetleri ve kuvvet çiftlerini O'ya indirgeyiniz.

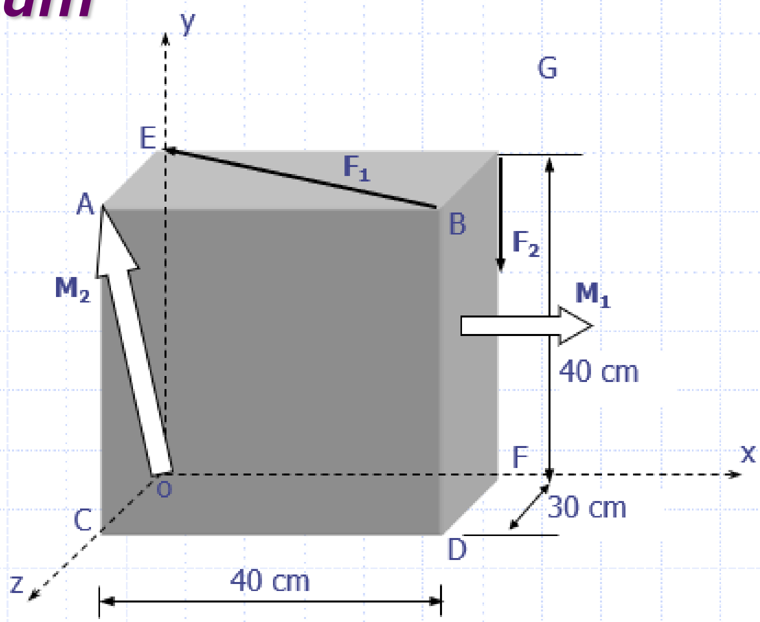
$F_1 = 2$ kN

$F_2 = 3$ kN

$M_1 = 5$ kNcm

$M_2 = 10$ kNcm

Çözüm



A(0,40,30)
B(40,40,30)
E(0,40,0)
G(40,40,0)
F(40,0,0)
O(0,0,0)

$$\overrightarrow{BE} = -40\vec{i} - 30\vec{k}$$

$$\overrightarrow{GF} = -40\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OA} = 40\vec{j} + 30\vec{k}$$

$$\overrightarrow{F_1} = 2000.\left(\frac{-40i - 30k}{\sqrt{40^2 + 30^2}}\right) = -1600i - 1200k$$

$$\overrightarrow{F_2} = 3000.\left(\frac{-40j}{40}\right) = -3000j$$

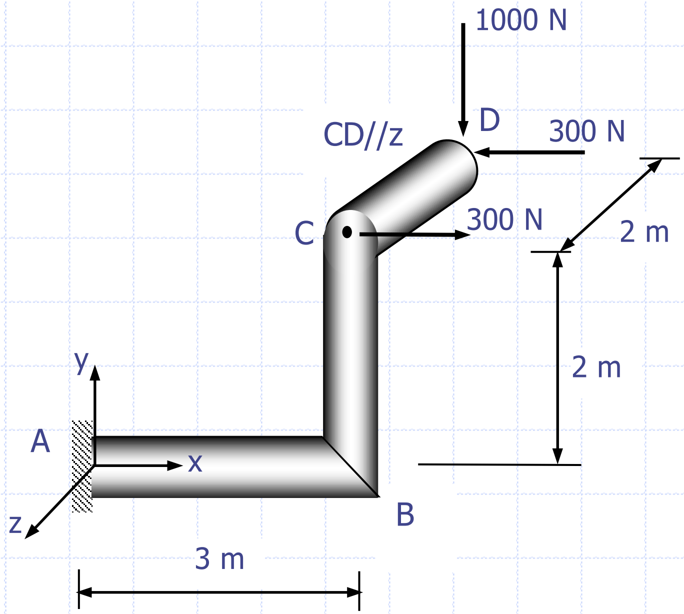
$$\overrightarrow{M_1} = 5000\,i$$

$$\overrightarrow{M_2} = 10000.\left(\frac{40\,j + 30k}{\sqrt{40^2 + 30^2}}\right) = 8000\,j + 6000k$$

$$\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = 5000i + 8000\,j + 6000k + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 40 & 40 & 30 \\ -1600 & 0 & -1200 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 40 & 40 & 0 \\ 0 & -3000 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_0 = -43000i + 8000j - 50000k \ \text{ Ncm}$$

Örnek



1. Verilen kolda kuvvetleri ve kuvvet çiftlerini A’ ya indirgeyiniz
2. A’da doğacak reaksiyon kuvvetlerini hesaplayınız.

Çözüm

Burada problemin çözümünde matris yöntemi kullanılacaktır. C ve D noktaları ayrı ayrı matris şeklinde yazılacaktır.

$$M_T = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 0 \\ 300 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -2 \\ -300 & -1000 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_T = i(0) - j(0) + k(0-600) + i(0-2000) - j(0-600) + k(-3000+600)$$

$$M_T = -2000i + 600j - 3000k$$

$$M_x = -2000Nm \quad , \quad M_y = 600Nm \quad , \quad M_z = -3000Nm$$

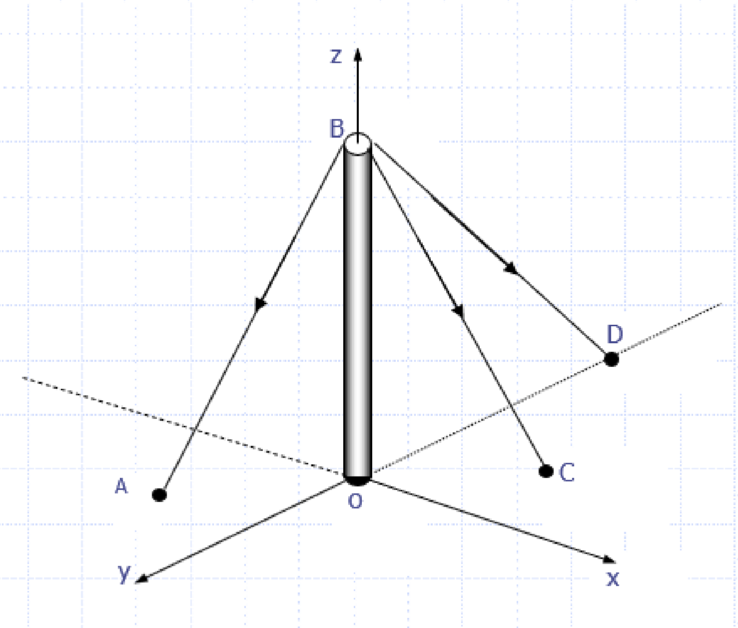
A noktasındaki mesnet reaksiyonları ise sırası ile;

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + 300 - 300 = 0 \Rightarrow A_x = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 1000 = 0 \Rightarrow A_y = 1000N$$
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow A_z = 0$$

II. Yol

$$M_T = (300+300)\,j + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1000 & 0 \end{vmatrix} = -2000i + 600j - 3000k$$

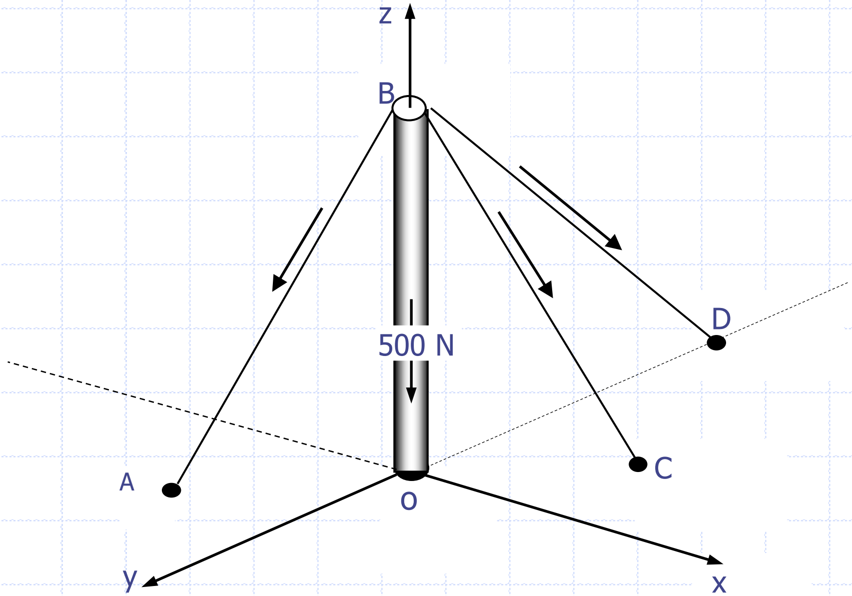
Örnek



A(-3, 2, 0), B(0, 0, 6), C(2, -3, 0), D(0, -3, 0) ve ağırlığı 500N olan OB çubuğu yukarıda koordinatları verilen üç tel halatla A, C, D noktalarına sabitlenmiştir.

Sistemin dengede kalabilmesi için halat germe kuvvetlerinin minimum ne olması gerektiğini hesaplayınız.

Çözüm



A(-3, 2, 0)
B(0, 0, 6)
C(2, -3, 0)
D(0, -3, 0)

$$\overrightarrow{BD} = 0 - 3\vec{j} - 6\vec{k} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$

$$\overrightarrow{BA} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k} = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$$

$$\overrightarrow{F_{BD}} = F_{BD}\cdot\left(\frac{-3\vec{j}}{3\sqrt{5}} - \frac{6\vec{k}}{3\sqrt{5}}\right) \quad , \quad \overrightarrow{F_{BC}} = F_{BC}\cdot\left(\frac{2\vec{i}}{7} - \frac{3\vec{j}}{7} - \frac{6\vec{k}}{7}\right) \quad , \quad \overrightarrow{F_{BA}} = F_{BA}\cdot\left(-\frac{3\vec{i}}{7} + \frac{2\vec{j}}{7} - \frac{6\vec{k}}{7}\right)$$

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_x = 0$$
$$\frac{2}{7}F_{BC} - \frac{3}{7}F_{BA} = 0$$
$$\Rightarrow \underline{F_{BC} = 1{,}5F_{BA}}$$

$$\sum F_y = 0$$
$$-\frac{3}{3\sqrt{5}}F_{BD} - \frac{3}{7}F_{BC} + \frac{2}{7}F_{BA} = 0$$
$$-0{,}447F_{BD} - 0{,}428F_{BC} + 0{,}286F_{BA} = 0$$
$$\Rightarrow \underline{F_{BD} = -0{,}796F_{BA}}$$

$$\sum F_z = 0$$
$$-\frac{6}{3\sqrt{5}}F_{BD} - \frac{6}{7}F_{BC} - \frac{6}{7}F_{BA} - 500 = 0$$
$$-1{,}431F_{BA} = 500$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{BA} = -350\,N}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{Bc} = -525\,N}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{BD} = 278{,}6\,N}}$$