

BÖLÜM 8

KAFES SİSTEMLER

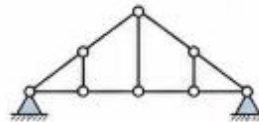
KAFES SİSTEM NEDİR?

Kafes sistemler, düz çubuk elemanların mafsallı bağlantılarla bir araya gelmesiyle oluşan ve düğüm noktalarına dış yüklerin uygulandığı taşıyıcı sistemlerdir.

- ✓ Çubuklar yalnızca aksel kuvvet taşır (çekme/basma).
- ✓ Eğilme ve kesme kuvveti taşımazlar.
- ✓ Mafsallar moment aktarmaz.

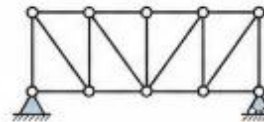
KAFES SİSTEM TİPLERİ

ÜÇGEN KAFES



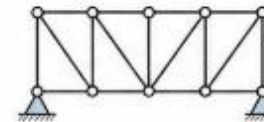
Elemanlar üçgenlerden oluşur. En kararlı geometrik şekildir.

PRATT KAFES



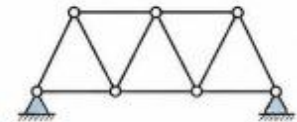
Diyagonaller ortada çekme kuvveti taşır. (Düşey yükler için uygundur.)

HOWE KAFES



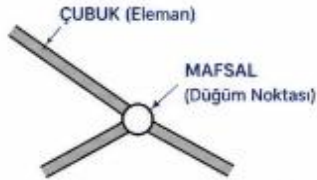
Diyagonaller ortada basma kuvveti taşır. (Düşey yükler için uygundur.)

WARREN KAFES



Diyagonaller dönüşümlü olarak çekme ve basma taşır.

TEMEL BİLEŞENLER



MAFSALLI MESNET
(x ve y yönlerinde ötelenmeye izin verir, dönmeye izin vermez.)



MAKARALI MESNET
(y yönünde ötelenmeye izin verir, x yönünde izin vermez.)

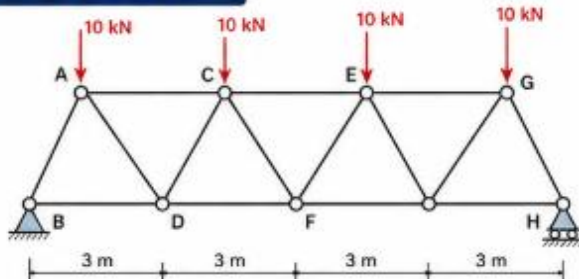
KAFES SİSTEMLERİN ÖZELLİKLERİ

- Çubuklar iki kuvvet elemanı olarak kabul edilir.
- Düğüm noktalarında kuvvet dengesi yazılarak çubuk kuvvetleri bulunur.
- Kararlı ve statikçe belirli bir düzlemsel kafes için koşul:

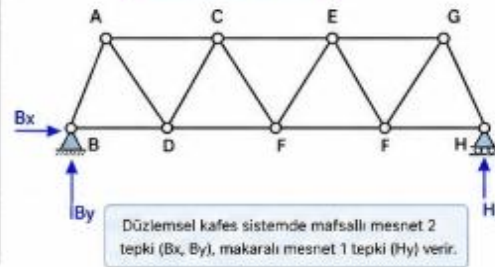
$$m + r = 2j$$

m : Çubuk (eleman) sayısı
r : Mesnet tepki bileşeni sayısı
j : Düğüm noktası sayısı

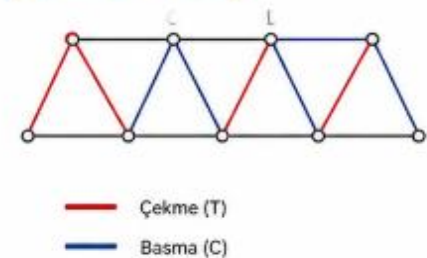
ÖRNEK KAFES SİSTEM



MESNET TEPKİLERİ



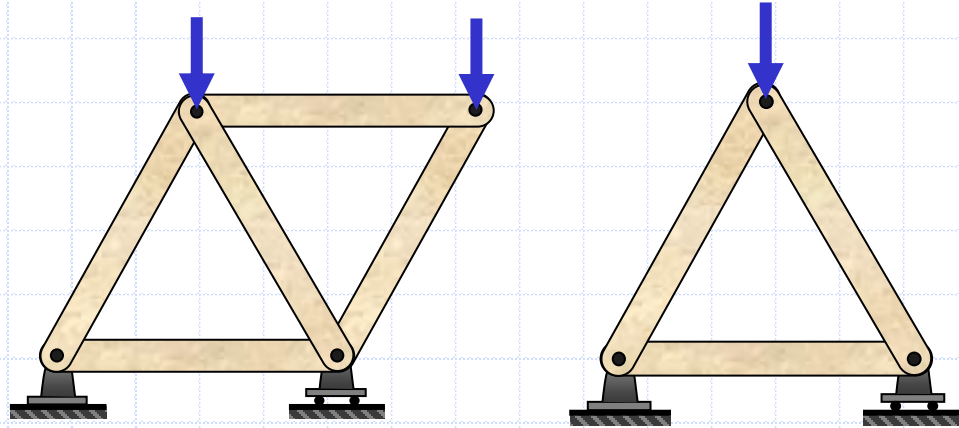
ÇUBUK KUVVETLERİ



NOT: Kafes sistemlerin çözümünde yöntem olarak Düğüm Noktası Yöntemi veya Kesit Alma Yöntemi kullanılır.

Kafes Sistemi Nedir?

Kafes sistemleri, mühendislikte kullanılan **taşıyıcı sistemlerinin** tiplerinden biridir. Birçok mühendislik probleminde; özellikle vinç, köprü ve bina projelerinde pratik ve ekonomik bir çözüm sağlar. Bir kafes sistemi düğüm noktalarında birleşen doğru eksenli çubuklardan meydana gelir. Kafes sistemin çubukları yalnız uç noktalarında birbirlerine bağlanmıştır. Gerçek taşıyıcı sistemler birçok düzlem kafes sistemin bir uzaysal sistem oluşturacak şekilde birleştirilmesinden yapılmıştır.



Her kafes sistemi, kendi düzleminde etkiyen yükleri taşıyacak şekilde projelendirildiğinden, iki boyutlu kafes sistem temel olmaktadır. Burada onun için öncelikle iki boyutlu kafes sistemleri ele alınacaktır.

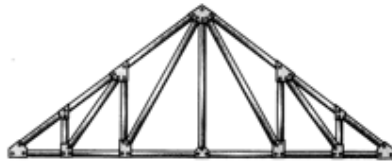
Genel olarak, bir kafes sistemin elemanları narindir ve **eksenine dik doğrultudaki** yükleri taşıyamaz; bundan dolayı bütün yükler, çubukların kendilerine değil, düğüm noktalarına uygulanmalıdır.

İki düğüm noktası arasına bir yayılı yük uygulanacağı zaman bu yükler komşu düğümlere paylaşılacak şekilde kafes sistemi dizayn edilir.

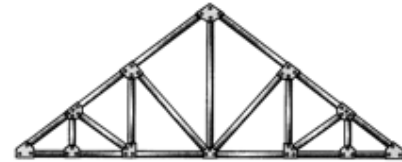
Kafes Çeşitleri



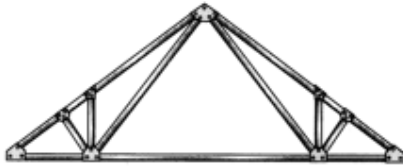
scissors
(a)



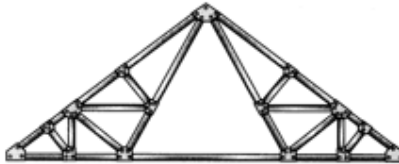
Howe
(b)



Pratt
(c)



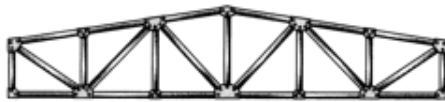
fan
(d)



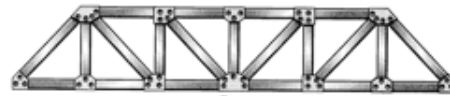
Fink
(e)



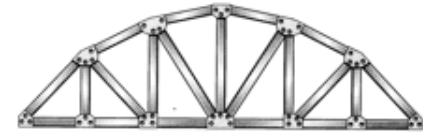
cambered Fink
(f)



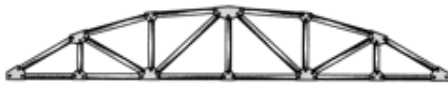
Warren
(g)



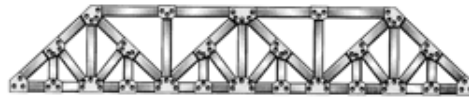
Pratt
(a)



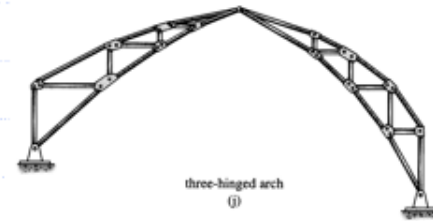
Parker
(d)



bowstring
(i)



subdivided Warren
(f)

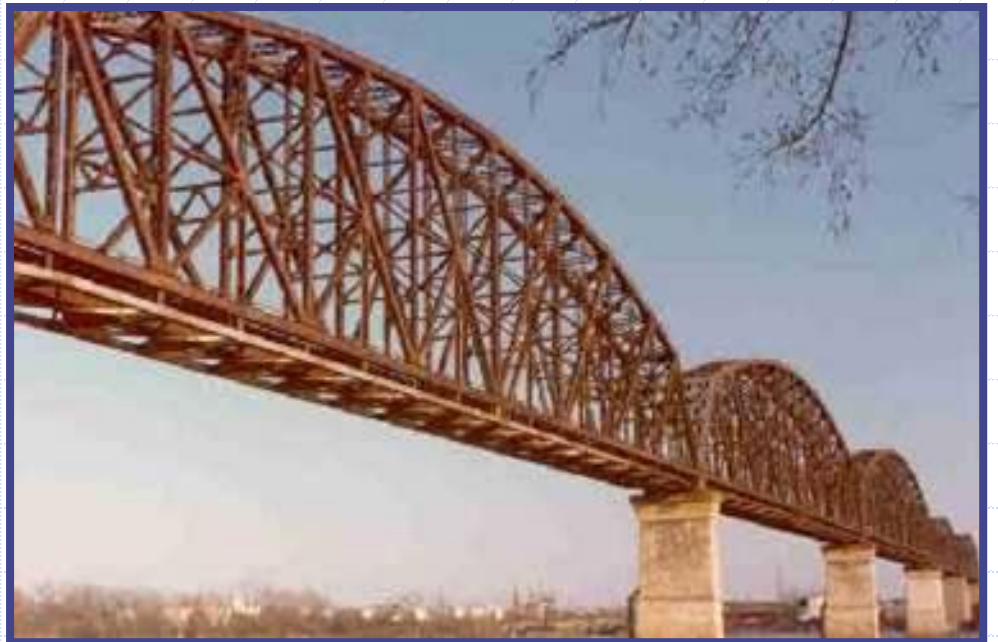


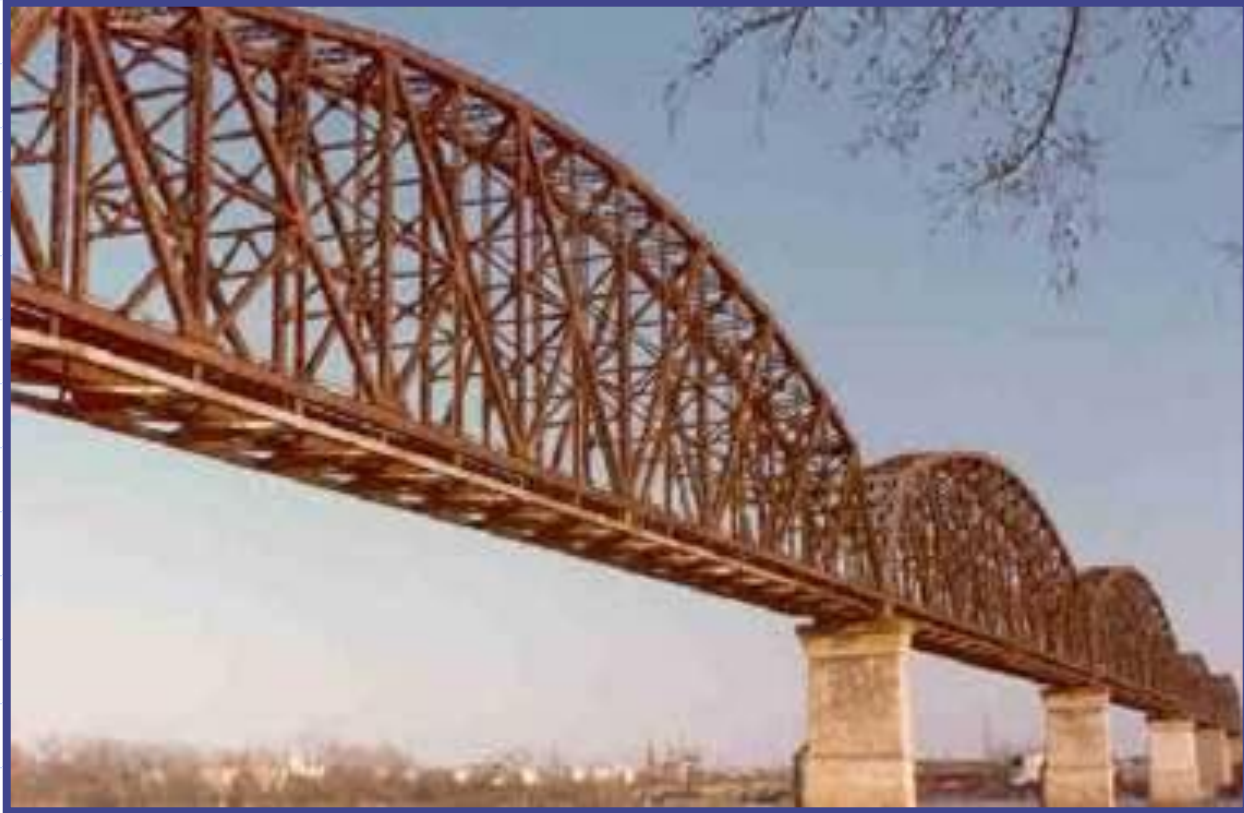
three-hinged arch
(j)

Kafes sistemi, çubuklarının ağırlıklarını da çubuğun birleştirdiği iki dğm noktasına paylaştırılır.

Çubuklar perçin yada kaynak ile birleřtirilirler. Birleřme yerleri sürtünmesiz mafsallı birleřtirme olarak kabul edilir. Bunun için **bir çubuğun her iki ucuna etkiyen kuvvetler aksenal dođrultuda etkir, moment meydana gelmez.**

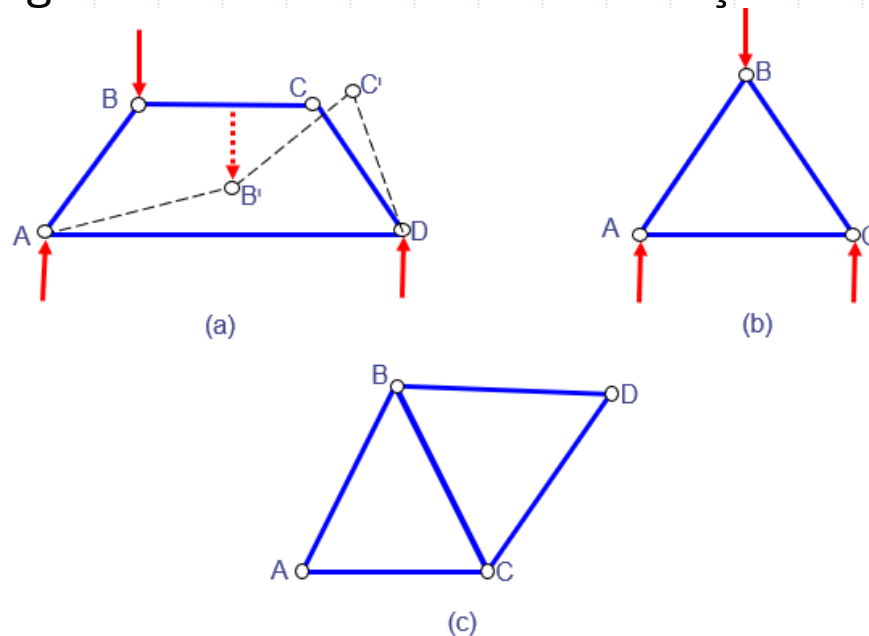
Buna göre çubuk yalnız normal kuvvet etkisindeki bir eleman olarak ele alınabilir ve bütün kafes sistem bir mafsallar ve normal kuvvet etkisindeki elemanlar grubu olarak kabul edilebilir.

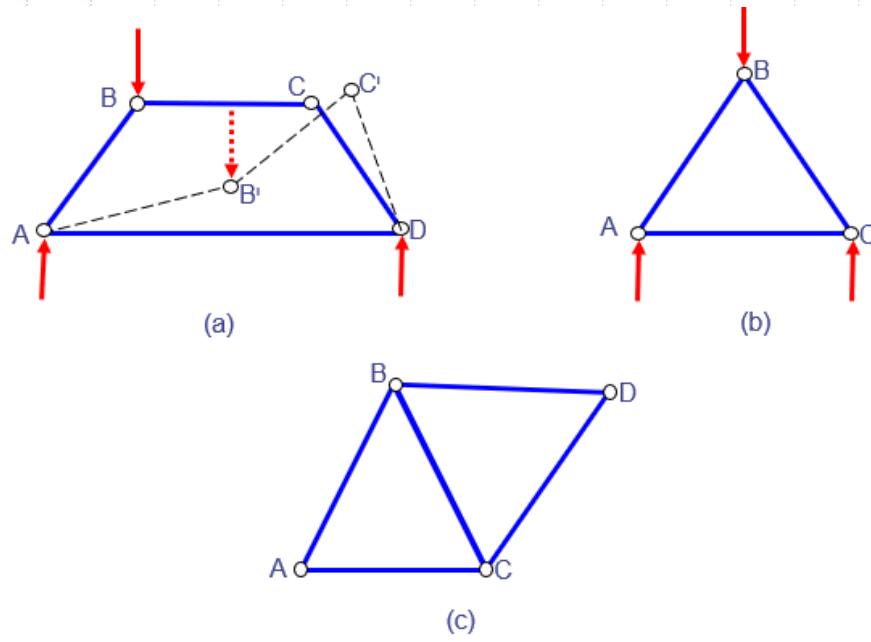




Basit Kafes Sistemleri

A, B, C ve D mafsalları ile birbirine bağlanmış dört çubuktan oluşan, (a)'daki kafes sistemi göz önüne alalım. B noktasına herhangi bir yük uygulanırsa, kafes sistem büyük ölçüde şekil değiştirir ve ilk biçimini tamamen kaybeder. Diğer taraftan A, B, C mafsalları ile birbirlerine bağlanmış üç çubuktan oluşan (b)'deki kafes sistem, B noktasında uygulanan bir yükten dolayı çok az şekil değiştirir. Bu kafes sistem için tek mümkün deformasyon, elemanlarının küçük boy değişimlerinden ibarettir. (b)'deki kafes sistem bir rijit kafes sistem olarak anılır; burada rijit deyimini kafes sistemin göçmeyeceğini belirtmek üzere kullanılmıştır.





(b)'deki baz üçgen kafes sisteme, BD ve CD gibi iki çubuk eklenerek (c)'deki gösterildiği gibi, daha büyük bir rijit kafes sistem elde edilebilir.

Bu işlem istenildiği kadar çok kere tekrarlanabilir, yeni iki çubuk eklemek, bunları mevcut iki ayrı düğüm noktasına bağlamak ve yeni bir düğüm noktasında birleştirmek şartı ile sonuç kafes sistem rijit olur.

İzostatik ve Hiperstatik Sistemler

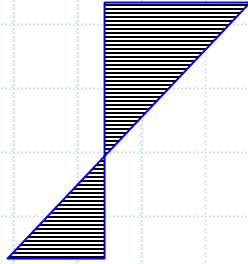
Bir katı cisme tesir eden düzlem kuvvetlerde denge şartları, birbirine bağlı olmayan üç denklem verir.

Bilinmeyen sayısı bunlardan fazla olursa, denge şartları problemin çözümüne kâfi gelmez. Bu tip problemlere "**statik bakımdan belirsiz**" veya "**hiperstatik**" problemler denir.

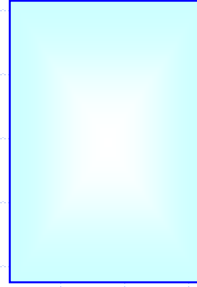
Bilinmeyen sayısı denklem sayısından ne kadar fazla ise belirsizlik o derece yüksek olur. Belirli olan sistemlere "**izostatik**" sistemler denir.

Kafes Sistemler İçin Genel Bilgiler

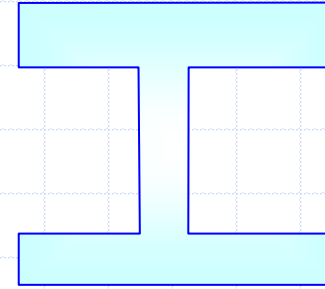
Taşıyıcı sistemlerin açıklıkları büyüdükçe dolu gövdeli sistemlerin, kendi ağırlıklarının artışıyla dolayısıyla ekonomik olmadığından yerlerini kafes ve çerçeve sistemlerine bırakırlar.



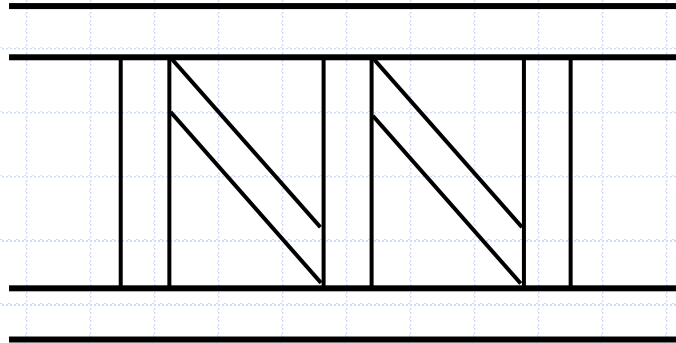
(a)



(b)



(c)



(a)'da dolu bir çubuğun herhangi bir kesitinde basit eğilme halinde gerilme yayılımı görülmektedir. Burada orta kısımdaki liflerin üst ve alt kenarlardaki liflere nazaran kesit taşıyıcılığına daha az iştirak ettikleri görülmektedir.

Çubuğun kendi ağırlığını azaltmak için orta bölgenin bir kısmı sistemden çıkartılarak I kesitli dolu sistemler elde edilir.

(b)'de ve (c)'de daha büyük açıklıklarda ise orta kısım tamamıyla kaldırılıp bunun yerine kesme kuvvetini karşılamak üzere (d)'deki gibi çubuklar konarak çerçeve veya kafes sistemler elde edilir.

Kafes sistemler, yalnız normal kuvvetleri taşıyan doğru eksenli çubukların birleştirilmesinden meydana gelirler. Çubuklar sürtünmesiz bir mafsallık ile birbirlerine bağlıdır. Buralara "**düğüm noktaları**" denir. Mafsallarla yapılmış sistemler ancak düğüm noktalarında yük taşırlar. Aksi halde tatbik edilen yüklerin momenti doğar ki, bunu da sürtünmesiz mafsallar taşıyamaz.

Kafes Sistemler Ne Zaman İzostatik Olur?

Kafes sisteminin çubuklarında eğilme momentleri ve kesme kuvvetleri sıfırdır. Yalnız normal kuvvetler vardır. Bunlara "**çubuk kuvvetleri**" denir. Kafes sistemde;

d = Düğüm noktası sayısını (mesnetler dahil)

r = Mesnet reaksiyonları sayısını

$\ç$ = Çubuk sayısını

gösterebilirsin. Her çubukta, bilinmeyen olarak bir çubuk kuvveti vardır. O halde reaksiyonlar ile birlikte bilinmeyenlerin toplam sayısı $(r+\ç)$ olur.

Çubuk Kuvvetlerinin Tayini

Kafese teşkil eden çubukların boyutları, her çubuğa gelen kuvvet ve zorlamaya göre hesaplanır. Bu hesaplamalarda iki esas kabul edilmektedir.

1. Çubukların birbirleriyle olan bağlantısı, **sürtünmesiz mafsallı** farz edilir. İki veya daha fazla çubuğun bir arada bağlandığı bu mafsala düğüm noktası denir. Mafsalların sürtünmesiz olduğunu kabul etmek, düğüm noktalarının moment taşımayacakları peşinen kabul edilir.
2. Kirişe gelen bütün dış kuvvetlerin düğüm noktalarında tesir ettiği yani çubuğun iki düğüm noktası arasındaki kısmına hiç bir dış kuvvetin tesir etmediği farz edilir.

Ayrıca çubuk kuvvetlerini tayin etmek için aşağıdaki metotlar kullanılır;

1. Dügüm Noktaları Denge Metodu

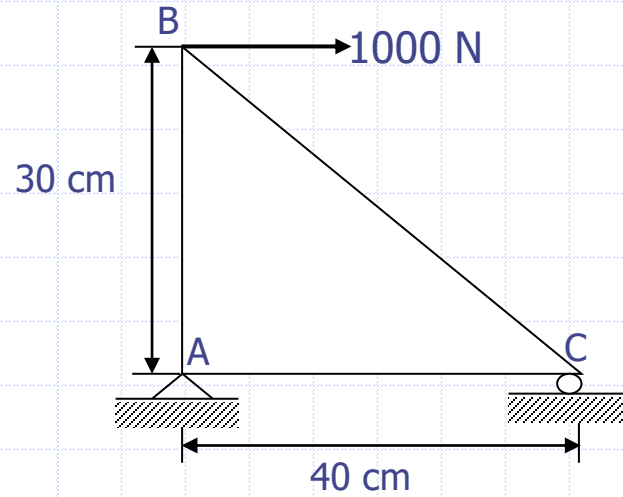
Bu metotla bir kafes sistemindeki çubuklara etkileyen kuvvetleri bulmak için, **her bir düğüm noktasına etkileyen kuvvetler denge denklemleri uygulanır.**

Dolayısıyla bu metot da bir noktada kesişen kuvvetlerin dengesi incelenir. Bunun içinde bağımsız **iki denge** denklemi gerekir.

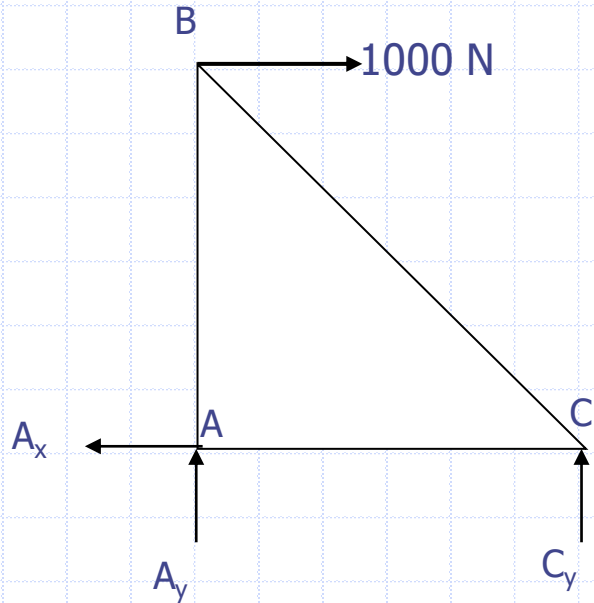
Çözümüne en az bir bilinen ve en fazla iki bilinmeyen kuvvetin etkidiği herhangi bir düğümden başlanır.

Örnek

Şekil deki kafes sistemde çubuk kuvvetlerini düğüm noktaları metoduna göre bulunuz.



Çözüm



$$\sum M_A = 0 \text{ ise}$$

$$-1000 \cdot 30 + C_y \cdot 40 = 0$$

$$C_y = 750 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \text{ ise}$$

$$A_y + C_y = 0$$

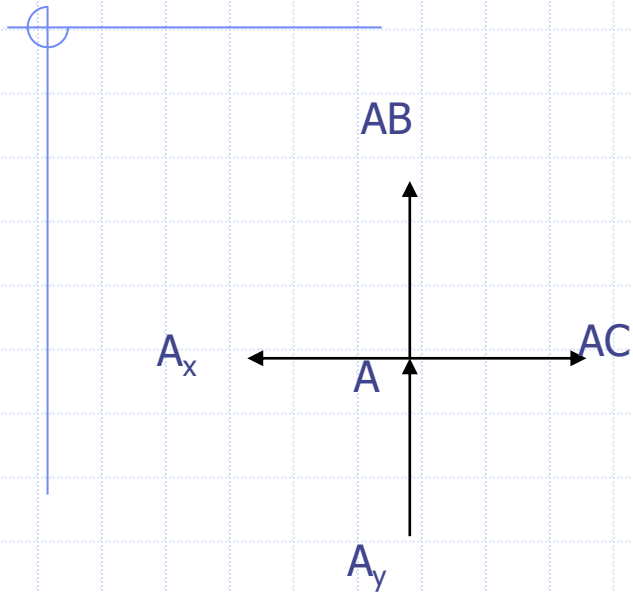
$$A_y = -750 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \text{ ise}$$

$$-A_x + 1000 = 0$$

$$A_x = 1000 \text{ N}$$

A Düğümü



$$\sum F_x = 0 \text{ ise}$$

$$AC - A_x = 0$$

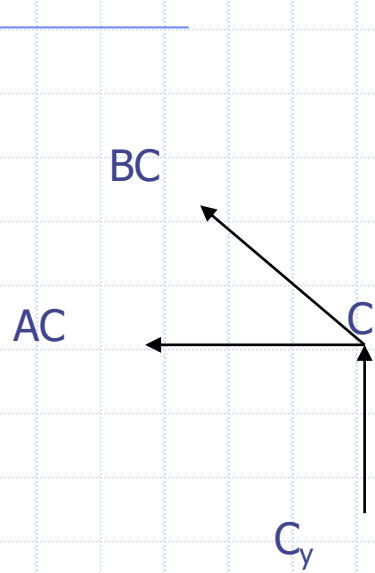
$$AC = 1000 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \text{ ise}$$

$$AB + (-750) = 0$$

$$AB = 750 \text{ N}$$

C Düğümü



$$\sum F_y = 0 \text{ ise}$$

$$BC \cdot \frac{3}{5} + C_y = 0$$

$$BC = -1250 \text{ N}$$

2. Ritter Metodu (Kesim Metodu)

Düğüm metodu ve grafik metodun da, sadece üç denge denkleminin ikisinin avantajından istifade edilmiştir. Zira düğüm noktasında kesişen kuvvetler söz konusudur. Üçüncü denge denkleminin avantajını kullanmak için, kesilmiş bir kafesin bütünü serbest cisim olarak alınabilir.

Bu durumda bir noktada kesişmeyen kuvvetlerin dengesi söz konusudur.

Üçüncü denge denkleminin avantajı, hesabı istenen çubuğu içine alan bir kesim yaparak sistemi çözüp doğrudan doğruya istenen çubuğun hesabının yapılabilmesidir. Bu durumda hesabı istenen çubuğa gelmek için düğümden düğüme hesap yapmak gereksizdir. Bu durumda sadece üç tane bağımsız denge denklemi vardır. O halde sistemi keserken üç çubuktan fazla çubuk kesilmemelidir.

Kesme metodunda anlaşılması gereken esas nokta kesmeden sonra elde edilen bölümün **tek bir cisim gibi dengesinin inceleneceğidir.**

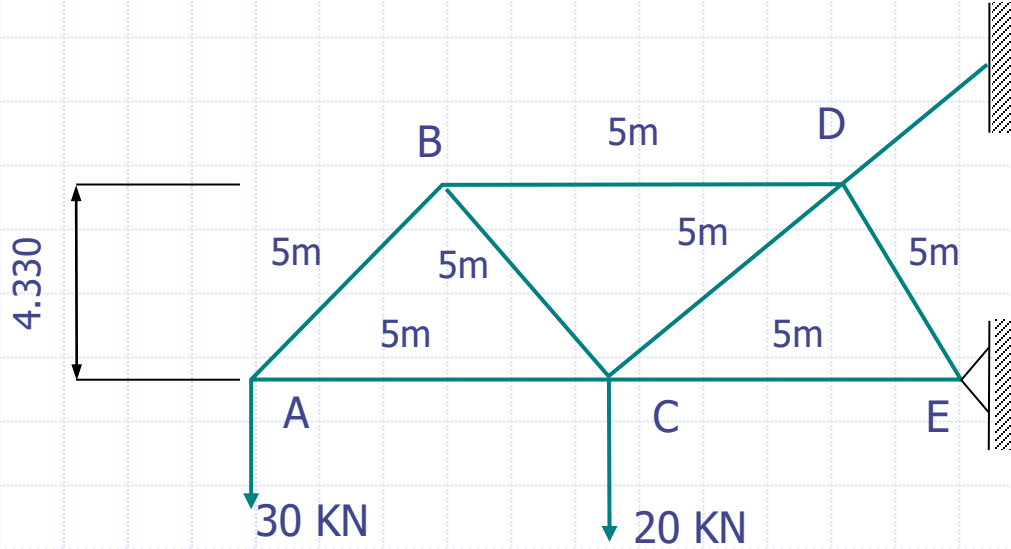
İç kısımdaki çubuklara ait çubuk kuvvetleri çözümde kullanılamaz.

Serbest cisim ve dış kuvvetleri açık olarak belirtmek için, **kesme işlemi düğümden değil de, çubuklardan yapılmalıdır.**

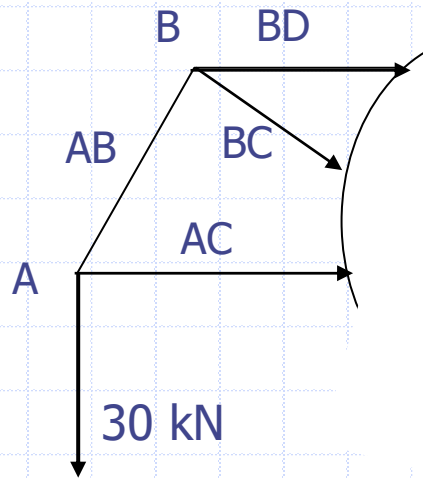
Kesme metodunda, moment denklemlerinin avantajından istifade edilir ve moment merkezi seçilirken, mümkün olduğu kadar fazla bilinmeyen kuvvetin bu noktadan geçmesine dikkat edilmelidir.

Örnek

Konsol şeklinde yüklü kafes sisteminin AC ve BD çubuklarındaki kuvvetleri kesim metodunu kullanarak bulunuz?



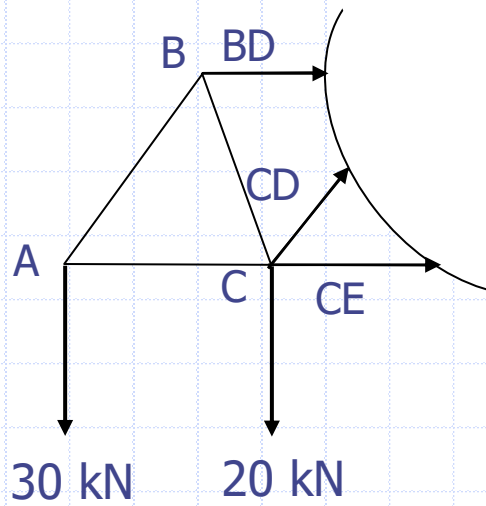
Çözüm



$$+\sum M_B = 0$$

$$30 \times 2,5 - AC \times 4,33 = 0$$

$$AC = 17,32 \text{ kN Bası}$$



$$+\sum M_C = 0$$

$$30 \times 5 - BD \times 4,33 = 0$$

$$BD = 34,64 \text{ kN Çeki.}$$

3. Cremona Metodu (Grafik Çözüm)

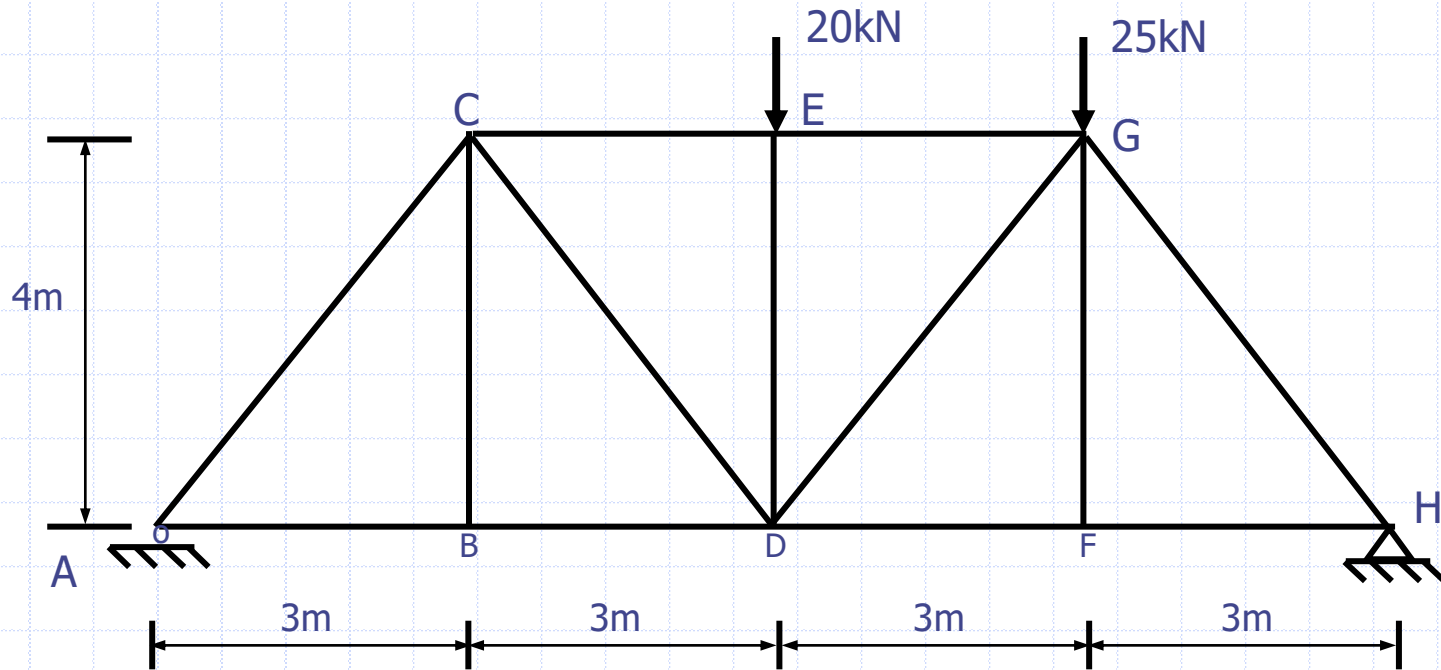
Kafes sistemlerde herhangi bir düğüm noktasının dengede bulunması için bu noktadaki çubuk kuvvetleri ile varsa dış kuvvetlerin bileşkesinin sıfır olması gerekir. Bir başka deyimle, geometrik olarak bu kuvvetlere ait kuvvetler poligonu kapalı olmalıdır. Böylece herhangi bir düğüm noktasına ait kuvvetler poligonu kapanacak şekilde çizilecek olursa, bu düğüm noktasında birleşen çubuklardan bilinmeyen ikisinin kuvvetleri bulunur. Burada bazı kaidelere uymak gerekir.

Öncelikle mesnet reaksiyonları dahil bütün dış kuvvetlere ait kuvvet poligonunun kapanması gerekir. Poligonda kuvvetler geliş güzel sıralanmayıp belli bir dönme yönü alınır. Bu yönde sistem üzerinde kuvvetlere rastlanış sırası poligondaki çiziliş sırasındır. Çizilme önce, bilinmeyen sayısı en fazla iki olan bir düğümden başlanmalıdır. Ayrıca her izostatik kafes sisteminde Cremona planının çizilmesi mümkün değildir.

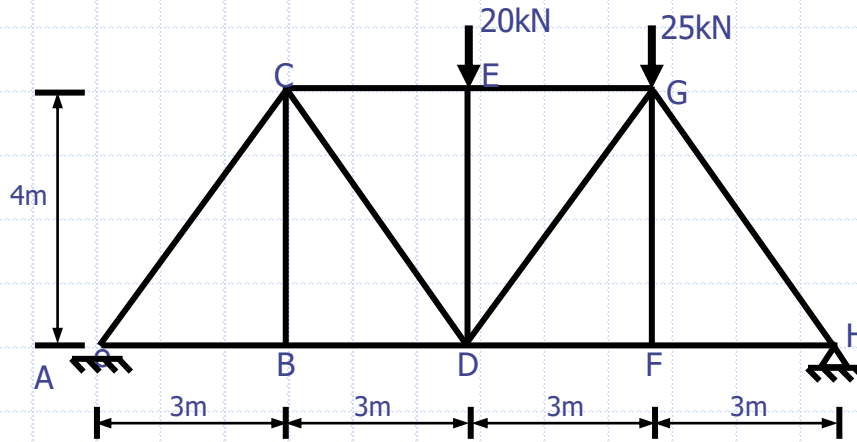
ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

Problem 1

Kafes sistemdeki çubuk kuvvetlerini hesaplayınız.



Çözüm



$$\Sigma M_H = 0$$

$$20 \cdot 6 + 25 \cdot 3 - A_y \cdot 12 = 0$$

$$A_y = 16,25 \text{ kN} \uparrow$$

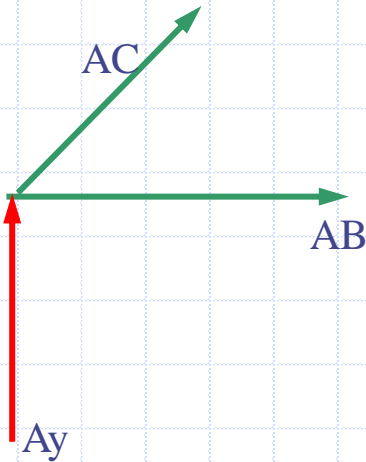
$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$16,25 - 20 - 25 + H_y = 0$$

$$H_y = 28,75 \text{ kN} \uparrow$$

x yönünde etkiyen herhangi bir kuvvet yoktur.

A düğümü



$$+ \uparrow \sum F_y = 0 \quad \text{ise} \quad A_y + AC \cdot \sin 53 = 0$$

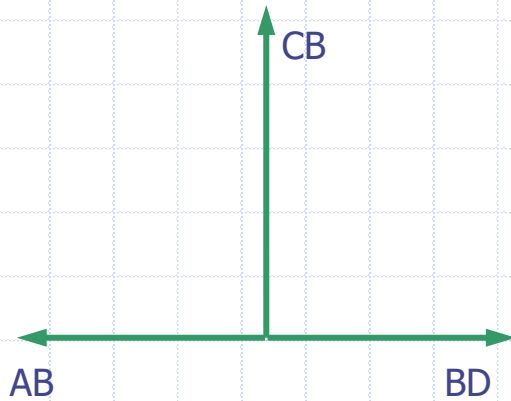
$$AC = -20,34 \text{ kN} \quad \text{Bası}$$

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \quad \text{ise} \quad AC \cdot \cos 53 + AB = 0$$

$$-20,34 \cdot \cos 53 + AB = 0$$

$$AB = 12,24 \text{ kN} \quad \text{Çeki}$$

B düğümü

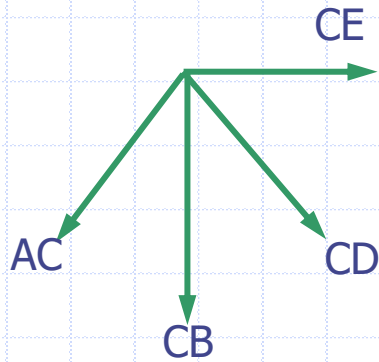


$$\Sigma F_x = 0 \quad -AB + BD = 0$$

$$AB = BD = 12,24 \text{ kN Çeki}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow CB = 0$$

C Dügümü



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad -AC \cdot \sin 53 - CD \cdot \sin 53 - CB = 0$$

$$CD = -AC$$

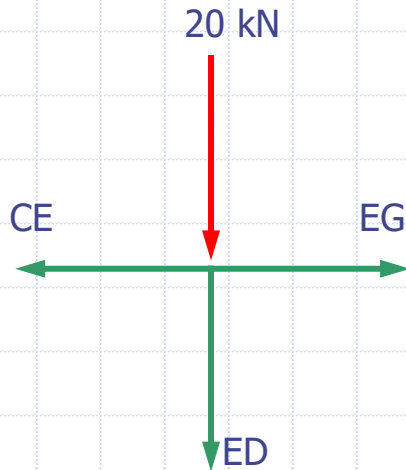
$$CD = 20,34 \text{ kN Çeki}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0 \quad -AC \cdot \cos 53 + CD \cdot \cos 53 + CE = 0$$

$$CE = AC \cdot \cos 53 - CD \cdot \cos 53$$

$$CE = -24,48 \text{ kN Bası}$$

E Dügümü



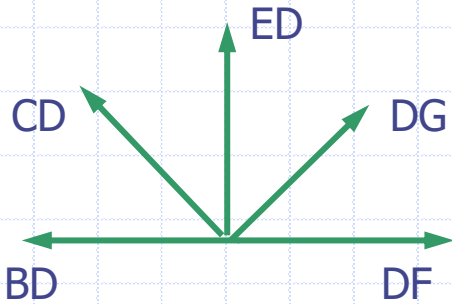
$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{ise } -CE + EG = 0$$

$$EG = -24,48 \text{ kN Bası}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad -20 - ED = 0$$

$$ED = -20 \text{ kN Bası}$$

D Düğümü



$$\Sigma F_x = 0$$

$$ED + CD \cdot \sin 53 + DG \cdot \sin 53 = 0$$

$$DG = (20 - 20,34 \cdot \sin 53) / \sin 53$$

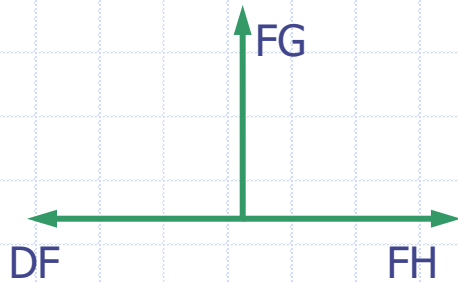
$$\mathbf{DG = 4,7 \text{ kN Çeki}}$$

$$-BD - CD \cdot \cos 53 + DG \cdot \cos 53 + DF = 0$$

$$-12,24 - 20,34 \cdot \cos 53 + 4,7 \cdot \cos 53 + DF = 0$$

$$\mathbf{DF = 21,65 \text{ kN Çeki}}$$

F Düğümü

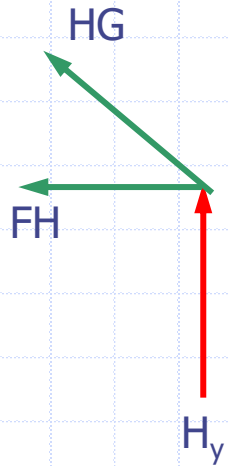


$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \mathbf{FG=0}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad -DF+FH=0$$

$$\mathbf{FH=21,65 \text{ kN Çeki}}$$

H Düğümü



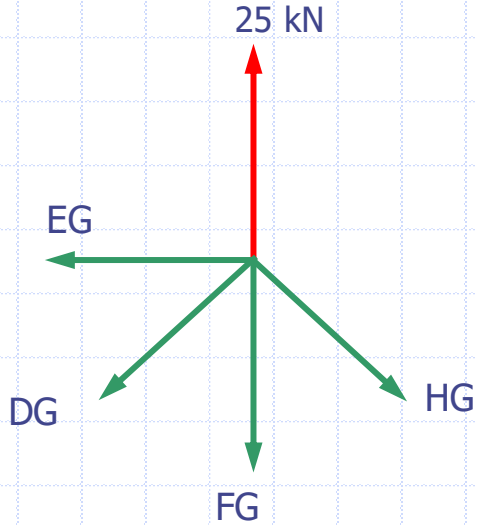
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 28,75 + HG \cdot \sin 53 = 0$$

$$\mathbf{HG = -36 \text{ kN} \quad \text{Bası}}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad -HG \cdot \cos 53 - FH = 0$$

$$\mathbf{FH = 21,66 \text{ kN} \quad \text{Çeki}}$$

G Dügümü

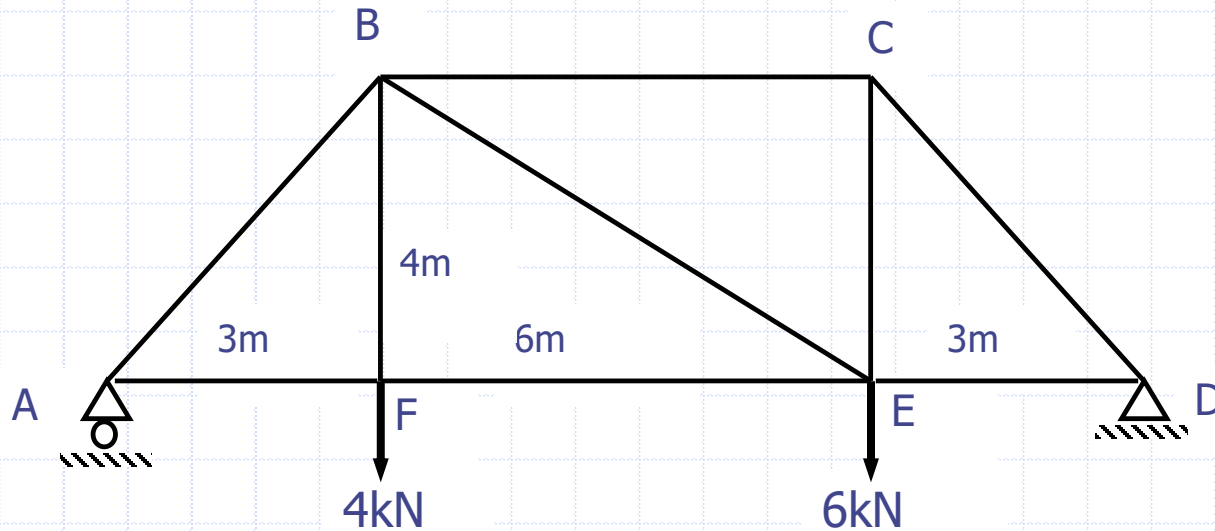


$$\Sigma F_x = 0 \quad -EG - DG \cdot \cos 53 + HG \cdot \cos 53 = 0$$
$$-EG - 4,7 \cdot \cos 53 - 36 \cdot \cos 53 = 0$$
$$\mathbf{EG = -24,5 \text{ kN} \quad \text{Bası}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad -25 - DG \cdot \sin 53 - FG - HG \cdot \sin 53 = 0$$
$$-25 - 4,7 \cdot \sin 53 - HG \cdot \sin 53 = 0$$
$$\mathbf{HG = -36 \text{ kN} \quad \text{Bası}}$$

Problem 2

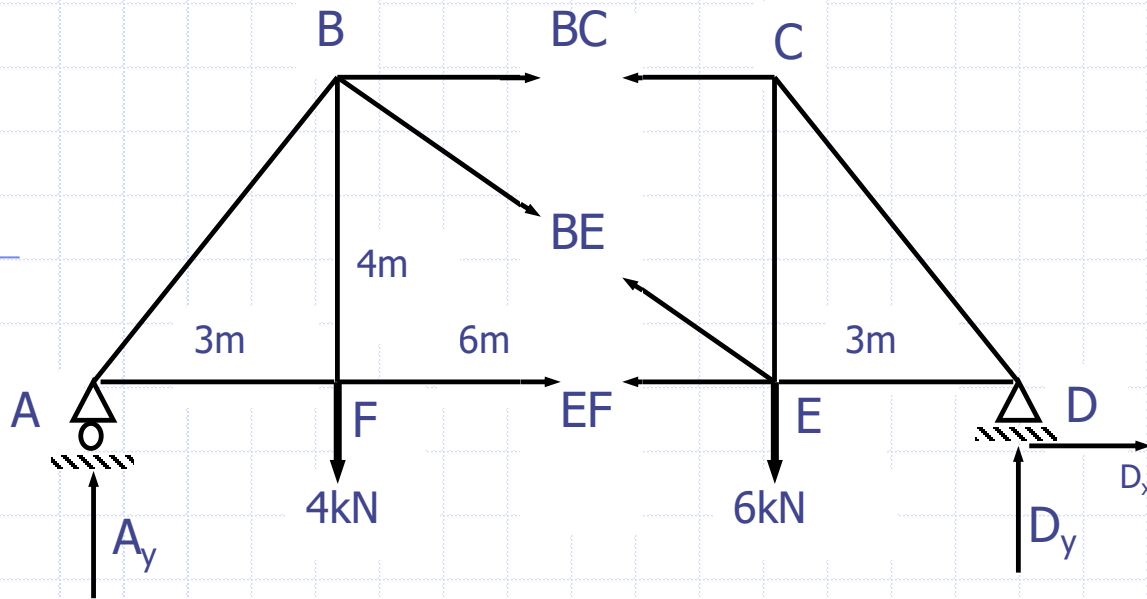
Kafes sisteminin BC, BE ve EF çubuk kuvvetlerini belirleyiniz.



Çözüm

Kesim metodunun uygulanması:

1. Statikçe belirli olup olmadığı kontrol edilir.
2. Reaksiyon kuvvetleri bulunur.
3. En fazla üç çubuğu kapsayacak kesim yapılır.
4. Kesilen parçalardan biri seçilir. Çubuk kuvveti çekme şeklinde yerleştirilir.
5. Denge denklemleri uygulanarak bilinmeyen çubuk kuvvetleri hesaplanır.



$$\sum M_D = 0$$

$$A_y \cdot 12 - 4 \cdot 9 - 6 \cdot 3 = 0$$

$$A_y = 4,5 \text{ kN}$$

$$D_y = 5,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = 0$$

$$A_y \cdot 3 - EF \cdot 4 = 0$$

$$EF = 3,38 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-BE \cdot \frac{4}{7,211} - A_y - 4 = 0$$

$$BE = 0,9 \text{ kN}$$

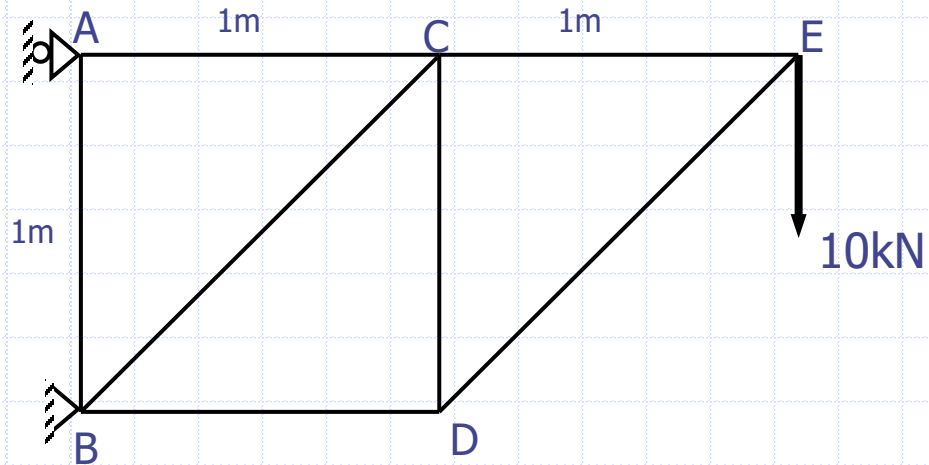
$$\sum F_x = 0$$

$$BC + \frac{6}{7,211} + EF = 0$$

$$BC = 4,1 \text{ kN}$$

Problem 3

Kafes sisteminin çubuk kuvvetlerini belirleyiniz.



Çözüm 3

$$\sum M_B = 0$$

$$A_x - 10.2 = 0$$

$$A_x = 20kN$$

$$B_x = 20kN$$

$$B_y = 10kN$$

E Düğümü

$$\sum F_x = 0$$

$$-CE - ED \cos 45 = 0$$

$$CE = -ED \cos 45$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-10 - DE \sin 45 = 0$$

$$DE = -14,14kN$$

$$CE = -10kN$$

D Düğümü

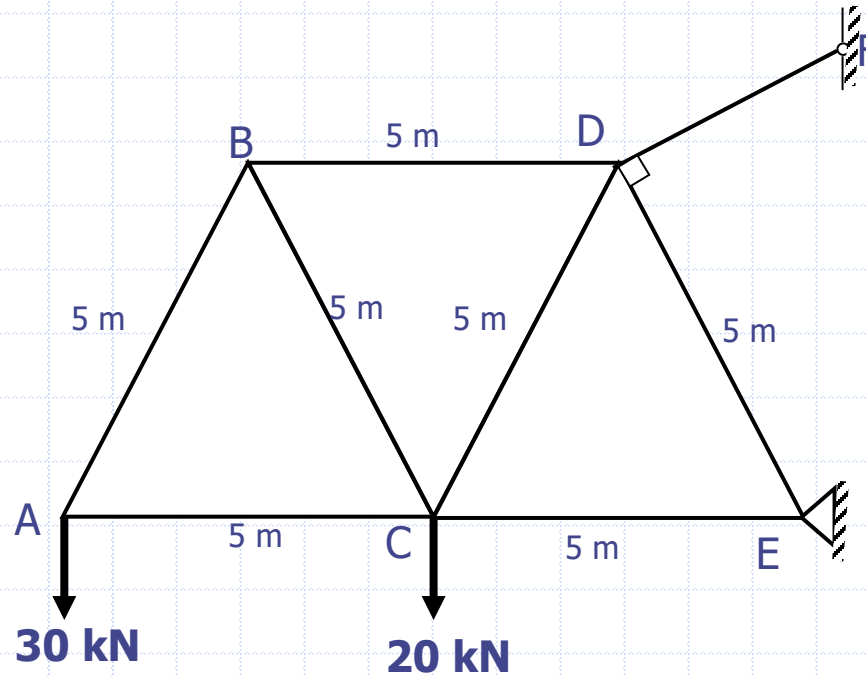
$$BD = 14,14 \cos 45$$

$$BD = 9,99kN$$

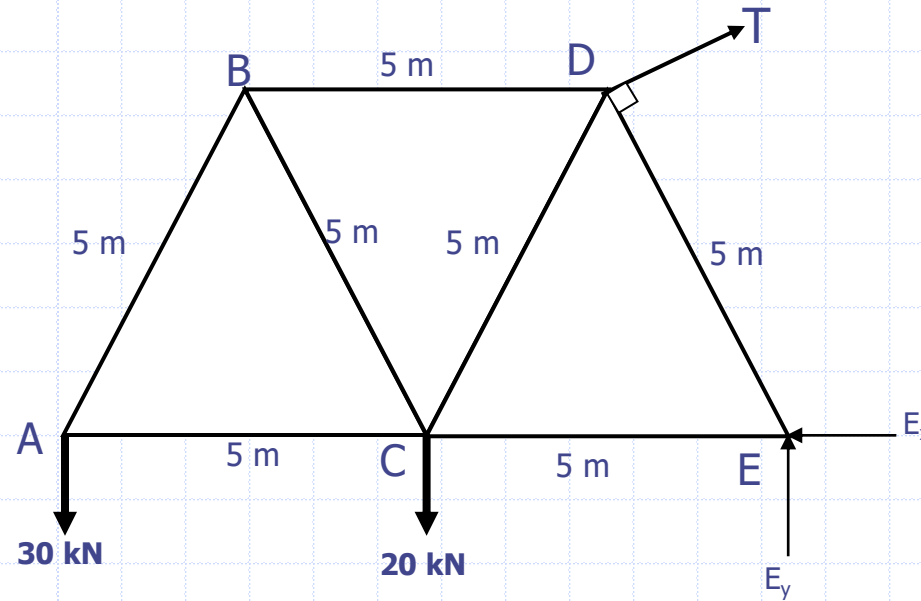
$$DC = 9,99kN$$

Problem 4

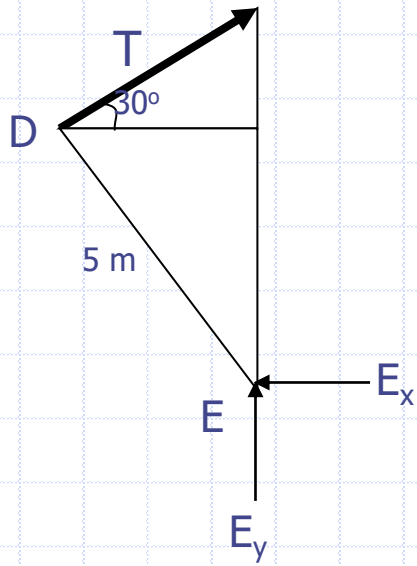
Verilen kafes sistemde BC çubuğundaki çubuk kuvveti hesaplayınız.



Çözüm 4



$$\sum M_E = 0 \quad -T \cdot 5 + 20 \cdot 5 + 30 \cdot 10 = 0 \quad \text{ise} \quad T = 80 \text{ kN}$$



$$T_x = T \cdot \cos 30 = 69,3 \text{ kN}$$

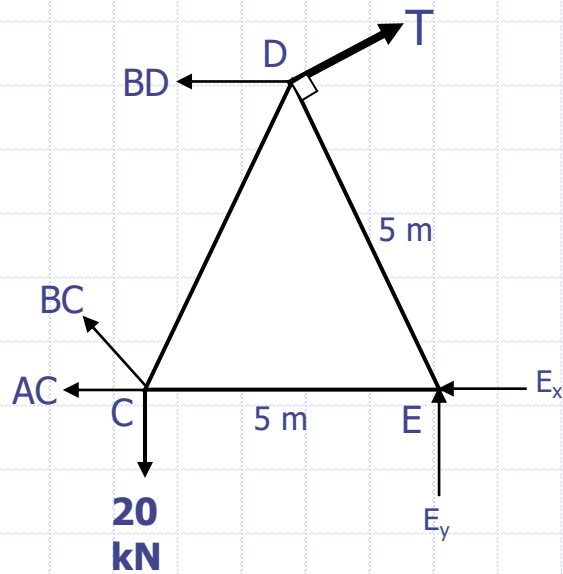
$$T_y = T \cdot \sin 30 = 40 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$-E_x + T_x = 0 \Rightarrow E_x = 69,3 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$E_y + T_y - 30 - 20 = 0 \Rightarrow E_y = 10 \text{ kN}$$



$$\sum M_C = 0 \text{ İse}$$

$$(BD \cdot \sin 60) \cdot 5 + T_y \cdot 2,5 - T_x \cdot 4,33 + E_y \cdot 5 = 0$$

$$\mathbf{BD = 34,65 \text{ kN Çeki}}$$

$$\sum F_y = 0$$

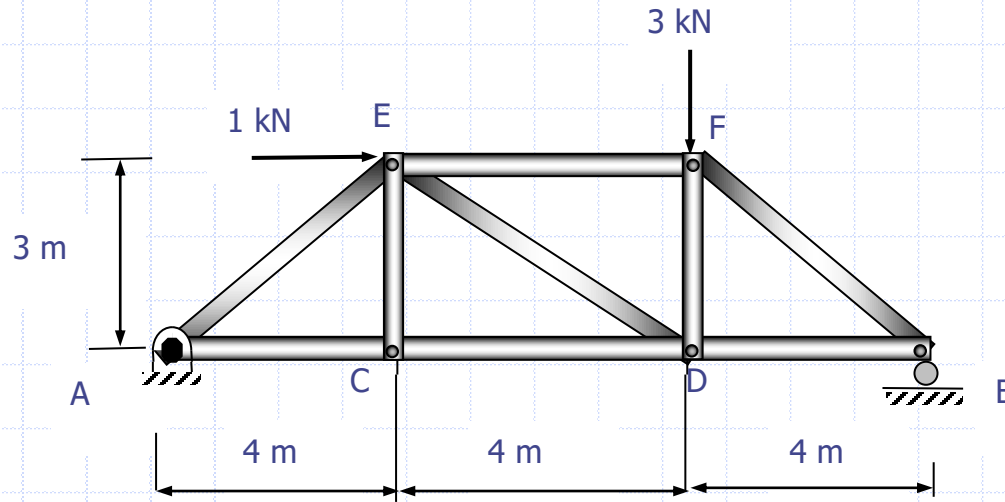
$$-20 + E_y + T_y + BC \cdot \sin 60 = 0$$

$$-20 + 10 + 40 + BC \cdot \sin 60 = 0$$

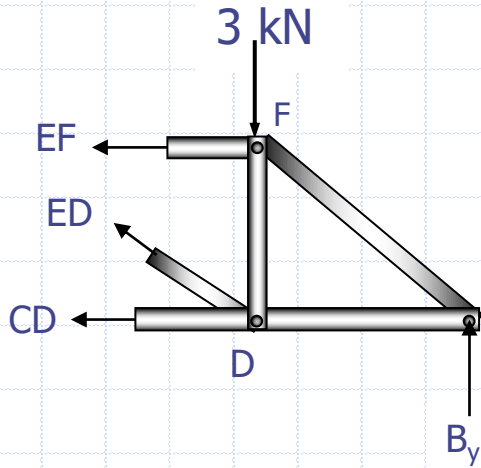
$$\mathbf{BC = -34,64 \text{ kN Bası}}$$

Problem 5

Verilen basit kafes sistemde EF, ED ve CD çubuklarında çubuk kuvvetlerini hesaplayınız.



Çözüm 5



$$\sum M_A = 0 \quad -1.3 - 3.8 + BY.12 = 0$$
$$BY = 2,25 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = 0 \quad \text{ise } -EF.3 - BY.4 = 0 \quad \text{ise}$$
$$EF = -3 \text{ kN Bası}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{ise } -3 + ED.0,6 + BY = 0 \quad \text{ise } ED = 1,25 \text{ kN Çeki}$$

$$\sum F_x = 0 \quad \text{ise } -EF - CD - ED.0,8 = 0 \quad \text{ise } CD = 2 \text{ kN Çeki}$$