



BÖLÜM

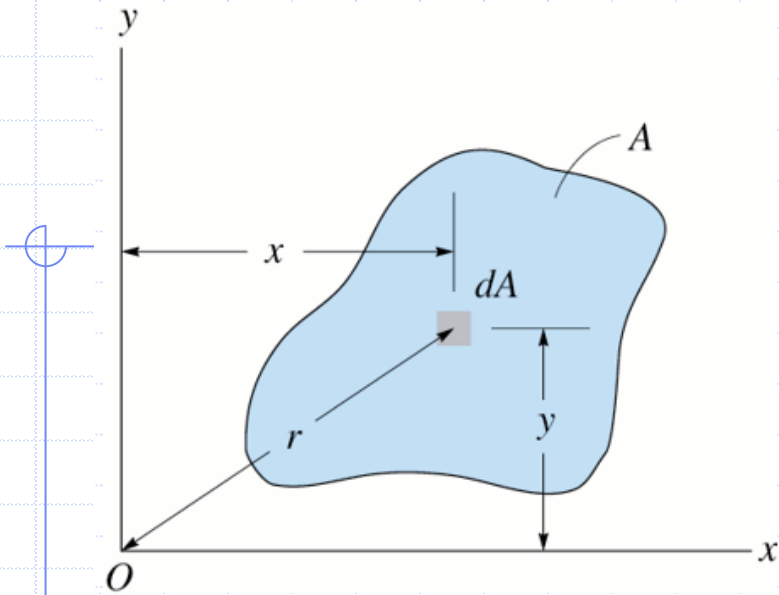
06.01

ALAN ATALET MOMENTİ

GİRİŞ VE TANIM

Atalet; direnim, karşı koyma anlamına gelmektedir. Bir cismin atalet momenti geometrik olarak dizaynda cismin (eğilme, burulma vb.) zorlanmalara karşı direncinin bir ölçütüdür.





$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$J_O = I_O = \int_A r^2 dA = I_x + I_y$$

$$I_x = \int y^2 dA \longrightarrow \text{A alanının x eksenine etrafında atalet momenti}$$

$$I_y = \int x^2 dA \longrightarrow \text{A alanının y eksenine etrafında atalet momenti}$$

$$I_O = \int r^2 dA \longrightarrow \text{A alanının kutupsal atalet momenti}$$

$$I_{xy} = \int xy dA \longrightarrow \text{A alanının çarpım atalet momenti}$$

$$\underline{I}_o = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA = \underline{I}_x + \underline{I}_y = \underline{I}_o$$

➤ I_x , I_y ve I_o her zaman pozitiftir

➤ $I_{xy} \pm$ olabilir.

$I_x, I_y, I_o, I_{xy} = (L^4)$ yani m^4, cm^4, mm^4 'dür.

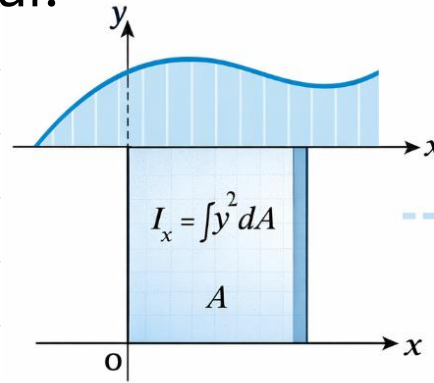
Atalet Yarı Çapları

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} > 0 \quad \underline{I_x} \text{ için atalet yarı çapı}$$

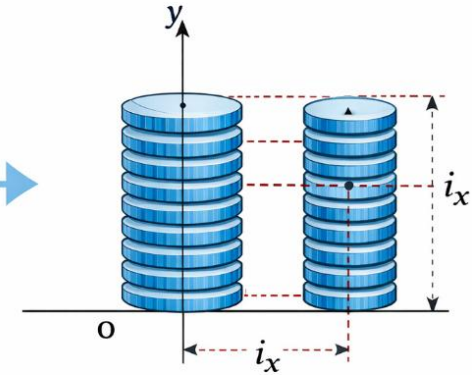
$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} > 0 \quad \underline{I_y} \text{ için atalet yarı çapı}$$

I_{xy} için atalet yarıçapı yoktur.

Bu kesitin tüm alanını, x ekseninden i_x uzaklıkta toplarsam, aynı atalet etkisini elde ederim



Kesit Alanı, A



$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

Alanı A olan küçük disklerin i_x uzaklığında toplanması

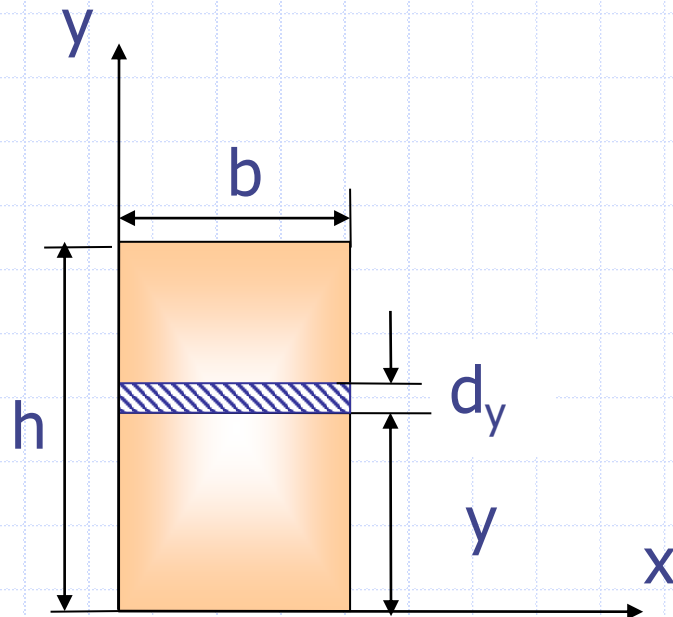
$$i_o = \sqrt{\frac{I_o}{A}} > 0 \quad I_o \text{ için atalet yarı çapı}$$

$$i_o = \sqrt{\frac{I_x}{A} + \frac{I_y}{A}} = \sqrt{i_x^2 + i_y^2}$$

$$i_x, i_y, i_o > 0 \quad (L) \quad (\text{mm, cm, m})$$

Örnek

Dikdörtgenin tabanından geçen eksene göre atalet momenti



$$dA = b \cdot dy$$

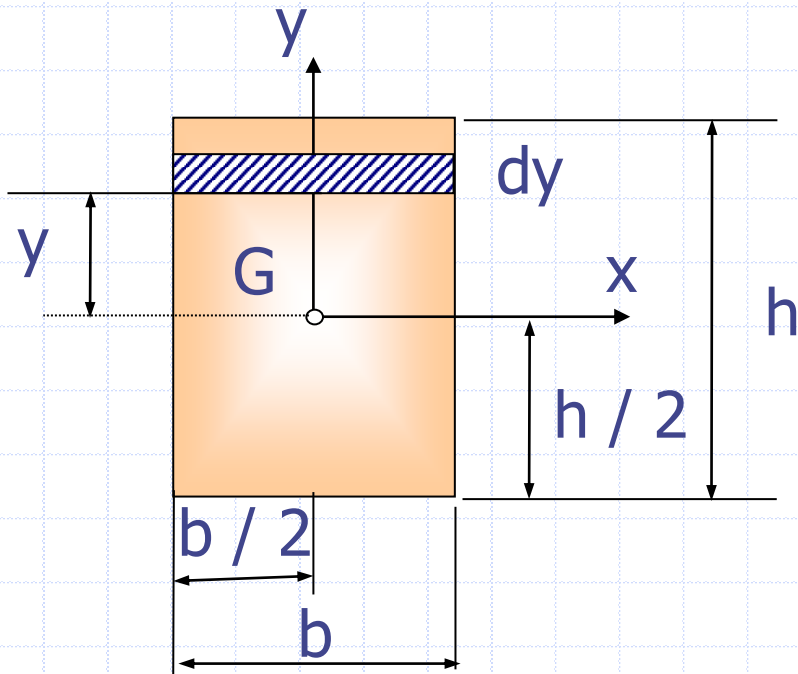
$$I_x = \int y^2 dA = b \cdot \int_0^h y^2 dy = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{3}$$

Örnek

Dikdörtgenin ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momenti



$$I_x = \int y^2 dA \quad dA = b \cdot dy$$

$$I_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b \cdot \left| \frac{y^3}{3} \right|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Benzer şekilde; $I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$

Cismin tabanından geçen eksene göre ve ağırlık merkezinden geçen eksenlere göre atalet momentleri farklıdır. Ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momenti minimum atalet momentidir.

$$\text{Ağırlık merkezinde; } I_{xy} = \int x \cdot y \cdot dA = 0$$

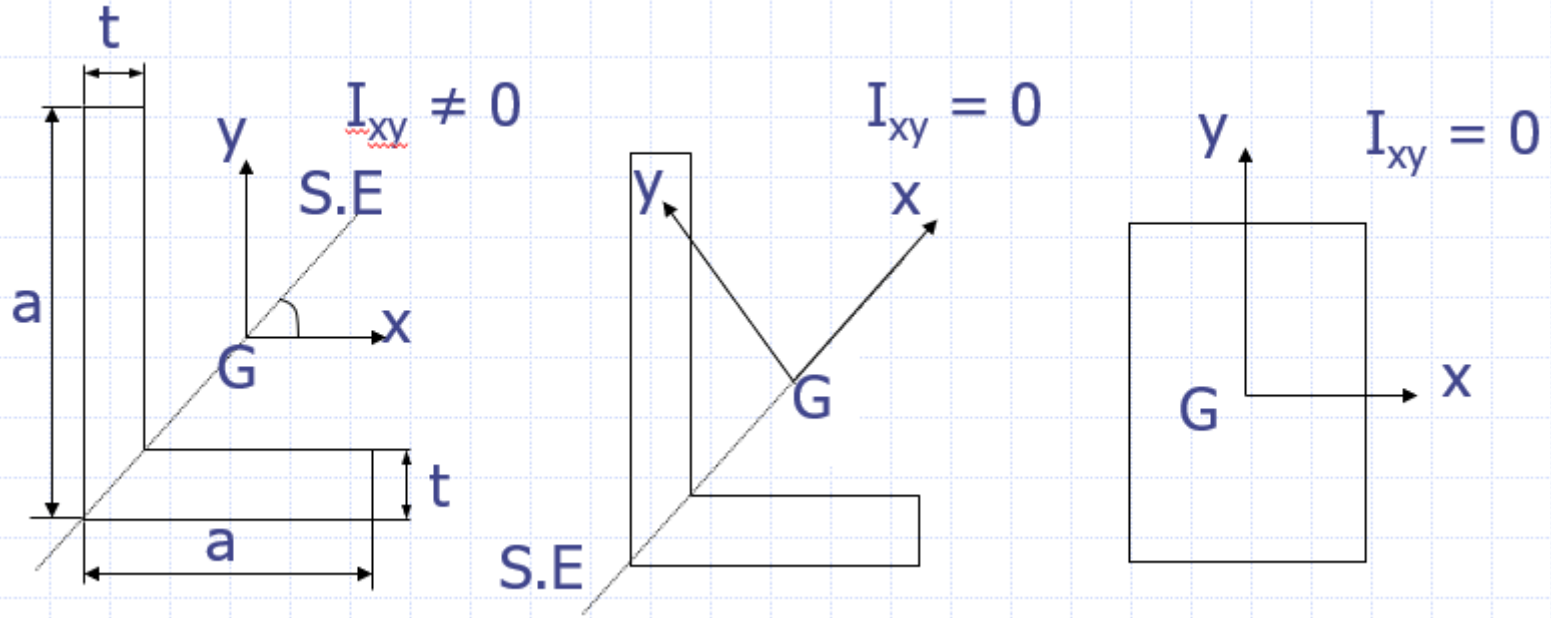
$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{b \cdot h^3}{12 \cdot b \cdot h}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

$$i_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$$

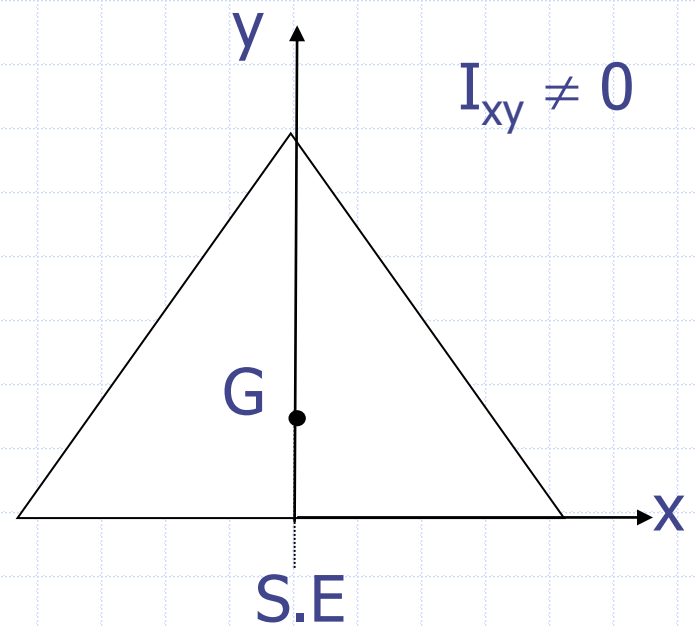
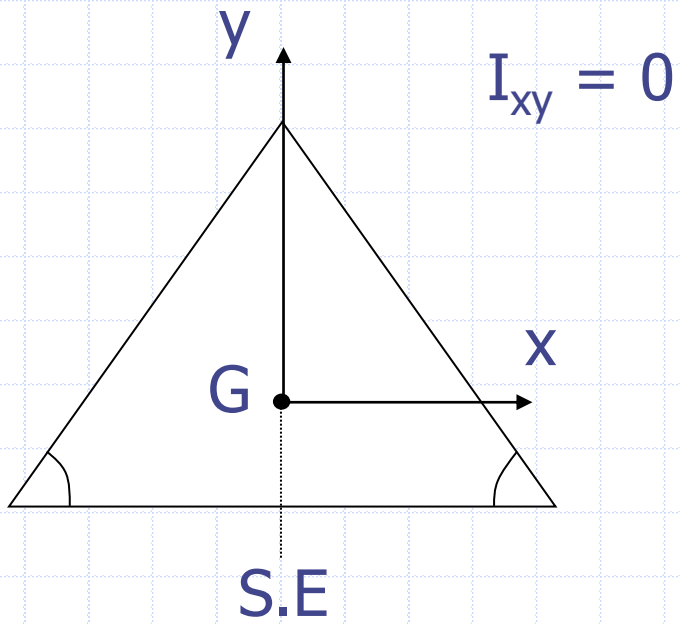
$$i_o = \sqrt{\frac{h^2}{12} + \frac{b^2}{12}}$$

Eğer kesit bir simetri eksenine sahip ve xy eksen takımının eksenlerinden birisi bu simetri eksenine çakışacak şekilde seçilirse ve buna ek olarak xy eksen takımının orijini G ağırlık merkezinde ise kesitin çarpım atalet momenti $I_{xy} = 0$ 'dır. (SE: Simetri Ekseni)



⚠ Küçük ama önemli not

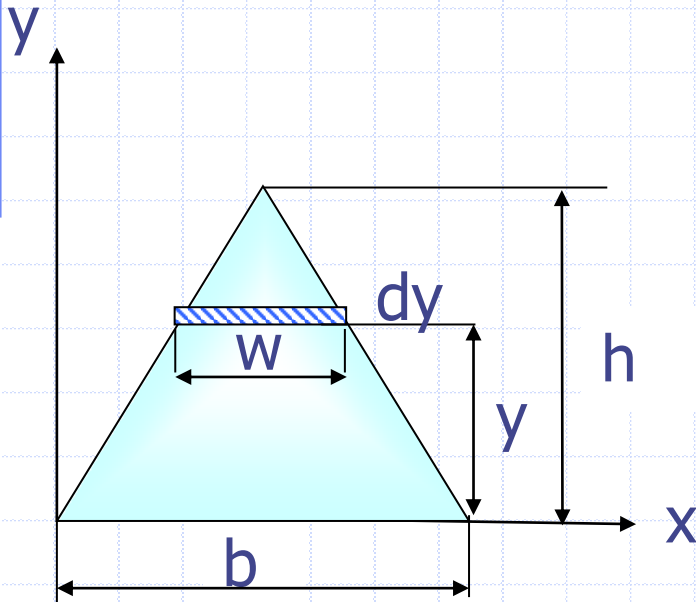
- $I_{xy} = 0$ her zaman değil, sadece:
 - simetri varsa
 - veya uygun eksen seçilmişse



Örnek

Üçgenin alan atalet momentinin hesabı

- Taban eksen
- Ağırlık merkezi



$$\underline{I_x} = \int y^2 dA \quad \underline{dA} = \underline{w \cdot dy}$$

$$\frac{w}{b} = \frac{h-y}{h} \quad w = \frac{b}{h}(h-y)$$

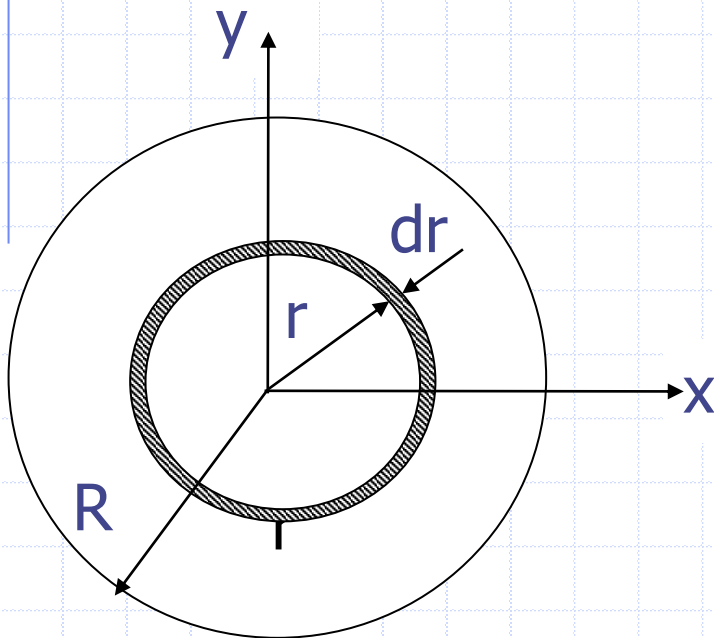
$$I_x = \int_0^h y^2 \left(\frac{b}{h}h - \frac{b}{h}y \right) dy,$$

$$\underline{I_x} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_{xG} = \int_{\frac{-h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^2 dA = \frac{bh^3}{36}$$

Örnek

Daire kesit için atalet momenti



$$dA = 2\pi r \cdot dr \quad I_o = \int r^2 dA = \int_0^R r^2 2\pi r dr$$

$$I_x = I_y$$

$$I_o = 2\pi \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$I_o = I_x + I_y$$

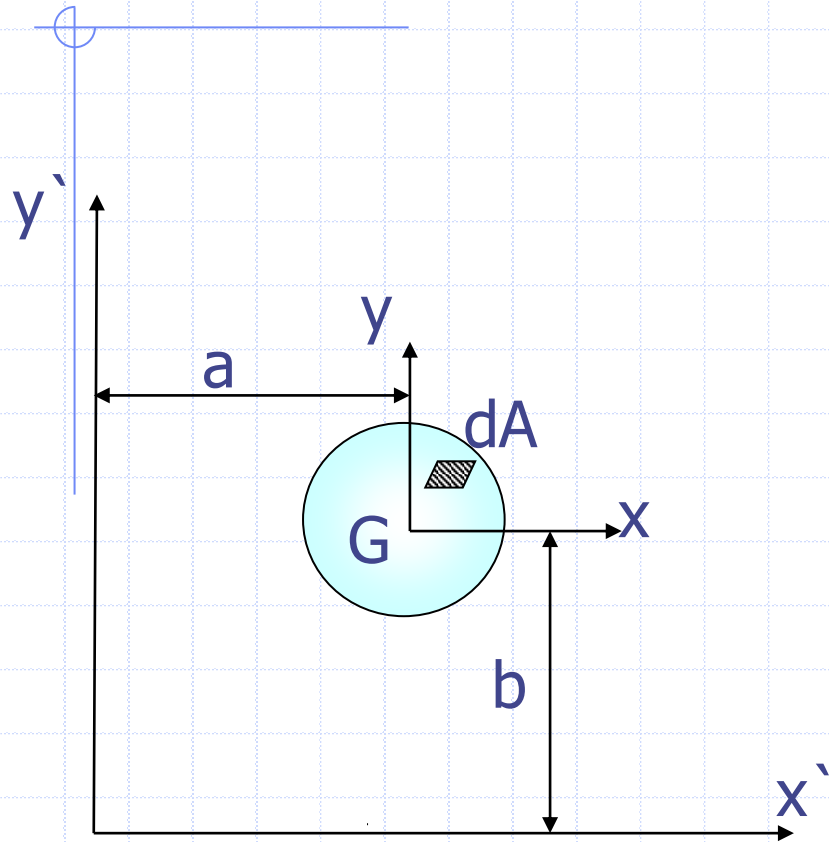
$$I_x = \frac{I_o}{2}$$

$$I_x = \frac{\pi \cdot R^4}{4} = I_y$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} \implies D = 2R \quad I_x = \frac{\pi \cdot D^4}{64} = I_y$$

$$I_o = \frac{\pi R^4}{2} \implies D = 2R \quad I_o = \frac{\pi D^4}{32}$$

EKSENLERİN KAYDIRILMASI (PARALEL OLARAK)



$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

$$I_{xy} = \int xy dA$$

biliniyor

$$I_{x'} = \int y'^2 dA$$

$$I_{y'} = \int x'^2 dA$$

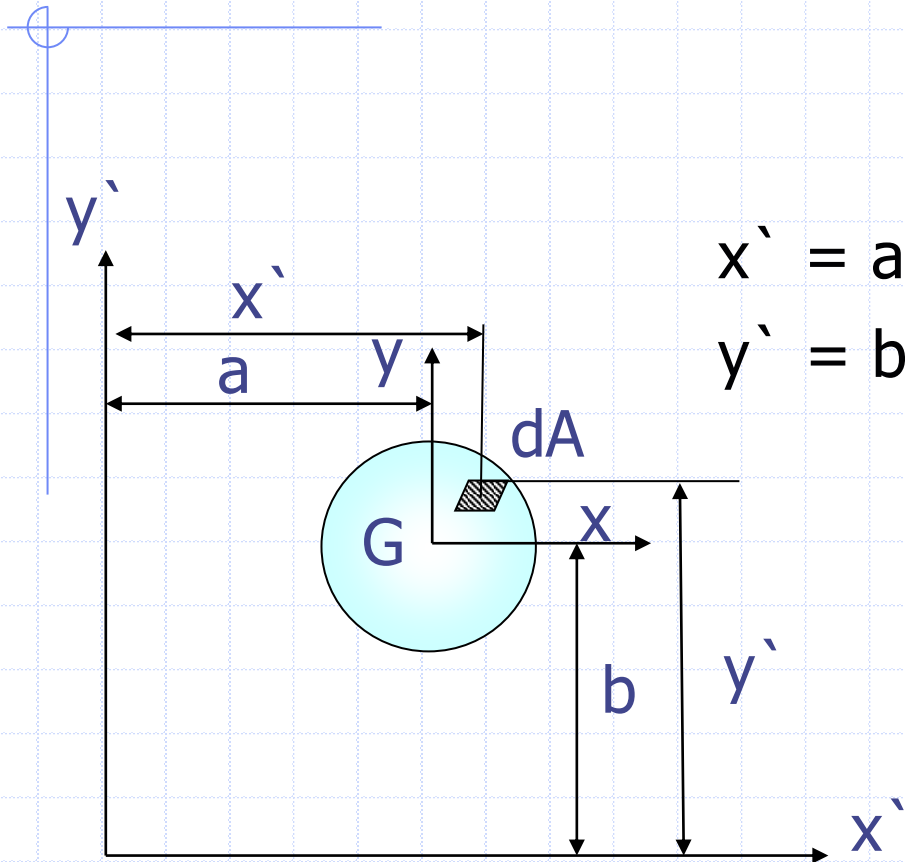
$$I_{x'y'} = \int x'y' dA$$

$$S_x = \int y \cdot dA = 0$$

$$S_y = \int x \cdot dA = 0$$

Ağırlık merkezi
biliniyor ve 0 demek

(a ve b) aslında x' ve y' takımındaki koordinatları olarak ifade edersek



$$x' = a + x$$

$$y' = b + y$$

$$I_{x'} = \int y'^2 dA$$

$$I_{x'} = \int (y + b)^2 dA$$

$$I_{x'} = \int (y^2 + 2yb + b^2) dA$$

$$I_{x'} = \int y^2 dA + 2b \int y dA + b^2 \int dA$$

$$I_{x'} = I_x + A \cdot b^2 > 0$$

$$I_{y'} = \int x'^2 dA$$

$$I_{y'} = \int (x + a)^2 dA$$

$$I_{y'} = I_y + a^2.A > 0$$

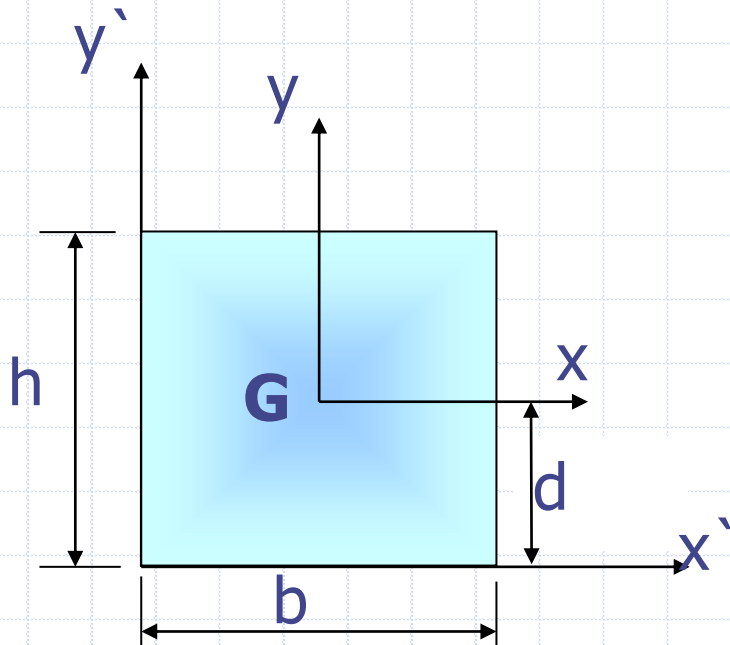
$$I_{x'y'} = \int x'y' dA$$

$$I_{x'y'} = \int (x + a)(y + b) dA = I_{xy} + a.b.A > 0$$

Bir cismin ağırlık merkezinden geçen eksenlere paralel herhangi bir eksene göre atalet momenti, cismin ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momenti ile bu paralel iki eksen arasındaki uzaklığın karesinin, cismin alanıyla çarpımının toplamına eşittir.

Örnek

Paralel eksenler teoreminin uygulaması



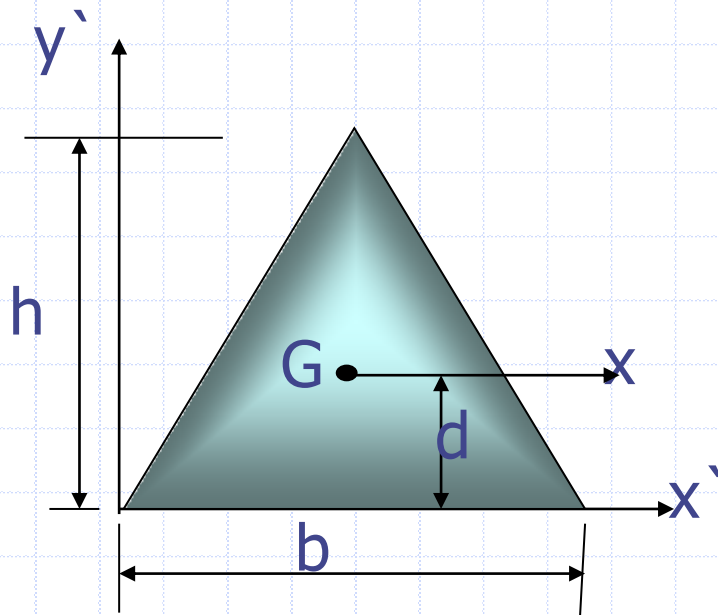
$$I_{x'} = I_{xG} + d^2A$$

$$d = \frac{h}{2}$$

$$I_{x'} = \frac{b \cdot h^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 b \cdot h = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

Örnek

Paralel eksenler teoreminin uygulaması



$$I_x = I_{xG} + Ad^2$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad A = \frac{bh}{2} \quad d = \frac{h}{3}$$

$$\frac{bh^3}{12} = I_{xG} + \frac{bh}{2} \left(\frac{h}{3}\right)^2$$

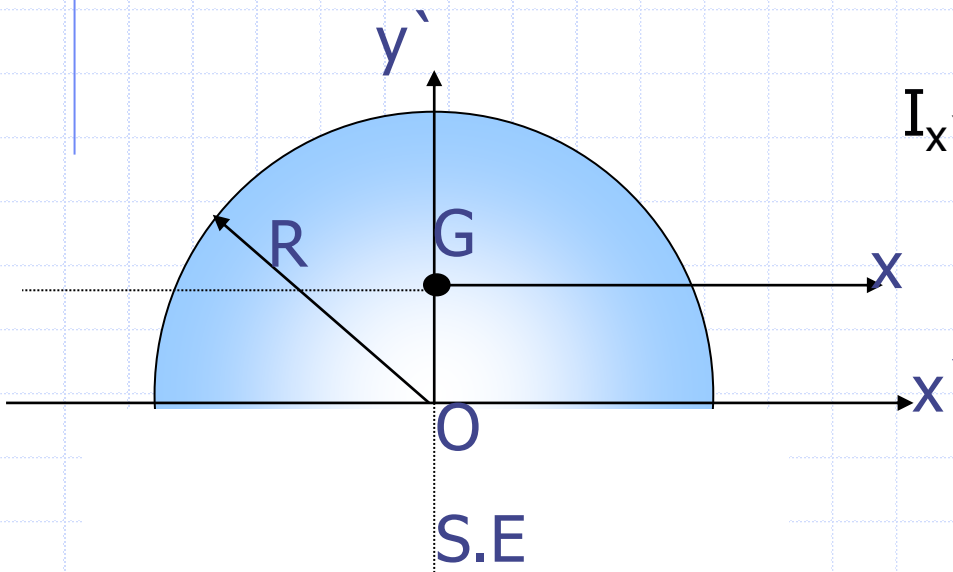
$$\frac{bh^3}{12} = I_{xG} + \frac{bh}{2} \cdot \frac{h^2}{9}$$

$$\frac{bh^3}{12} = I_{xG} + \frac{bh^3}{18}$$

$$I_{xG} = \frac{bh^3}{36}$$

Örnek

Yarım dairenin atalet momentinin hesabı



$$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot R^4}{4} \quad (\text{Tüm daire})$$

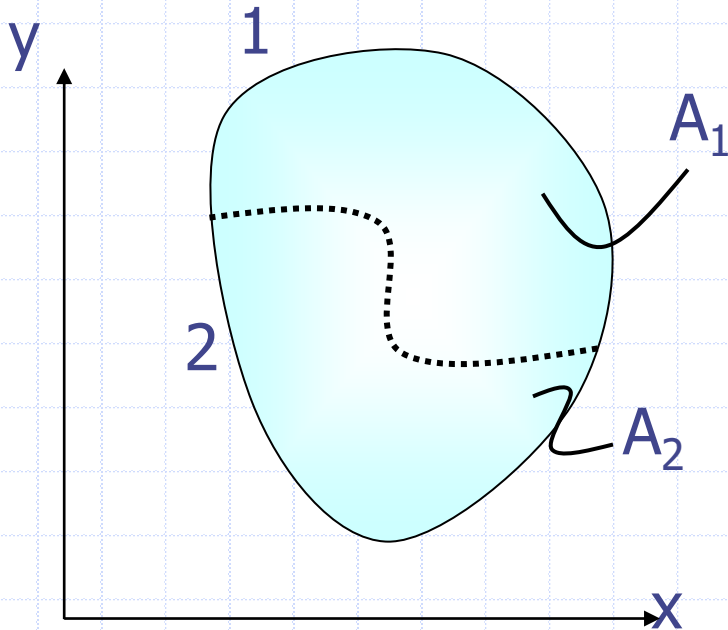
$$I_{x'} = I_{y'} = \frac{\pi \cdot R^4}{8} \quad (\text{Yarım daire})$$

$$I_{x'} = I_{xG} + d^2 A$$

$$\frac{\pi \cdot R^4}{8} = I_{xG} + \left(\frac{4 \cdot R}{3\pi} \right)^2 \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{2}$$

$$I_{xG} = \frac{\pi \cdot R^4}{8} \cdot \left[1 - \frac{64}{9\pi^2} \right]$$

BİLEŞİK CİSİMLERİN ATALET MOMENTLERİ

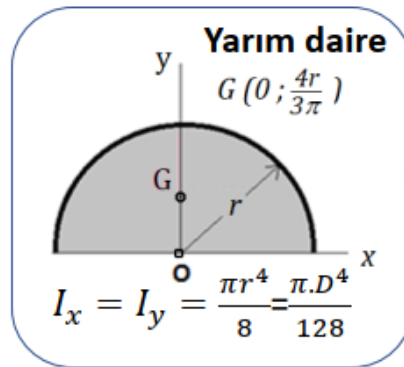
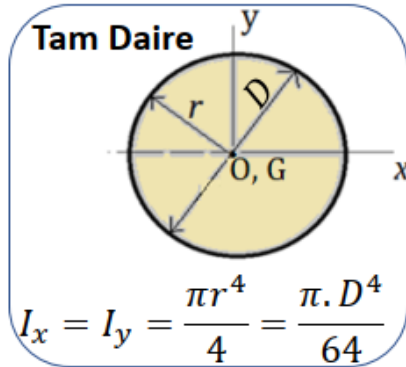


$$A = A_1 + A_2$$

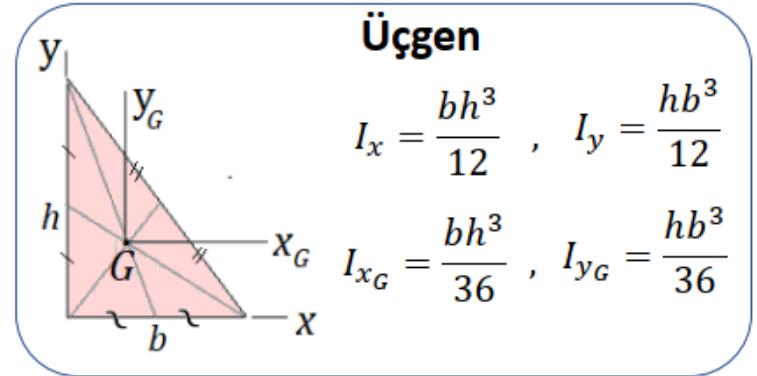
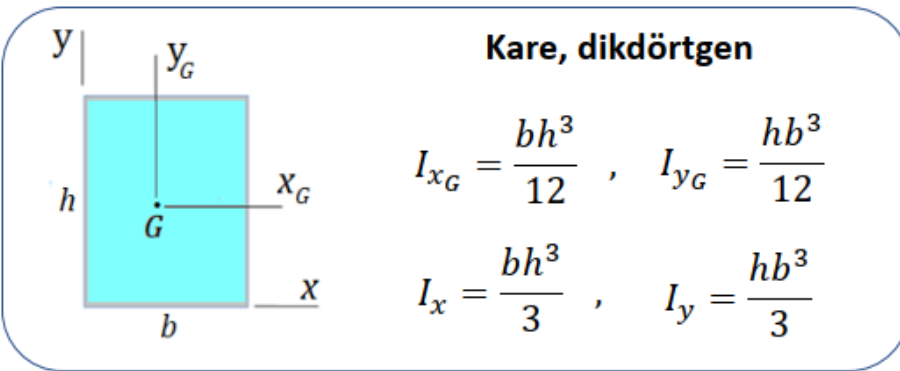
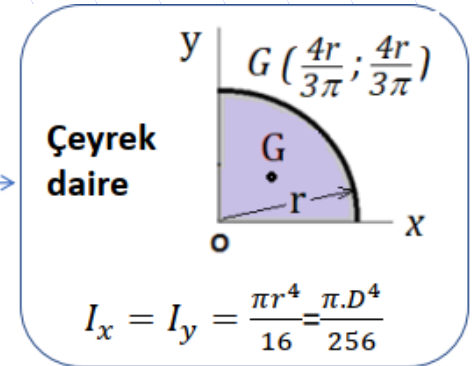
$$I_x = I_{x1} + I_{x2}$$

$$I_y = I_{y1} + I_{y2}$$

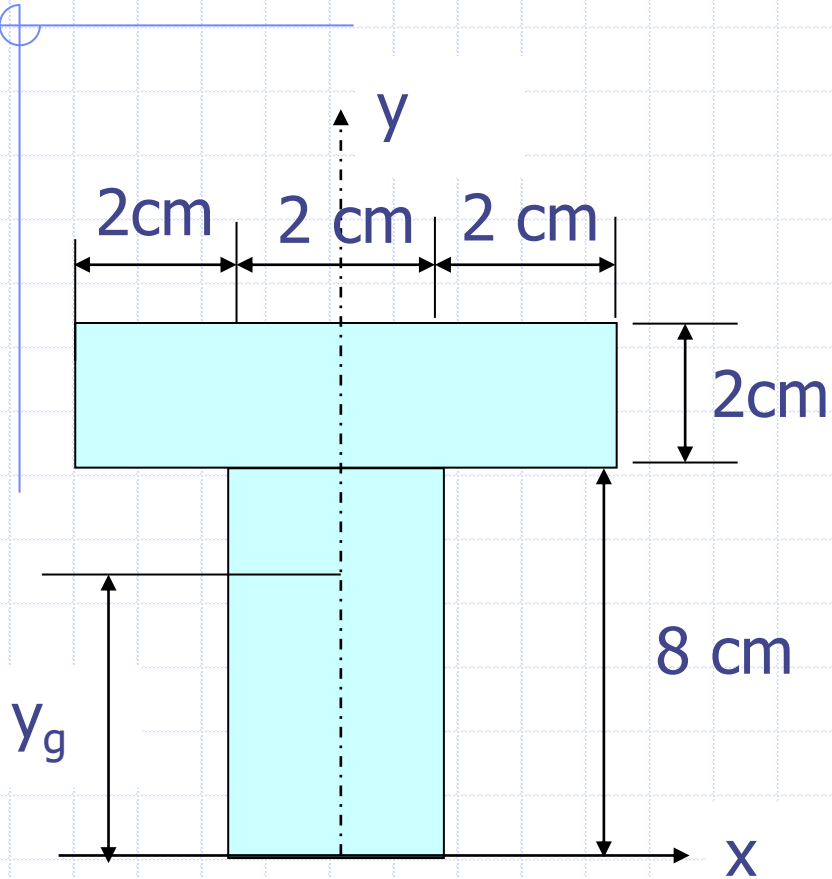
$$I_{xy} = I_{xy1} + I_{xy2}$$



Dikkat:
 I_x ve I_y daire merkezinden (O dan) geçen eksenlere göre dir.



Örnek



a) Verilen profil kesitte I_x , I_y ve I_{xy} atalet momentlerini

b) Cismin ağırlık merkezinden geçen eksenlere göre atalet momentleri

a..)

$$I_x = I_{x1} + I_{x2}$$

$$I_x = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + d_1^2 \cdot A_1 + \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + d_2^2 \cdot A_2$$

$$I_x = \frac{6 \cdot 2^3}{12} + 9^2 \cdot 12 + \frac{2 \cdot 8^3}{12} + 4^2 \cdot 16$$

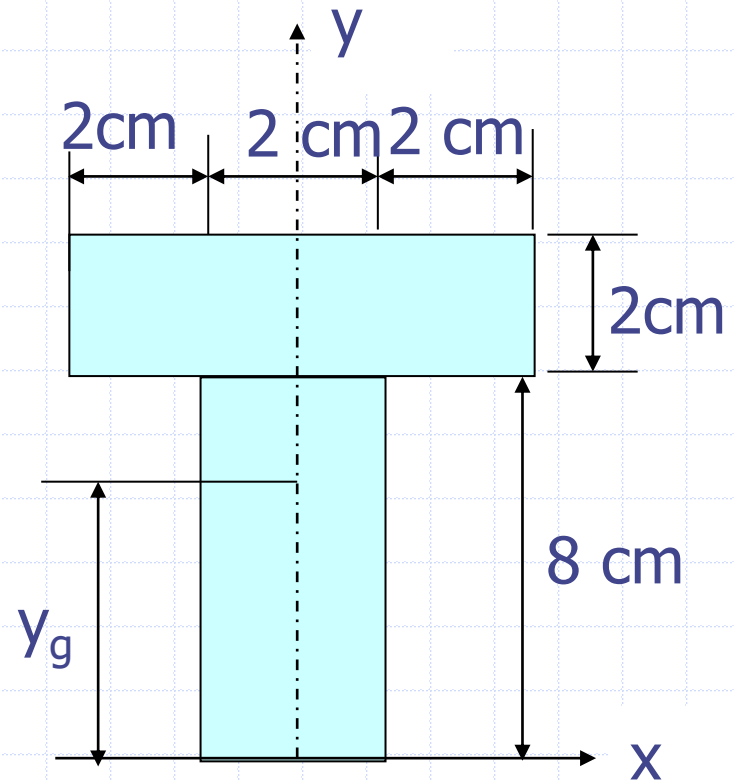
$$= 1317,33 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_{y1} + I_{y2}$$

$$I_y = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + d_1^2 \cdot A_1 + \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + d_2^2 \cdot A_2$$

$$I_y = \frac{2 \cdot 6^3}{12} + \frac{8 \cdot 2^3}{12} = 41,33 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 0$$



b..)

$$x_g = 0$$

$$y_g = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{9 \cdot 12 + 4 \cdot 16}{12 + 16} = 6,14 \text{ cm}$$

$$I_{x'} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + d_1^2 \cdot A_1 + \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + d_2^2 \cdot A_2$$

$$I_{x'} = \frac{6 \cdot 2^3}{12} + (9 - 6,14)^2 \cdot 12 + \frac{2 \cdot 8^3}{12} + (4 - 6,14)^2 \cdot 16 = 260,76 \text{ cm}^4$$

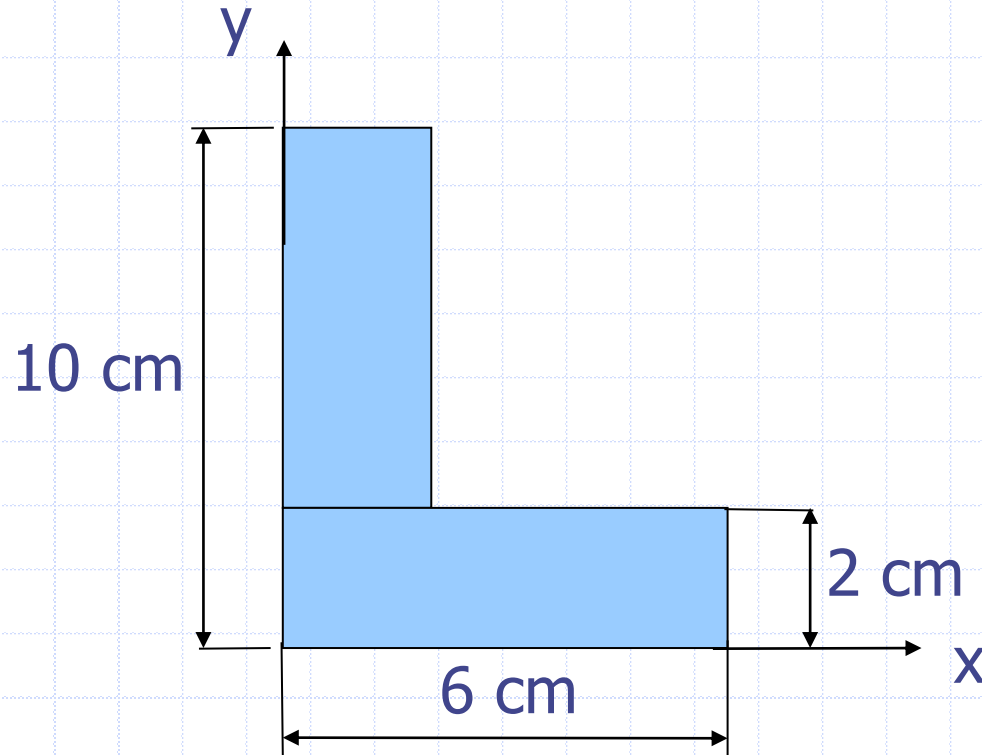
$$I_{y'} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + d_1^2 \cdot A_1 + \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + d_2^2 \cdot A_2$$

$$I_y = \frac{2 \cdot 6^3}{12} + \frac{8 \cdot 2^3}{12} = 41,33 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 0$$

Örnek

Verilen profil kesitin ağırlık merkezinden geçen eksenlere göre atalet momentlerini hesaplayınız.



$$x_g = \frac{1.16 + 3.12}{16 + 12} \cong 1.85$$

$$y_g = \frac{6.16 + 1.12}{16 + 12} \cong 3,85$$

$$I_{x'} = \frac{2.8^3}{12} + (6 - 3,85)^2 \cdot 16 + \frac{6.2^3}{12} + (1 - 3,85)^2 \cdot 12 = 260,76 \text{ cm}^4$$

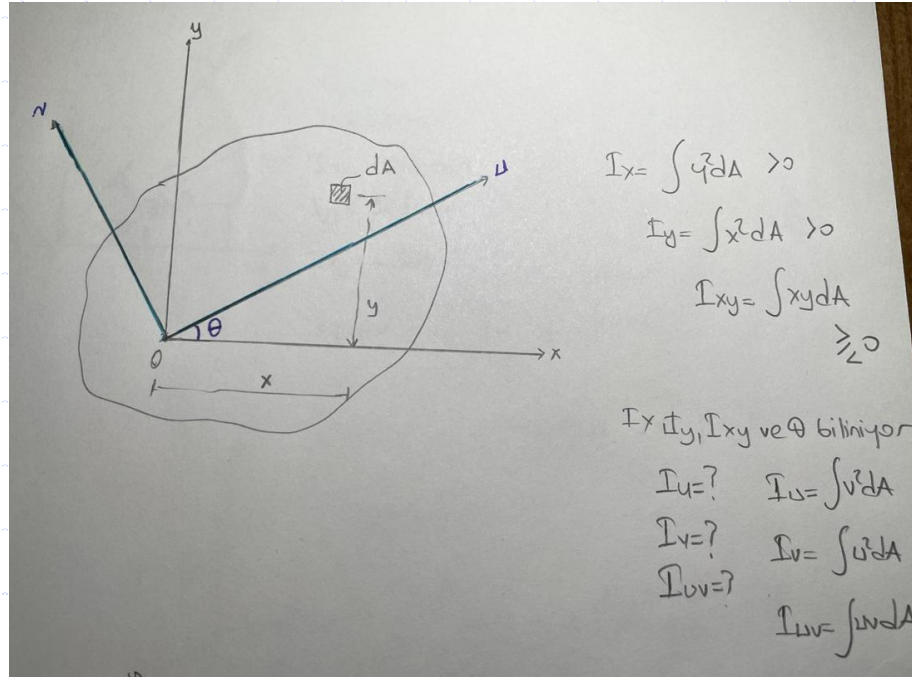
$$I_{y'} = \frac{8.2^3}{12} + (1 - 1,85)^2 \cdot 16 + \frac{2.6^3}{12} + (3 - 1,85)^2 \cdot 12 = 68.76 \text{ cm}^4$$

$$I_{x'y'} = I_{x_1y_1} + I_{x_2y_2}$$

$$\begin{aligned} &= x_1 \cdot y_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot y_2 \cdot A_2 \\ &= (1-1,85) \cdot (6-3,85) \cdot 16 + (3-1,85) \cdot (1-3,85) \cdot 12 \\ &= (-0,85) \cdot (2,15) \cdot 16 + (1,15) \cdot (-2,85) \cdot 12 \\ &= -68,57 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

EKSENLERİN DÖNDÜRÜLMESİ (ASAL EKSENLER VE ASAL ATALET MOMENTLERİ)

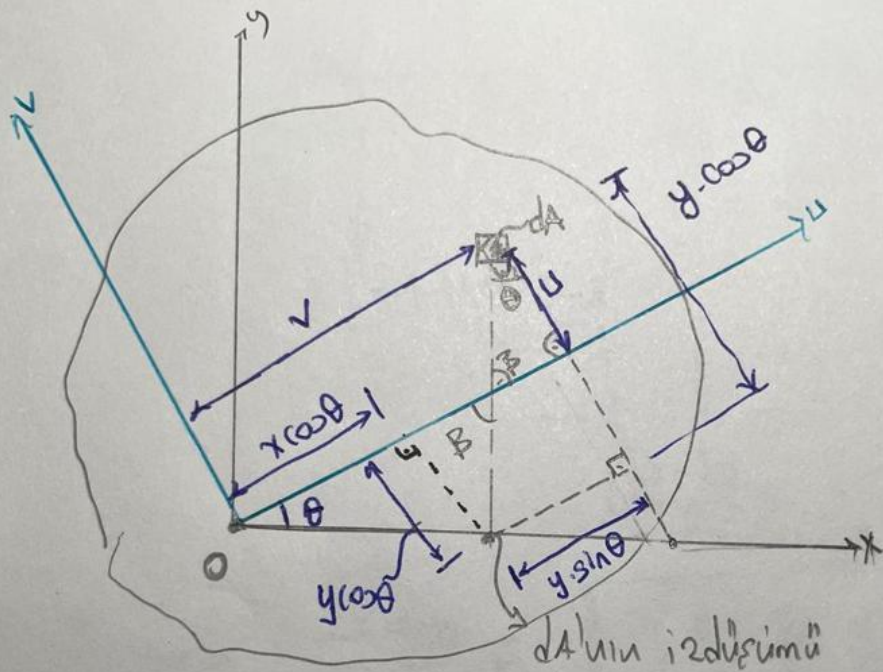
Atalet momentlerinin seçilen eksenlere göre yer aldıkları ve bu eksenlerin değişmesiyle tabii olarak değiştiklerini daha önce görmüştük. Şimdi eksenlerin döndürülmesi halinde atalet momentlerinin nasıl değiştiğini inceleyelim.



Kısaca

Bu slayt şunu söylüyor:

"Eksenleri döndürdüğünde, atalet momentleri de dönüşür ve doğru açıyı bulursan sistem en sade hale gelir."



$$u = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$v = y \cos \theta - x \sin \theta$$

$$I_u = \int v^2 dA = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA$$

$$I_u = \cos^2 \theta \int y^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int xy dA + \sin^2 \theta \int x^2 dA$$

$$1.) \quad I_u = I_x \cdot \cos 2\theta - 2 \cdot I_{xy} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + I_y \cdot \sin 2\theta$$

$$I_u = \int v^2 dA = \int (x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta)^2 dA = \cos^2 \theta \int x^2 dA + 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \int x \cdot y \cdot dA + \sin^2 \theta \int y^2 dA$$

$$2.) \quad I_v = I_x \cdot \cos 2\theta + 2 \cdot I_{xy} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + I_y \cdot \sin 2\theta$$

$$3.) \quad I_{uv} = \int u \cdot v \cdot dA = \int (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta)(y \cdot \cos \theta - x \cdot \sin \theta)$$

$$I_{uv} = I_x \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta - I_y \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta + I_{xy} \cdot (\cos 2\theta - \sin 2\theta)$$

$$2 \sin\theta \cdot \cos\theta = \sin 2\theta$$

$\cos 2\theta - \sin 2\theta = \cos 2\theta$ dönüşümleri yapılırsa

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos 2\theta - I_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos 2\theta + I_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

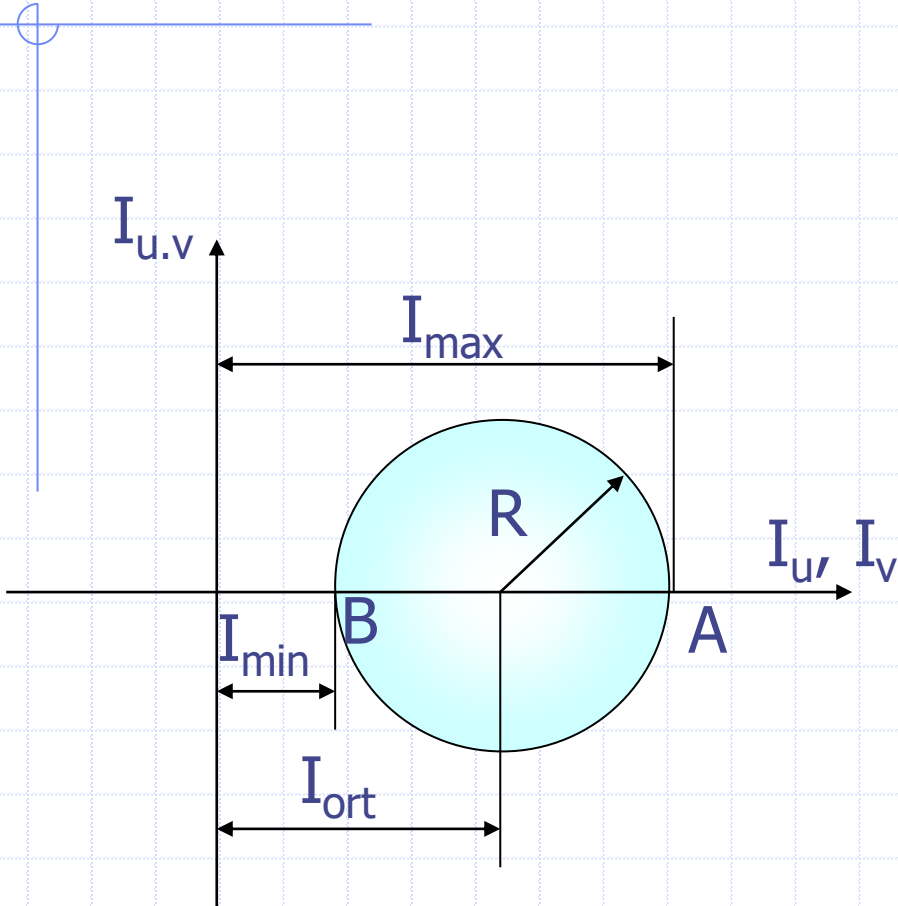
$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin 2\theta - I_{xy} \cdot \cos 2\theta$$

$$I_{uv} = 0 \quad \text{ise} \quad \tan 2\theta = -\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}$$

Eğer I_u , I_v , I_{uv} 'den θ ' lı terimler yok edilirse

Asal eksen:

Atalet momentinin en büyük veya en küçük olduğu ve çarpım atalet momentinin sıfır olduğu eksenlerdir.



$$I_{max} = I_{ort} + R$$

$$I_{min} = I_{ort} - R$$

Atalet momentinin maksimum ve minimum değerine asal atalet momentleri, bunların bulunduğu eksenlere asal eksenler denir.

Asal eksenler üzerinde $I_{xy} = 0$ 'dır.

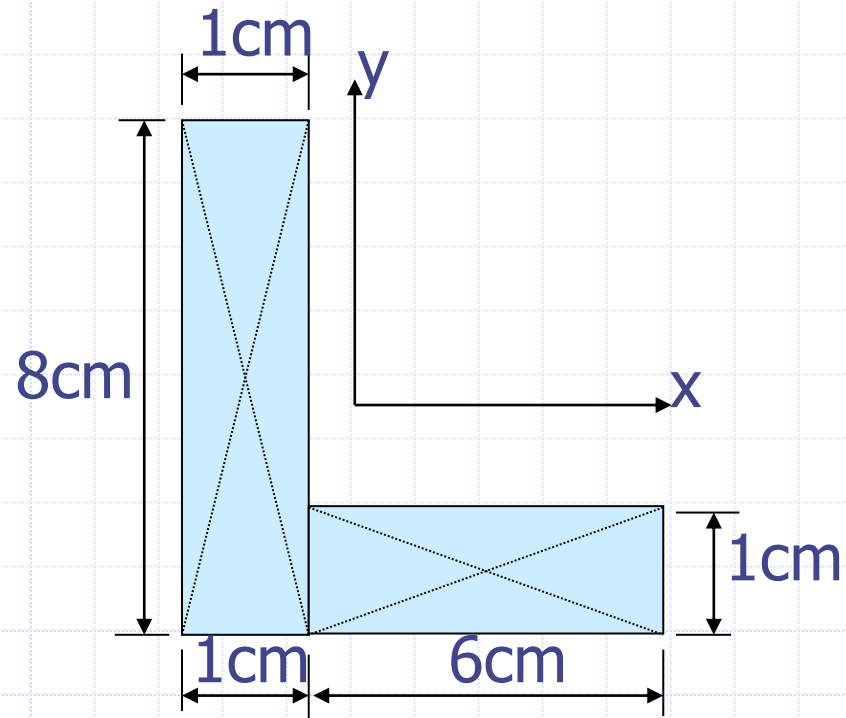
$$I_{\text{ort}} = \frac{I_x + I_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{\text{max, min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Örnek

Aşağıdaki şekilde I_x , I_y , I_{xy} , I_{\max} , I_{\min} hesaplayınız.



$$x_g = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0,5 \cdot 8 + 4 \cdot 6}{8 + 6} = 2 \text{ cm}$$

$$y_g = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{4 \cdot 8 + 0,5 \cdot 6}{8 + 6} = 2,5 \text{ cm}$$

$$I_x = \frac{1 \cdot 8^3}{12} + (4 - 2,5)^2 \cdot 8 + \frac{6 \cdot 1^3}{12} + (0,5 - 2,5)^2 \cdot 6 = 85,16 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{8 \cdot 1^3}{12} + (0,5 - 2)^2 \cdot 8 + \frac{1 \cdot 6^3}{12} + (4 - 2,5)^2 \cdot 6 = 50,16 \text{ cm}^4$$

$$\begin{aligned} I_{xy} &= x_1 \cdot y_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot y_2 \cdot A_2 \\ &= (0,5-2) \cdot (4-2,5) \cdot 8 + (4-2,5)(0,5-2,5) \cdot 6 \\ &= -36 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\tan 2\theta = -\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}$$

$$\tan 2\theta = -\frac{2 \cdot (-36)}{85,16 - 50,16}$$

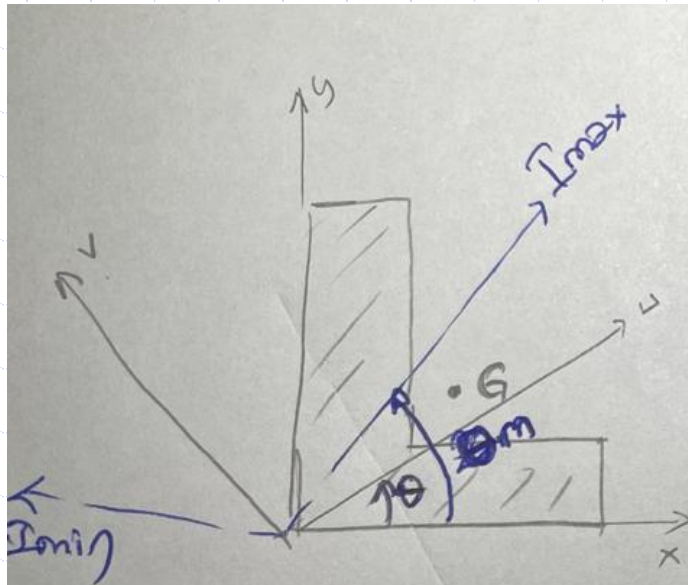
$$\theta = 32^\circ$$

$$\begin{aligned} I_{\max, \min} &= \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \\ &= \frac{85,16 + 50,16}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{85,16 - 50,16}{2}\right)^2 + (-36)^2} \end{aligned}$$

$$R = 40,02$$

$$I_{\max} = 67,66 + 40,02 = 107,68 \text{ cm}^4$$

$$I_{\min} = 67,66 - 40,02 = 27,64 \text{ cm}^4$$



$$x_G = 2 \text{ cm}$$

$$y_G = 2.5 \text{ cm}$$

$$I_x = 85.16 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 50.16 \text{ cm}^4$$

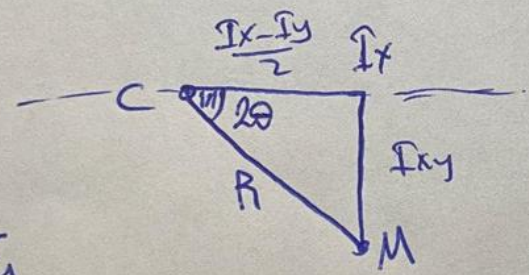
$$I_{xy} = -36 \text{ cm}^4$$

$$2\theta = 64^\circ$$

$$\tan 2\theta = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = \theta = 32^\circ$$

$$M \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} \\ 85.16 & -36 \end{pmatrix}$$

$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2}$$

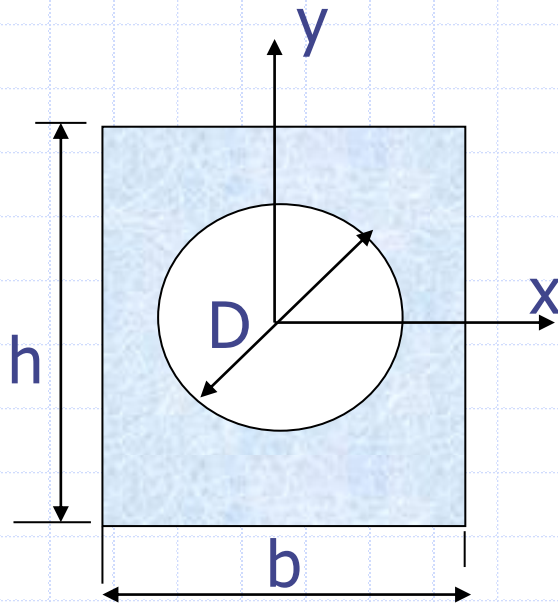


$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2}$$

$$\frac{d}{d\theta} 2\theta = -\frac{I_{xy}}{I_x - I_y}$$

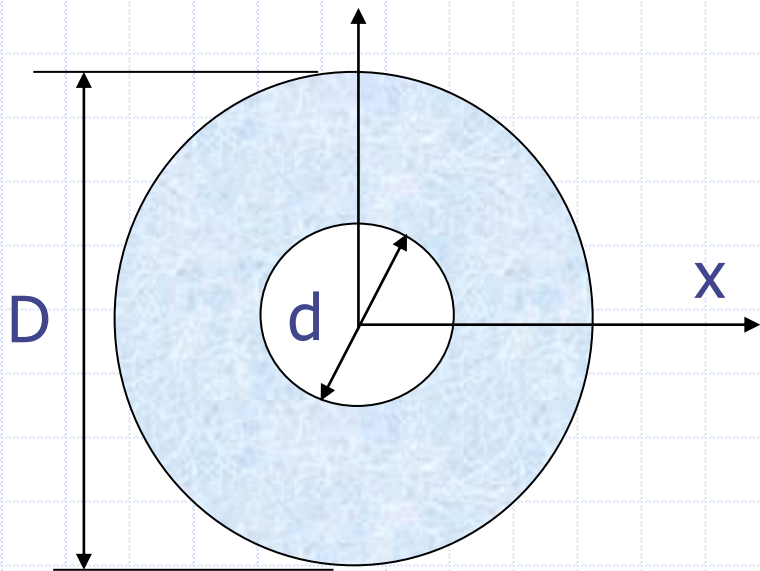
$\left(\frac{d}{d\theta} 2\theta = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \right) \Rightarrow$ derivate positiv gibt.

NOT: Bir kesitte delik varsa dolu kesitin atalet momentinden deliğin atalet momentini çıkarılır.



$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{\pi \cdot D^4}{64}$$

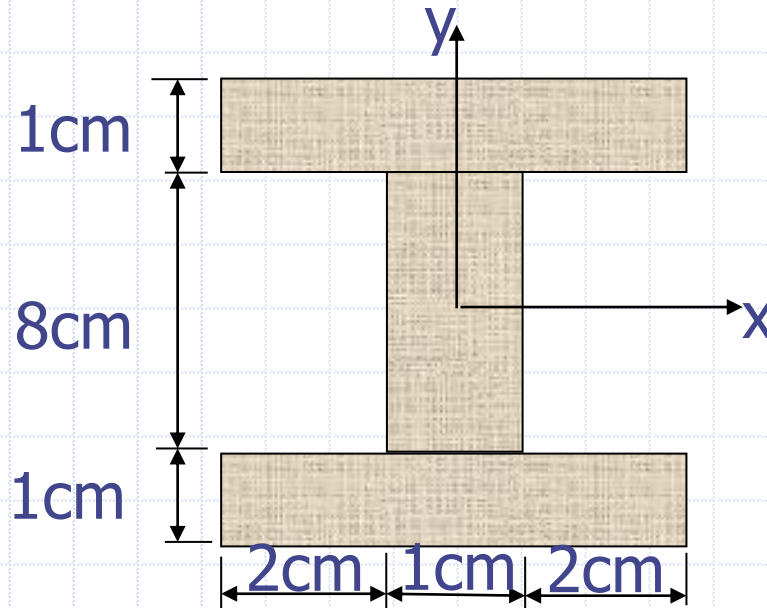
$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12} - \frac{D \cdot \pi^4}{64}$$



$$I_x = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$

Örnek

Şekildeki cismin I_x , I_y , I_{xy} hesaplayınız.

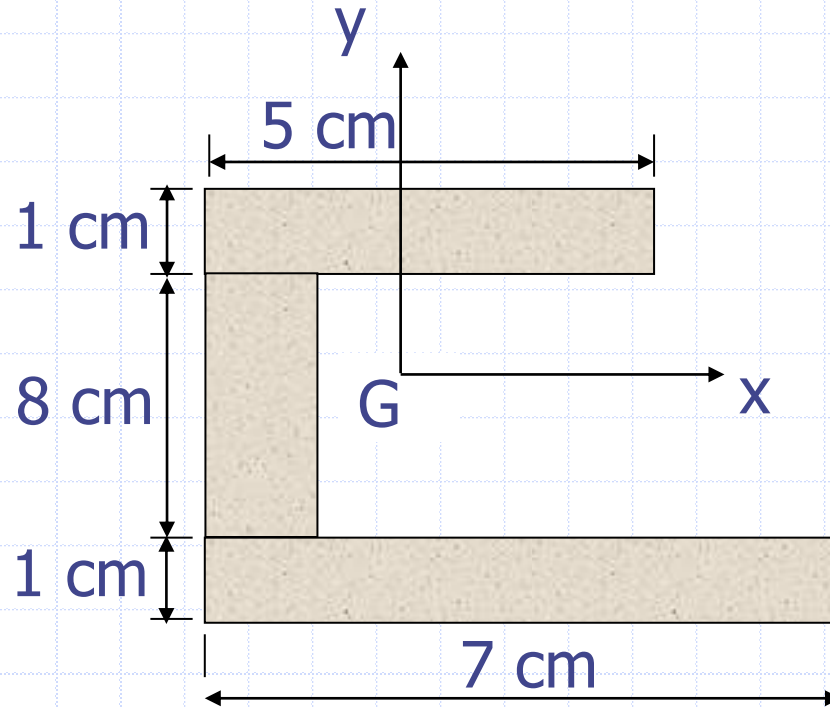


$$I_x = \frac{1.8^3}{12} + \left(\frac{5.1^3}{12} + (4,5)^2 \cdot 5 \right) \cdot 2 = 246 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{8.1^3}{12} + 2 \cdot \left(\frac{5^3 \cdot 1}{12} \right) \text{ veya } \frac{10.5^3}{12} - 2 \left(\frac{8.2^3}{12} + (1,5)^2 \cdot 16 \right) = 21,5 \text{ cm}^4$$

Örnek

Verilen profil kesitte ağırlık merkezinden geçen x, y eksen takımına göre atalet momentlerini hesaplayınız.



$$x = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{2,5 \cdot 5 + 0,5 \cdot 8 + 3,5 \cdot 7}{20} = 2,0 \text{ cm}$$

$$y = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{9,5 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + 0,5 \cdot 7}{20} = 4,5 \text{ cm}$$

$$I_x = \frac{5 \cdot 1^3}{12} + 5^2 \cdot 5 + \frac{1 \cdot 8^3}{12} + (0,5)^2 \cdot 8 + \frac{1^3 \cdot 7}{12} + 4^2 \cdot 7 = 282,6 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{1 \cdot 5^3}{12} + 10,55^2 \cdot 5 + \frac{8 \cdot 1^3}{12} + (1,5)^2 \cdot 8 + \frac{1 \cdot 7^3}{12} + (1,5)^2 \cdot 7 = 74,6 \text{ cm}^4$$

$$\begin{aligned} I_{xy} &= x_1y_1A_1 + x_2y_2A_2 + x_3y_3A_3 \\ &= 0,5 \cdot 5,5 + (-1,5)(0,5) \cdot 8 + (1,5)(-4) \cdot 7 \\ &= -35,5 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\tan 2\theta = -\frac{2 \cdot (-35,5)}{282,6 - 74,6}$$

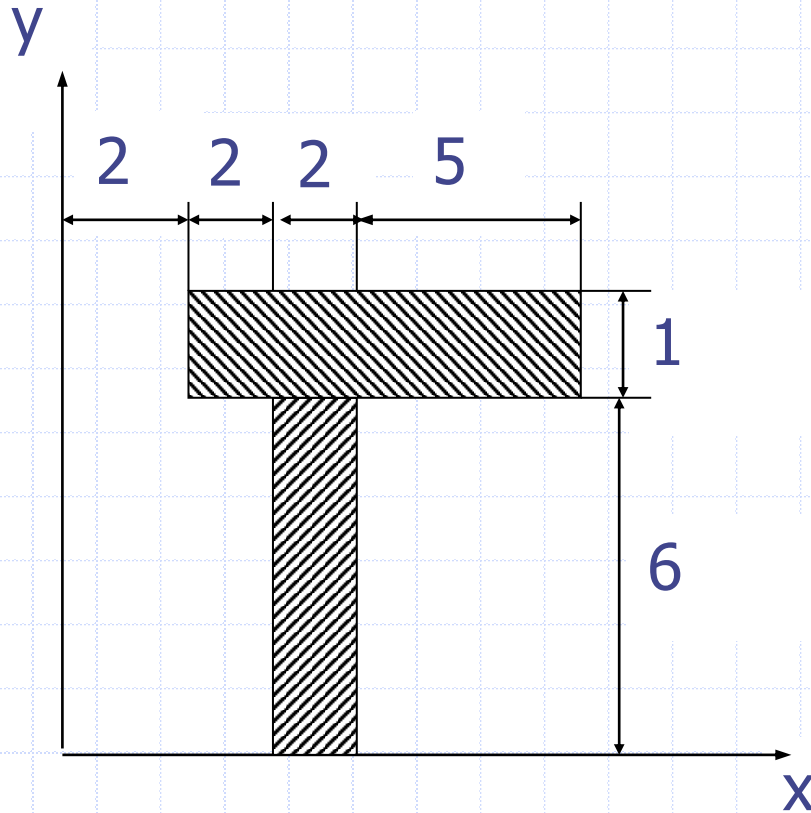
$$\theta = 9,42^\circ$$

$$I_{\max, \min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$
$$= \frac{282,6 + 74,6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{282,6 - 74,6}{2}\right)^2 + (-35,5)^2}$$

$$I_{\max} = 178,6 + 109,89 = 288,49 \text{ cm}^4$$

$$I_{\min} = 178,6 - 109,89 = 68,71 \text{ cm}^4$$

ALAN ATALET MOMENTİ İLE İLGİLİ ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER



- Ağırlık merkezini bulunuz.
 - Ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momentlerini hesaplayınız.
- Not: Ölçüler cm'dir.

$$x = \frac{9 \times 6,5 + 12 \times 5}{9 + 12} = \frac{118,5}{21} = 5,64 \text{ cm}$$

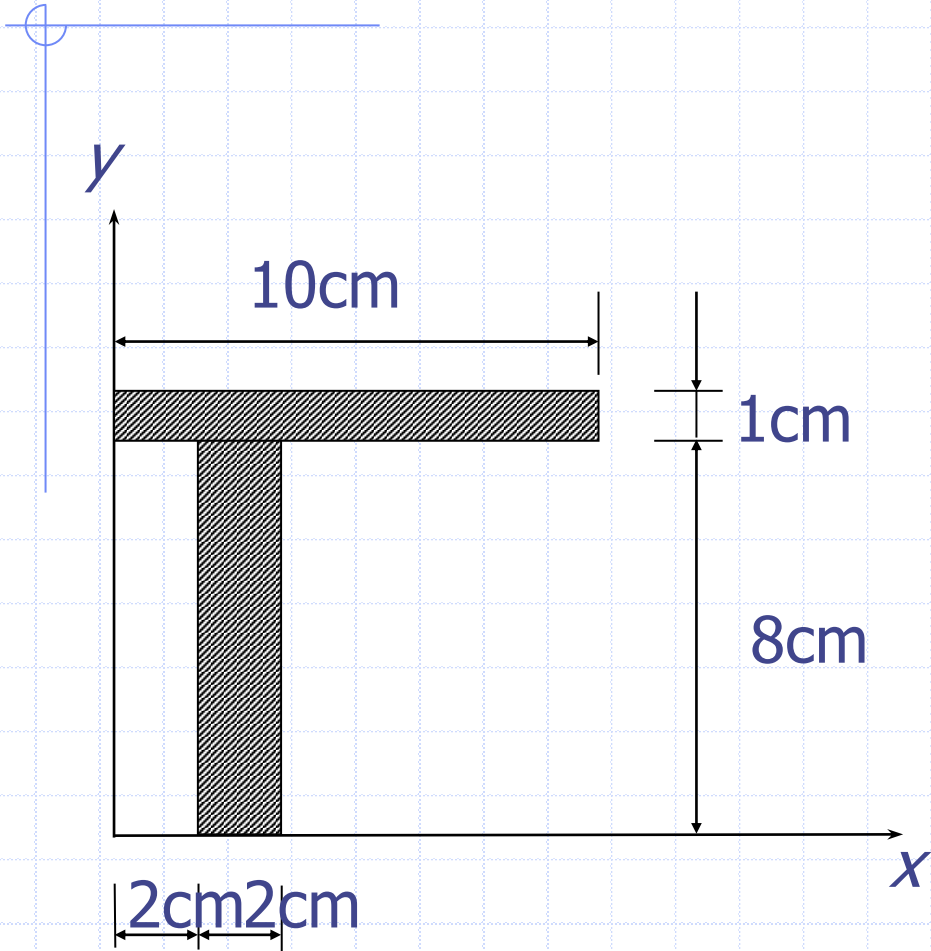
$$y = \frac{9 \times 6,5 + 12 \times 3}{21} = 4,5 \text{ cm}$$

$$I_x = \frac{9 \times 1^3}{12} + (9)(6,5 - 4,5)^2 + \frac{6^3 \times 2}{12} + (12)(3 - 4,5)^2$$

$$I_x = 0,75 + 36 + 36 + 27 = 99,75 \text{ cm}^4$$

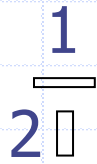
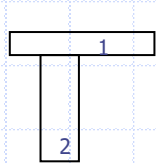
$$I_y = \frac{1 \times 9^3}{12} + (9)(6,5 - 5,64)^2 + \frac{2^3 \times 6}{12} + (12)(5 - 5,64)^2$$

$$I_y = 60,75 + 6,65 + 4 + 4,91 = 76,31 \text{ cm}^4$$



Verilen kesitin;

- Ağırlık merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.
- Ağırlık merkezinden geçen koordinat eksenine göre atalet momentlerini hesaplayınız.
- Asal atalet momentlerini hesaplayınız.



<i>x</i>	<i>y</i>	<i>A</i>	<i>A_x</i>	<i>A_y</i>
<i>5</i>	<i>8,5</i>	<i>10</i>	<i>50</i>	<i>85</i>
<i>3</i>	<i>4</i>	<i>16</i>	<i>48</i>	<i>64</i>
<i>Toplam</i>		<i>26</i>	<i>98</i>	<i>149</i>

a) $\bar{x} = \frac{\Sigma xA}{\Sigma A} = \frac{98}{26} = 3,77 \text{ cm}$ $\bar{y} = \frac{\Sigma yA}{\Sigma A} = \frac{149}{26} = 5,73 \text{ cm}$

b)

$$I_x = \frac{10 \cdot 1^3}{12} + (8,5 - 5,73)^2 \cdot 10 + \frac{2 \cdot 8^3}{12} + (4 - 5,73)^2 \cdot 16 = 210,78 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{1 \cdot 10^3}{12} + (5 - 3,77)^2 \cdot 10 + \frac{8 \cdot 2^3}{12} + (3 - 3,77)^2 \cdot 16 = 113,28 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 10 \cdot (8,5 - 5,73)(5 - 3,77) + 16 \cdot (4 - 5,73)(3 - 3,77) = 55,38 \text{ cm}^4$$

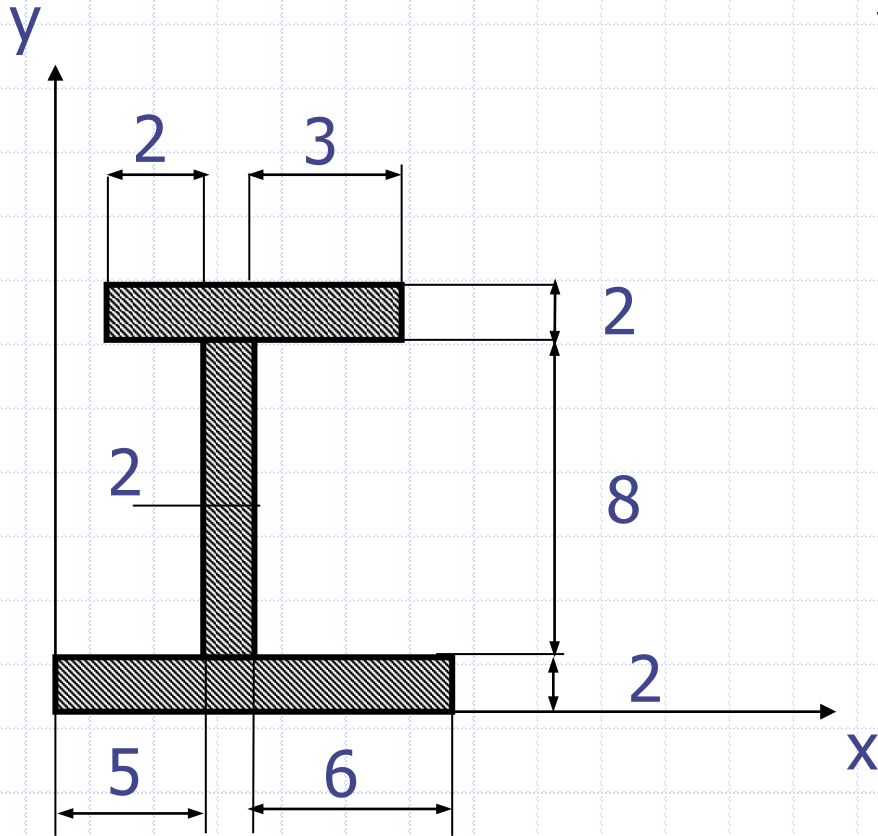
c)

$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} = \frac{210,78 + 113,28}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{210,78 - 113,28}{2}\right)^2 + (55,38)^2}$$

$$I_{\max} = 162,03 \pm 73,78$$

$$\underline{I_{\max} = 235,81 \text{ cm}^4}$$

$$\underline{I_{\min} = 88,25 \text{ cm}^4}$$



Verilen profil kesitte;
a) Ağırlık merkezini,
b) Ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momentini,
c) Asal atalet momentini hesaplayınız.

(verilen ölçüler cm'dir)

	A	x	y	A_x	A_y
1	14	6,5	11	91	154
2	16	6	6	96	96
3	26	6,5	1	169	26
T	56			356	276

$$\bar{x} = \frac{356}{56} = 6,35 \text{ cm} \quad \bar{y} = \frac{276}{56} = 4,92 \text{ cm}$$

b)

$$I_x = \frac{7.2^3}{12} + (6,08)^2 \cdot 14 + \frac{2.8^3}{12} + (1,08)^2 \cdot 16 + \frac{13.2^3}{12} + (-3,92)^2 \cdot 26 = 1034,1 \text{ cm}^4$$

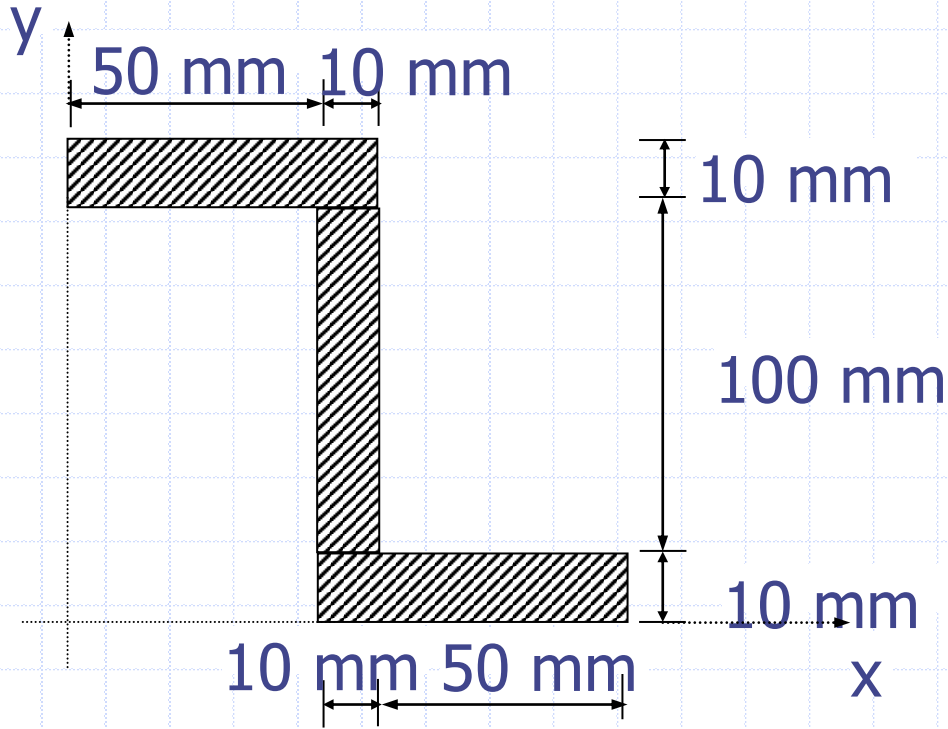
$$I_y = \frac{2.7^3}{12} + (0,15)^2 \cdot 14 + \frac{8.2^3}{12} + (-0,35)^2 \cdot 16 + \frac{2.13^3}{12} + (0,15)^2 \cdot 26 = 431,1 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 14(0,15)(6,08) + 16(-0,35)(1,08) + 26(0,15)(-3,92) = -8,628 \text{ cm}^4$$

c)

$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} = \frac{1034,1 + 431,1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1034,1 - 431,1}{2}\right)^2 + (-8,628)^2}$$

$$I_{\max} = 732,6 \pm 495,57 \quad \Rightarrow \quad \underline{I_{\max} = 1228,17 \text{ cm}^4} \quad ; \quad \underline{I_{\min} = 237,03 \text{ cm}^4}$$



Şekilde verilen profil kesitin ağırlık merkezinden geçen eksen takımına göre atalet momentlerini ve asal atalet momentlerini hesaplayınız. (Ölçüler mm'dir)

a) Şekilde verilen parça 3 kısma ayrılarak çözülür.
Burada; I_{xT} hesaplanması;

$$I_{xT} = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}$$

$$I_{x1} = I_{x3} = \frac{b.h^3}{12} + d^2.A = \frac{60.10^3}{12} + 55^2.600 = 1820000mm^4$$

$$I_{x2} = \frac{b.h^3}{12} + d^2.A = \frac{10.100^3}{12} + 0^2.1000 = 83333333mm^4$$

$$I_{xT} = 447333333mm^4$$

I_{yT} hesaplanması;

$$I_{yT} = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3}$$

$$I_{y1} = I_{y3} = \frac{b.h^3}{12} + d^2.A = \frac{10.60^3}{12} + 25^2.600 = 555000\text{mm}^4$$

$$I_{y2} = \frac{b.h^3}{12} + d^2.A = \frac{100.10^3}{12} + 0^2.1000 = 8333,33\text{mm}^4$$

$$I_{yT} = 1118333,33\text{mm}^4$$

I_{xy} hesaplanması;

$$I_{xy} = x_1 y_1 A_1 + x_2 y_2 A_2 + x_3 y_3 A_3$$

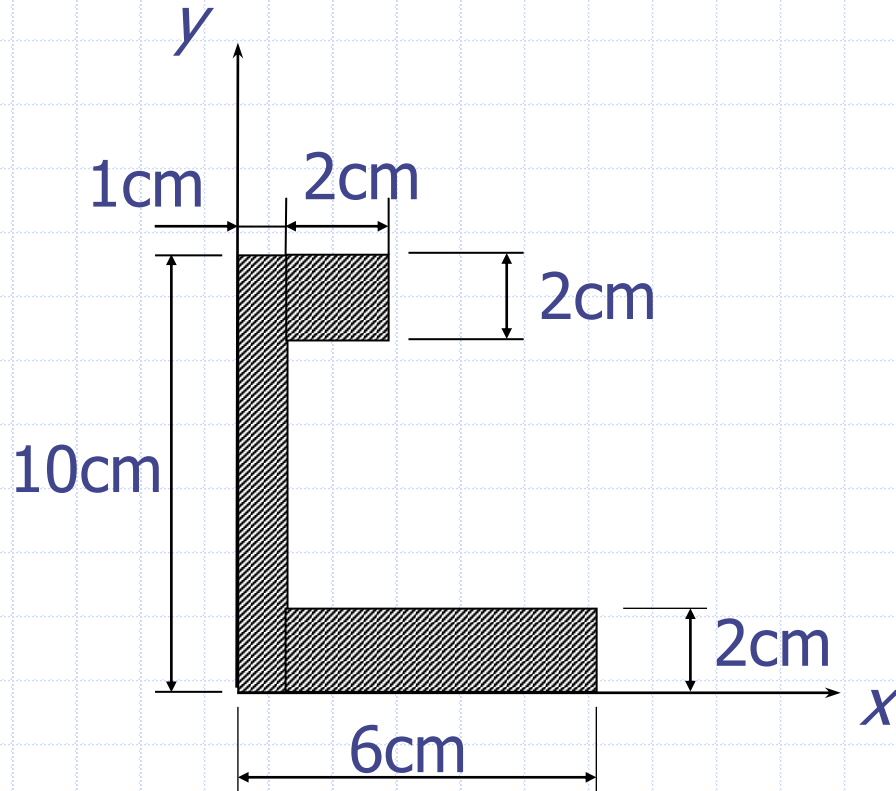
$$I_{xy} = 55.(-25).600 + 0.0.1000 + (-55).25.600$$

$$I_{xy} = -1650000 \text{ mm}^4$$

b)

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad \text{buradan;}$$

$$I_{\min} = 442855,164 \text{ mm}^4 \quad ,, \quad I_{\max} = 514881,496 \text{ mm}^4 \text{ olmaktadır.}$$



Ağırlık merkezinden geçen
eksen takımına göre;
a. Atalet momentlerini
b. Asal atalet momentlerini
hesaplayınız.

	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>Ax</i>	<i>Ay</i>	<i>A</i>
1	2	9	4	8	36
2	0,5	5	10	5	50
3	3,5	1	10	35	10
<i>Toplam</i>			24	48	96

$$\bar{x} = \frac{\Sigma xA}{\Sigma A} = \frac{48}{24} = 2 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma yA}{\Sigma A} = \frac{96}{24} = 4 \text{ cm}$$

$$\text{a)} \quad I_x = \frac{2 \times 2^3}{12} + 4(9-4)^2 + \frac{1 \times 10^3}{12} + 10(5-4)^2 + \frac{5 \times 2^3}{12} + 10(1-4)^2 \Rightarrow \underline{I_x = 288 \text{ cm}^4}$$

$$I_y = \frac{2 \times 2^3}{12} + 4(2-2)^2 + \frac{10 \times 1^3}{12} + 10(0,5-2)^2 + \frac{2 \times 5^3}{12} + 10(3,5-2)^2 \Rightarrow \underline{I_y = 68 \text{ cm}^4}$$

$$I_{xy} = x_1 A_1 y_1 + x_2 A_2 y_2 + x_3 A_3 y_3$$

$$I_{xy} = (2-2) \cdot (9-4) \cdot 4 + (0,5-2) \cdot (5-4) \cdot 10 - (3,5-2) \cdot (1-4) \cdot 10 \Rightarrow \underline{I_{xy} = -60 \text{ cm}^4}$$

$$\text{b)} \quad I_{\max \min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} = 178 \pm 125,3$$

$$\underline{I_{\max} = 303,3 \text{ cm}^4}$$

$$\underline{I_{\min} = 52,7 \text{ cm}^4}$$