NO: .... İSİM SOYİSİM: ....

FIZ 201 FİZİKTE MATEMATİK METOTLAR ARASINAVI

2021 - 2022 Güz, Fizik Bölümü, Pamukkale Üniversitesi, Denizli

Soru : 1 (*25P*) $\vec{A} = 3xz\hat{\imath} + 2xy^2\hat{\jmath} - yz\hat{k}$ vektör alanı ve $\phi = 3x^2 - yz$ skaler alanı için (a) $\vec{\nabla}\phi =?$ (b) $\vec{\nabla}.\vec{A} =?$ (c) $\vec{\nabla} \times \vec{A} =?$

Soru : 2 (*25P*) $e^{4zi} = 1 - i$ bağıntısını sağlayan tüm z değerlerini bulunuz.

Soru : 3 (*25P*) Aşağıdaki integrali hesaplayınız.

$$I = \int_0^\infty x^2 e^{-3x^2} dx$$

Soru : 4 (*25P*) Aşağıdaki matrisin özdeğerlerini ve her özdeğere karşılık gelen bire boylandırılmış (normalize) özvektörlerini bulunuz.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

BAŞARILAR ... **11.11.2021** **Saat: 17.00** **Prof.Dr. Muzaffer ADAK**

C E V A P L A R

Cevap : 1 Gradyan, diverjans ve rotasyonel tanımlarını kullanalım.

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k} \\
&= 6x\hat{\imath} - z\hat{\jmath} - y\hat{k} \\
\vec{\nabla}.\vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
&= 3z + y(4x-1) \\
\vec{\nabla}\times\vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k} \\
&= (-z-0)\hat{\imath} + (3x-0)\hat{\jmath} + (2y^2-0)\hat{k} \\
&= -z\hat{\imath} + 3x\hat{\jmath} + 2y^2\hat{k}
\end{aligned}$$

Cevap : 2 Öncelikle $1-i$ kompleks sayısını $re^{i(\theta+2\pi k)}$, $k = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots$, biçiminde yazalım.

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad , \quad \theta = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = \frac{7\pi}{4} \quad [4.\ \text{bölgede}]$$

O halde

$$e^{4zi} = 2^{1/2} e^{i\left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi k\right)} \qquad \Rightarrow \qquad 4zi = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi k\right)$$

yazabiliriz. Son olarak z yi çekersek sonuç şu olur.

$$z = \left(k + \frac{7}{8}\right)\frac{\pi}{2} - \frac{i}{8}\ln 2 \quad , \quad k = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots$$

Cevap : 3 Önce $\alpha > 0$ sabiti cinsinden bilindik bir integral yazalım.

$$I_\alpha = \int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx$$

O halde, $I_3 = I$ olur. Yani, önce I_α integralini hesaplayacağız. En son, $\alpha = 3$ yerleştirerek cevabı elde edeceğiz.

$$I_\alpha = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{16\alpha^3}} = \frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Burada $\alpha = 3$ yerleştirerek cevaba ulaşırız.

$$\int_0^\infty x^2 e^{-3x^2} dx = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

Cevap : 4 Önce özdeğer denklemini hatırlayalım: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ veya $(A - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = 0$ olarak ifade edelim. Bunun matris biçimi şöyle olur.

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

a ve b bileşenlerinin her ikisinin de sıfır olmaması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \mp 1$$

Önce $\lambda_1 = -1$ özdeğerine karşı gelen $\vec{x}_1$ özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b_1 = -a_1$$

$$\text{Normalizasyon} \quad |a_1|^2 + |b_1|^2 = 1. \quad \text{Birlikte} \quad \vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Şimdi de $\lambda_2 = 1$ özdeğerine karşı gelen $\vec{x}_2$ özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b_2 = a_2$$

$$\text{Normalizasyon} \quad |a_2|^2 + |b_2|^2 = 1. \quad \text{Birlikte} \quad \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$