NO: ....   İSİM SOYİSİM: ....

FIZ 201 FİZİKTE MATEMATİK METOTLAR BÜTÜNLEME SINAVI
2023 - 2024 Güz, Fizik Bölümü, Pamukkale Üniversitesi, Denizli

Soru : 1 (*25P*) Aşağıda verilen A matrisini düşünelim. (a) $H = \frac{1}{2}(A + A^\dagger)$ hermitsel matrisini oluşturunuz. (b) H matrisinin özdeğerlerinin -1 ve 3 olduğunu gösteriniz. (c) Her özdeğere karşılık gelen bire boylandırılmış (normalize) özvektörleri bulunuz. (d) Bu vektörlerin dik olduğunu gösteriniz.

$$A = \begin{pmatrix} 2-i & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Soru : 2 (*25P*) $y' = dy/dx$ göstermek üzere aşağıdaki diferansiyel denklemin homojen çözümünü, özel çözümünü ve genel çözümünü bulunuz.

$$2y'' - 4y' + 10y = 10x^2$$

Soru : 3 (*25P*) Aşağıdaki Laguerre denklemi için $z = 0$ etrafındaki Frobenious çözümünü ele alınız.

$$z\frac{d^2y}{dz^2} + (1-z)\frac{dy}{dz} + 2y = 0$$

(a) $z = 0$ noktasının düzgün tekil bir nokta olduğunu kontrol ediniz. (b) σ serbest indis olmak üzere $y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^{m+\sigma}$ seri çözümünü denkleme yerleştiriniz ve sonucu düzenleyiniz. (c) Çakışık indis köklerini bulunuz. (d) İndis kökünü yerleştirerek katsayılar için tekrarlama bağıntısını yazınız. Buradan çözüm olan ikinci dereceden Laguerre polinomunu $L_2(0) = 2$ sağlayacak şekilde elde ediniz.

Soru : 4 (*25P*) $f(x) = x$ fonksiyonunu $-L \leq x \leq +L$ aralığında $T = 2L$ periyotlu trigonometrik fonksiyonlar cinsinden Fourier serisine açınız.

BAŞARILAR ...   01.02.2024   Saat: 11.00 (90 dk)   Prof.Dr. Muzaffer ADAK

%%%%%%%%%%%%% Bazı faydalı olabilecek formüller %%%%%%%%%%%%%

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \ , \quad \frac{2\pi}{\theta} = \frac{T}{x}$$

C E V A P L A R

Cevap : 1 (a) $A^\dagger = (A^*)^T$ matrisini oluşturup iki matrisi toplayacağız.

$$H = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2-i & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2+i & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Özdeğer denklemini hatırlayalım: $H\vec{x} = \lambda\vec{x}$ veya $(H - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = 0$ olarak ifade edelim. Bunun matris biçimi şöyle olur.

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

a ve b bileşenlerinin her ikisinin de sıfır olmaması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = -1 \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = 3$$

(c) Önce $\lambda_1 = -1$ özdeğerine karşı gelen $\vec{x}_1$ özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b_1 = -\sqrt{3}a_1$$

$$\text{Normalizasyon} \quad |a_1|^2 + |b_1|^2 = 1. \quad \text{Birlikte} \quad \vec{x}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Şimdi de $\lambda_2 = 3$ özdeğerine karşı gelen $\vec{x}_2$ özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_2 = \sqrt{3}b_2$$

$$\text{Normalizasyon} \quad |a_2|^2 + |b_2|^2 = 1. \quad \text{Birlikte} \quad \vec{x}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) İki vektörün skaler çarpımı sıfır ise diktirler.

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 0$$

Cevap : 2 Lineer diferansiyel denklem olduğu için homojen çözümü ve özel çözümü ayrı ayrı hesap edeceğiz ve bunları toplayarak genel çözümü yazacağız. Diferansiyel denklem sabit katsayılı olduğu için homojen çözüm olarak $y = e^\alpha x$ fonksiyonunu öneririz. Böylece

$$2\alpha^2 - 4\alpha + 10 = 0$$

karakteristik denklemini elde ederiz. Kökleri $\alpha_1 = 1 + 2i$ ve $\alpha_2 = 1 - 2i$ hesap edilir. Böylece homojen çözüm

$$y_h(x) = c_1 e^{(1+2i)x} + c_2 e^{(1-2i)x} = e^x[d_1\cos(2x) + d_2\sin(2x)]$$

olarak yazılır. Burada $c_1,\ c_2$ ikilisi ve $d_1,\ d_2$ ikilisi integral sabitleridir. Özel çözümü tahmin yöntemiyle kolayca hesaplayabiliriz, çünkü soruda verilen diferansiyel denklemin sağ tarafı ikinci derece bir polinom. O halde, $y_o(x) = A + Bx + Cx^2$ önerelim. Burada A, B, C bilinmeyen sabitler. Bunu sorudaki diferansiyel denkleme yerleştirdiğimizde $A = -2/25$, $B = 4/5$, $C = 1$ çıkar. Özel çözüm şudur.

$$y_o(x) = -\frac{2}{25} + \frac{4}{5}x + x^2$$

Son olarak genel çözümü kolayca yazarız.

$$y(x) = y_h(x) + y_o(x) = e^x[d_1\cos(2x) + d_2\sin(2x)] - \frac{2}{25} + \frac{4}{5}x + x^2$$

Cevap : 3 (a) $z = 0$'da hem $f_1 = \frac{1-z}{z} \neq$ sonlu hem de $f_2 = \frac{2}{z} \neq$ sonlu. Fakat, $z = 0$'da hem $zf_1 = z\frac{1-z}{z} =$ sonlu hem de $z^2 f_2 = z^2\frac{2}{z} =$ sonlu olduğu için $z = 0$ düzgün tekil noktadır.
(b) $z = 0$ düzgün tekil nokta olduğu için $\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^{m+\sigma}$ biçiminde bir çözüm ararız. Bunun türevlerini alıp denkleme yerleştiriyoruz.

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \underbrace{[(m+\sigma)(m+\sigma-1) + (m+\sigma)]}_{=(m+\sigma)^2} z^{m+\sigma-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m\,[2-(m+\sigma)]\,z^{m+\sigma} = 0$$

İlk toplamda $m = 0$ açıkça koyalım, toplamı $m = 1$'den devam ettirelim ve sonra da $m \to m+1$ yazalım. Sonucu düzenlersek

$$c_0\sigma^2 z^{\sigma-1} + \sum_{m=0}^{\infty}\left[(m+\sigma+1)^2 c_{m+1} + (2-m-\sigma)c_m\right] z^{m+\sigma} = 0$$

buluruz.
(c) Buradan indis denklemi $\sigma^2 = 0$ olur ki iki indis kökü çakışık çıkar, $\sigma = 0$.
(d) Bu durumda tekrarlama bağıntısı şöyle olur.

$$c_{m+1} = \frac{(m-2)c_m}{(m+1)^2} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -2c_0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{c_1}{4} = \frac{c_0}{2} \quad \Rightarrow \quad c_3 = c_4 = \cdots = 0$$

O halde, birinci çözümü yazabiliriz.

$$L_2(x) = c_0\left(1 - 2x + \frac{1}{2}x^2\right)$$

Burada $L_2(0) = 2$ koşulunu kullanırsak $c_0 = 2$ buluruz. Böylece, istenen çözüm elde edilir.

$$L_2(x) = 2 - 4x + x^2$$

Cevap : 4 Bu notasyonda ve periyotta Fourier serisi şöyledir.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

Burada $f(x) = x$ için $-L \leq x \leq +L$ aralığında a_0, a_n ve b_n hesap edelim.

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} x dx = 0 \quad \text{(Tek fonksiyon simetrik aralık!)}$$

a_n için hesap yapalım.

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \text{(Tek fonksiyon simetrik aralık!)}$$

b_n için hesap yapalım.

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Çift fonksiyon simetrik aralık özelliğini kullandık. Burada kısmi integral alma işlemini yapalım. $u = x \to du = dx$ ve $dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \to v = -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Böylece,

$$b_n = -\frac{2L}{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{(n+1)}$$

Sonuçta,

$$x = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$