NO: .... İSİM SOYİSİM: ....

FIZ 201 FİZİKTE MATEMATİK METOTLAR ARASINAVI

2024 - 2025 Güz, Fizik Bölümü, Pamukkale Üniversitesi, Denizli

Soru : 1 (*20P*) $\mathbb{R}^3$ uzayında kartezyen koordinatlarda $\vec{A} = -3\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 3\hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ ve $\vec{C} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ vektörleri biliniyor. Buna göre, **a.** $\vec{A} + 2\vec{B} - \vec{C}$, **b.** $\left|\vec{A}\right|$, $\left|\vec{B}\right|$, $\left|\vec{C}\right|$, **c.** $\vec{A} \cdot \vec{B}$, **d.** $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki açıyı, **e.** $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right|$ ve **f.** $\vec{A} \times \vec{B}$ yönünü, hesap ediniz.

Soru : 2 (*20P*) $\vec{A}(x, y, z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ vektör alanı ve $\phi(x, y, z) = x^2y + yz^2$ skaler alanı için **a.** $\vec{\nabla}\phi =?$ **b.** $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} =?$ **c.** $\vec{\nabla} \times \vec{A} =?$

Soru : 3 (*20P*) x ve y reel kartezyen değişkenler olmak üzere $z = x + iy$ kompleks değişkenine bağlı $f(z)$ kompleks fonksiyonun sanal kısmı biliniyor; $e^y\,[y\cos(x) - x\sin(x)]$. **a.** $f(z)$'nin analitik olabileceğini gösteriniz. **b.** $f(z)$'yi belirleyiniz.

Soru : 4 (*20P*) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$\textbf{a}.\ \int_0^{\infty} e^{-2x}\sin(3x)dx =? \qquad \text{ve} \qquad \textbf{b}.\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2-4x}dx =?$$

Soru : 5 (*20P*) Aşağıdaki matris verilmiştir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

a. A'nın tersini hesap ediniz.

b. $A^\dagger$ hesap ediniz? A ne tür bir matristir?

c. A'nın λ_1 ve λ_2 özdeğerlerini ve bunlara karşılık gelen $\vec{x}_1$ ve $\vec{x}_2$ normalize özvektörlerini bulunuz.

d. Övektörler yardımıyla A matrisini köşegen yapacak U matrisini oluşturunuz ve $U^\dagger U = \mathbb{I}$ olduğunu gösteriniz.

e. $A' = U^\dagger A U$ matrisini hesap ediniz.

f. $\vec{x}_1' = U^\dagger\vec{x}_1$ ve $\vec{x}_2' = U^\dagger\vec{x}_2$ vektörlerini hesap ediniz.

BAŞARILAR ... 22.11.2024 Saat: 11.00 Prof.Dr. Muzaffer ADAK

C E V A P L A R

Cevap : 1 a. $\vec{A}+2\vec{B}-\vec{C}=\hat{\imath}+5\hat{\jmath}-11\hat{k}$

b. $\left|\vec{A}\right|=\sqrt{(-3)^2+(3)^2+(-3)^2}=\sqrt{27}$

$\left|\vec{B}\right|=\sqrt{(3)^2+(2)^2+(-2)^2}=\sqrt{17}$

$\left|\vec{C}\right|=\sqrt{(2)^2+(2)^2+(4)^2}=\sqrt{24}$

c. $\vec{A}\cdot\vec{B}=(-3)(3)+(3)(2)+(-3)(-2)=3$

d. $\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta$ olduğundan $\theta=\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{27}\sqrt{17}}\right)=81,9^o$

e. $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=AB\sin\theta=\sqrt{27}\sqrt{17}\sin(81,9^o)=21,2$

f. $\vec{A}\times\vec{B}=\left(-3\hat{\imath}+3\hat{\jmath}-3\hat{k}\right)\times\left(3\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-2\hat{k}\right)=-15\hat{\jmath}-15\hat{k}$ yz-düzleminde.

Cevap : 2 Gradyan, diverjans ve rotasyonel tanımlarını kullanalım.

$$\vec{\nabla}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{\imath}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{\jmath}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}=2xy\hat{\imath}+(x^2+z^2)\hat{\jmath}+2yz\hat{k}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=1+1+1=3$$
$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{A}&=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}\\&=(0-0)\hat{\imath}+(0-0)\hat{\jmath}+(0-0)\hat{k}=0\end{aligned}$$

Cevap : 3 a. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ fonksiyonunun analitik olabilmesi için hem u hem de v iki-boyutlu Laplace denklemini sağlamalıdır. Kontrol edelim.

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^y\left[-(y+1)\sin(x)-x\cos(x)\right]\quad\rightarrow\quad\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=e^y\left[-(y+2)\cos(x)+x\sin(x)\right]$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^y\left[(y+1)\cos(x)-x\sin(x)\right]\quad\rightarrow\quad\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=e^y\left[(y+2)\cos(x)-x\sin(x)\right]$$

Evet! Gerçekten $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ sağlanıyor. O halde, analitik $f(z)$ vardır.

b. Şimdi, reel kısımı $u(x,y)$ belirlemek için Cauchy-Riemann şartlarını kullanalım.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\quad\rightarrow\quad u(x,y)=-\int\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\partial y$$

Böylece, kısmi integral yardımıyla $\int ye^y dy=(y-1)e^y$ sonucunu elderiz. Sonuçta,

$$u(x,y)=-\int e^y\left[-(y+1)\sin(x)-x\cos(x)\right]\partial y=e^y\left[y\sin(x)+x\cos(x)\right]+C(x)$$

Burada y'ye göre kısmi türevden integrale geçtiğimiz için integral sabiti x'e bağlı olabilir, $C=C(x)$. Şimdi de C'nin x'e bağımlılığını belirlemek için Cauchy-Riemann şartlarından diğerini kullanalım.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad\rightarrow\quad\frac{dC(x)}{dx}=0$$

Yani $C(x)$ niceliği x'e bağlı değil, gerçekten bir sabitmiş, c_0! O halde,

$$\begin{aligned}
f(z) = u + iv = e^y\left[y\sin(x) + x\cos(x)\right] + c_0 + ie^y\left[y\cos(x) - x\sin(x)\right] \\
&= e^y\left[y\sin(x) + iy\cos(x) + x\cos(x) - ix\sin(x)\right] + c_0 \\
&= e^y\left[iy\left(\cos(x) - i\sin(x)\right) + x\left(\cos(x) - i\sin(x)\right)\right] + c_0 \\
&= e^y\left[iye^{-ix} + xe^{-ix}\right] + c_0 = e^{-i(x+iy)}(x+iy) + c_0 \\
&= ze^{-iz} + c_0
\end{aligned}$$

Cevap : 4 a. Burada $\sin(3x) = \mathrm{Im}e^{3ix}$ yazarak başlayalım.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-2x}\sin(3x)dx = \mathrm{Im}\int_0^{\infty} e^{-2x}e^{3ix}dx = \mathrm{Im}\int_0^{\infty} e^{-x(2-3i)}dx \\
&= \mathrm{Im}\left[-\frac{1}{2-3i}e^{-(2-3i)x}\right]_0^{\infty} = \mathrm{Im}\frac{1}{2-3i} = \mathrm{Im}\frac{2+3i}{13} = \frac{3}{13}
\end{aligned}$$

b. Burada $-2x^2 - 4x = -2\left(x^2 + 2x\right) = -2\left[(x+1)^2 - 1\right] = -2(x+1)^2 + 2$ kullanalım.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2-4x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(x+1)^2+2}dx = e^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(x+1)^2}dx$$

Değişken değiştirelim, $x + 1 = y$ ve böylece $dx = dy$. Sonuçta,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2-4x}dx = e^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2y^2}dy = e^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Cevap : 5 a. Önce matrisin determinantını, $\det A = 0 - 1 = -1$, sonra da minörlerini (kofaktörlerini) hesap edelim.

$$\min A_{11} = 0, \quad \min A_{12} = -i, \quad \min A_{21} = i, \quad \min A_{22} = 1$$

Artık ters matrisi oluşturabiliriz.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \min A_{11} & -\min A_{21} \\ -\min A_{12} & \min A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$$

b. Bir matrisin hermitsel eşleniği demek matrisin transpozunun kompleks eşleniğini hesaplamak demektir.

$$A^{\dagger} = \left(A^T\right)^* = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = A$$

Yani, A hermitsel bir matristir.

c. Özdeğer denklemini hatırlayalım: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ veya $(A - \lambda\mathbb{I})\vec{x} = 0$. Bunun matris biçimi şöyle olur.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

a ve b bileşenlerinin her ikisinin de sıfır olmaması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Önce $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ özdeğerine karşı gelen $\vec{x}_1$ özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & i \\ -i & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = ib_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Normalizasyon} \quad |a_1|^2 + |b_1|^2 = 1. \quad \text{Birlikte} \quad \vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} \frac{i(1+\sqrt{5})}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Şimdi de $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ özdeğerine karşı gelen $\vec{x}_2$ özvektörünü bulalım.

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & i \\ -i & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_2 = ib_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Normalizasyon} \quad |a_2|^2 + |b_2|^2 = 1. \quad \text{Birlikte} \quad \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} \frac{i(1-\sqrt{5})}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

d. $\vec{x}_1$ birinci sütun, $\vec{x}_2$ ikinci sütun olacak biçimde U matrisini oluşturalım ve hermitsel eşleniğini hesap edelim.

$$U = \begin{pmatrix} \frac{i(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{4+\sqrt{5}}} & \frac{i(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{4-\sqrt{5}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad U^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{-i(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{4+\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{5}}} \\ \frac{-i(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{4-\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{5}}} \end{pmatrix}$$

Bu iki matrisi çarparsak $U^\dagger U = \mathbb{I}$ olur. Yani, U üniter matristir.

e. A matrisi yardımıyla elde ettiğimiz bu U matrisi $U^\dagger A U$ bağıntısıyla A matrisini köeşegen yapar. Köşegende A'nın özdeğerleri olur.

$$A' = U^\dagger A U = \begin{pmatrix} \frac{-i(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{4+\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{5}}} \\ \frac{-i(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{4-\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{4+\sqrt{5}}} & \frac{i(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{4-\sqrt{5}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{5}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

f. A'yı köşegen yapan U matrisleri A'nın özvektörlerini de doğal vektörler haline getirir.

$$\vec{x}_1' = U^\dagger \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-i(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{4+\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{5}}} \\ \frac{-i(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{4-\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} \frac{i(1+\sqrt{5})}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2' = U^\dagger \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-i(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{4+\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{5}}} \\ \frac{-i(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{4-\sqrt{5}}} & \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} \frac{i(1-\sqrt{5})}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$