

NO: İSİM SOYİSİM:

FIZ 201 FİZİKTE MATEMATİK METOTLAR FİNAL SINAVI
2024 - 2025 Güz, Fizik Bölümü, Pamukkale Üniversitesi, Denizli

Soru 1: (25P) m, b, g pozitif reel sabitler olmak üzere aşağıdaki başlangıç değer problemini çözünüz.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} - mg = 0, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0$$

Soru 2: (25P) Aşağıdaki diferansiyel denklemin iki çözümünü $x = 0$ civarında seri olarak en az üç terim tutarak yazınız.

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

Soru 3: (25P) $f(x) = x^2$ fonksiyonunu $-L \leq x \leq +L$ aralığında $T = 2L$ periyotlu trigonometrik fonksiyonlar cinsinden Fourier serisine açınız.

Soru 4: (25P) $0 \leq \theta \leq \pi$ ve $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ aralığında tanımlı aşağıdaki fonksiyonu küresel harmonikler cinsinden yazınız.

$$f(\theta, \varphi) = \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \varphi + 1$$

BAŞARILAR ... 10.01.2025 Saat: 11.00 (90 dk) Prof. Dr. Muzaffer ADAK

%%%%%% Bazı faydalı olabilecek formüller %%%%%%%%%

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

$$\frac{2\pi}{\theta} = \frac{T}{x},$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}$$

$$Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi},$$

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}},$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{1}{3!} \alpha^3 + \frac{1}{5!} \alpha^5 - + \dots,$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2!} \alpha^2 + \frac{1}{4!} \alpha^4 - + \dots$$

C E V A P L A R

Cevap 1: $dx/dt = v$ atamasıyla diferansiyel denklem şu hale gelir.

$$m \frac{dv}{dt} + bv - mg = 0$$

Bu diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılabilir.

$$\frac{mdv}{mg - bv} = dt \quad \implies \quad m \int \frac{-bdv}{mg - bv} = -b \int dt$$

Her iki integral de kolayca çözülebilir.

$$\ln(mg - bv) = \frac{c_1 - bt}{m} \quad \implies \quad v(t) = \frac{mg}{b} - e^{\frac{c_1 - bt}{m}}$$

Başlangıç şartlarından birini uygulayarak integral sabiti c_1 'i belirleyelim.

$$v(0) = 0 \quad \implies \quad e^{c_1/m} = \frac{mg}{b} \quad \implies \quad v(t) = \frac{mg}{b} (1 - e^{-bt/m})$$

Şimdi de $dx/dt = v$ kullanarak $x(t)$ bağımlı değişkenini hesaplayalım.

$$x = \int v dt = \frac{mg}{b} \int (1 - e^{-bt/m}) dt = \frac{mg}{b} t + \frac{m^2 g}{b^2} e^{-bt/m} + c_2$$

Diğer başlangıç şartını kullanarak ikinci integral sabiti c_2 'yi belirleyelim.

$$x(0) = 0 \quad \implies \quad 0 + \frac{m^2 g}{b^2} + c_2 = 0 \quad \implies \quad c_2 = -\frac{m^2 g}{b^2}$$

Sonuçta başlangıç değer probleminin tam çözümü şöyle olur.

$$x(t) = \frac{mg}{b} t - \frac{m^2 g}{b^2} (1 - e^{-bt/m})$$

Cevap 2: $x = 0$ noktası düzgün tekil nokta olduğu için $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+m}$ önerelim. Bunu diferansiyel denkleme yerleştirelim.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4(n+m)(n+m-1)c_n x^{n+m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+m)c_n x^{n+m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+m} = 0$$

Ortak paranteze alalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\{(n+m)[2(n+m)-1]\}c_n x^{n+m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+m} = 0$$

Birinci toplamda $n \rightarrow n+1$ yazalım. Bu durumda yeni toplam $n = -1$ den başlar.

$$\sum_{n=-1}^{\infty} 2\{(n+m+1)[2(n+m+1)-1]\}c_{n+1} x^{n+m} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+m} = 0$$

Birinci toplamda $n = -1$ yazıp, toplamı $n = 0$ dan başlatalım.

$$2C_0m(2m-1)x^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+m+1)(2n+2m+1)c_{n+1} + c_n]x^{n+m} = 0$$

Buradan indis kökleri ve tekrarlar bağıntısı şöyle olur.

$$m_1 = 0, \quad m_2 = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad c_{n+1} = \frac{-c_n}{2(n+m+1)(2n+2m+1)}$$

Her bir indis kökü bir çözüm verir. Buna göre birinci çözüm için tekrarlar bağıntısında $m = 0$ yerleştiririz:

$$c_{n+1} = \frac{-c_n}{(2n+1)(2n+2)}$$

O halde, $c_1 = -c_0/2!$, $c_2 = c_0/4!$, \dots olur. Sonuçta,

$$y_1(x) = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 \left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - + \dots \right) = c_0 \cos \sqrt{x}$$

İkinci çözüm için tekrarlar bağıntısında $m = 1/2$ yerleştiririz:

$$c_{n+1} = \frac{-c_n}{(2n+2)(2n+3)}$$

O halde, $c_1 = -c_0/3!$, $c_2 = C_0/5!$, \dots olur ve sonuçta,

$$y_2(x) = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 \left(x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3!} + \frac{x^{5/2}}{5!} - + \dots \right) = c_0 \sin \sqrt{x}$$

Cevap 3: Bu notasyonda ve periyotta Fourier serisi şöyledir.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right]$$

Burada $f(x) = x^2$ için $-L \leq x \leq +L$ aralığında a_0 , a_n ve b_n hesap edelim.

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} x^2 dx = \frac{1}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{L^2}{3}$$

a_n için hesap yapalım.

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} x^2 \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

Burada $u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$ ve $dv = \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \rightarrow v = \frac{L}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$.

$$a_n = \frac{-4}{n\pi} \int_0^L x \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

Tekrar $u = x \rightarrow du = dx$ ve $dv = \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \rightarrow v = \frac{-L}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$.

$$a_n = \left(\frac{2L}{n\pi} \right)^2 \cos(n\pi) = \left(\frac{2L}{n\pi} \right)^2 (-1)^n$$

Simetrik aralık ve çift fonksiyon olduğu için $b_n = 0$ olur.

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} x^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0$$

Sonuçta,

$$x^2 = \frac{L^2}{3} + \left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Cevap 4: Verilenlere göre şunu yazabiliriz.

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3 \cos^2 \theta - 1) \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} Y_2^0 + \frac{1}{3}$$

Ayrıca,

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{ve} \quad Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta (\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

eşitliklerini taraf tarafa toplayıp sonucu düzenlersek şunu elde ederiz.

$$\sin \theta \cos \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_1^{-1} - Y_1^1)$$

Bunları soruda verilen fonksiyonda yerlerine yazalım.

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} Y_2^0 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_1^{-1} - Y_1^1) + \frac{4}{3}$$

Son olarak, son terimi Y_0^0 cinsinden yazalım.

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \Rightarrow 1 = \sqrt{4\pi} Y_0^0$$

Sonuç şöyle olur.

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} Y_2^0 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_1^{-1} - Y_1^1) + \frac{4\sqrt{4\pi}}{3} Y_0^0$$