

Mukavemet — Örnek Problemler

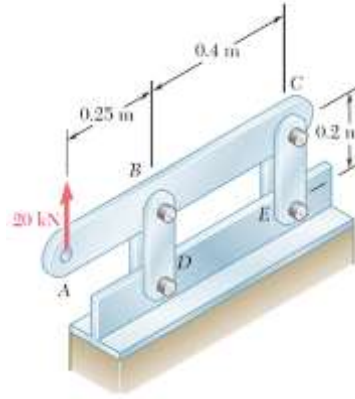
Adım adım açıklamalı çözümler

Problem 1

Soru

Dört dikey bağlantı çubuğunun her birinin kesiti 8×36 mm'lik düzgün dikdörtgendir ve dört pim her birinin çapı 16 mm'dir.

- B ve D noktalarını birleştiren bağlantı çubuklarındaki,
- C ve E noktalarını birleştiren bağlantı çubuklarındaki ortalama normal gerilmenin maksimum değerini belirleyiniz.



Verilenler ve istenenler

- Çubuk kesiti: $b \times t = 36 \text{ mm} \times 8 \text{ mm}$
- Pim çapı: $d = 16 \text{ mm}$
- A noktasındaki yük: $P = 20 \text{ kN}$ (yukarı)
- Mesafeler: $AB = 0,25 \text{ m}$, $BC = 0,40 \text{ m} \rightarrow AC = 0,65 \text{ m}$
- Şekilde her bağlantı noktasında (B–D ve C–E) kolun **iki yanında birer çubuk** vardır; yani her bağlantıda 2 paralel çubuk bulunur (toplam 4 çubuk).
- İstenen:** σ_{BD} ve σ_{CE} ortalama normal gerilmelerinin maksimum değerleri.

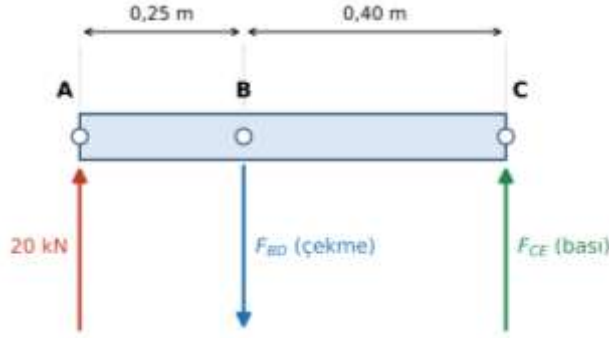
Adım 1 — Çubukların davranışını tanıma

BD ve CE çubukları yalnızca iki ucundan pimle bağlıdır ve üzerlerine başka yük gelmez. Bu tür elemanlara **iki kuvvet elemanı** denir. Kuvvet, iki pimi birleştiren doğru boyunca, yani çubuk eksenel boyunca etkir. Dolayısıyla çubuklarda yalnızca eksenel (normal) kuvvet vardır.

Adım 2 — ABC kolunun serbest cisim diyagramını çizimi

ABC kolunu ayırıp üzerine etkiyen kuvvetleri gösterelim. Yönleri başlangıçta tahmin ediyoruz. Hesap sonucu pozitif çıkarsa tahmin doğrudur.

- A'da: 20 kN yukarı (dış yük)
- B'de: F_{BD} , aşağı (BD çubuğu çekmede kabul edilir, D aşağıda olduğu için kolu aşağı çeker)
- C'de: F_{CE} , yukarı (CE çubuğu basıda kabul edilir, kolu yukarı iter)



Şekil 1.1 — ABC kolunun serbest cisim diyagramı

Adım 3 — Denge denklemleriyle çubuk kuvvetlerini bulunması

Bilinmeyen iki kuvvet var. Her birini tek denklemlerle bulmak için momenti, diğer bilinmeyeninin etki ettiği noktaya göre alırsak (saat yönünün tersi + kabul edelim).

C noktasına göre moment (F_{CE} denklemden düşer):

$$\Sigma M_C = 0: \quad - (20 \text{ kN})(0,65 \text{ m}) + F_{BD}(0,40 \text{ m}) = 0$$

$$F_{BD} = \frac{(20)(0,65)}{0,40} = 32,5 \text{ kN} \quad (+ \rightarrow \text{çekme, tahmin doğru})$$

B noktasına göre moment (F_{BD} denklemden düşer):

$$\Sigma M_B = 0: \quad - (20 \text{ kN})(0,25 \text{ m}) + F_{CE}(0,40 \text{ m}) = 0$$

$$F_{CE} = \frac{(20)(0,25)}{0,40} = 12,5 \text{ kN} \quad (+ \rightarrow \text{bası, tahmin doğru})$$

Kontrol (düşey kuvvet dengesi):

$$\Sigma F_y = 20 - 32,5 + 12,5 = 0 \quad \checkmark$$

Adım 4 — Kuvveti tek bir çubuğa indirgeme

Her bağlantı noktasında yükü iki paralel çubuk paylaşır, bu yüzden bir çubuğun taşıdığı kuvvet toplamın yarısıdır:

$$F_{BD, \text{tek}} = \frac{32,5}{2} = 16,25 \text{ kN} \quad (\text{çekme})$$

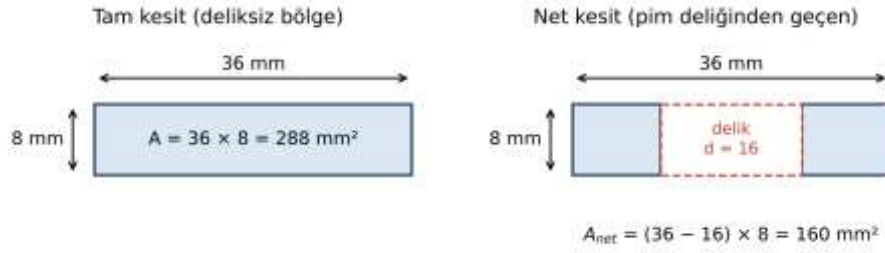
$$F_{CE, \text{tek}} = \frac{12,5}{2} = 6,25 \text{ kN} \quad (\text{bası})$$

Adım 5 — Gerilme hesabında kullanılacak alanı seçelim

Ortalama normal gerilme $\sigma = F / A$ 'dır. Maksimum gerilme, **alanın en küçük olduğu kesitte** oluşur; bu yüzden hangi kesitin kritik olduğuna karar vermek gerekir:

- **Çekme (BD):** Çubuk pim deliğinden geçen kesitte en zayıftır, çünkü orada deliğin kapladığı malzeme yoktur. Bu nedenle **net alan** kullanılır.

- **Bası (CE):** Deliğin içi pimle doludur ve bası kuvveti pim üzerinden aktarılır; delik kesiti zayıflatmaz. Bu nedenle **tam (brüt) alan** kullanılır.



Şekil 1.2 — Tam kesit ve pim deliğinden geçen net kesit

$$A = b \cdot t = (36)(8) = 288 \text{ mm}^2 = 288 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$A_{\text{net}} = (b - d) \cdot t = (36 - 16)(8) = 160 \text{ mm}^2 = 160 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

Adım 6 — (a) BD çubuğundaki maksimum ortalama normal gerilme

$$\sigma_{\text{BD}} = \frac{F_{\text{BD, tek}}}{A_{\text{net}}} = \frac{16,25 \times 10^3 \text{ N}}{160 \times 10^{-6} \text{ m}^2}$$

$$\sigma_{\text{BD}} = 101,6 \times 10^6 \text{ Pa} = 101,6 \text{ MPa} \quad (\text{çekme})$$

Adım 7 — (b) CE çubuğundaki maksimum ortalama normal gerilme

$$\sigma_{\text{CE}} = -\frac{F_{\text{CE, tek}}}{A} = -\frac{6,25 \times 10^3 \text{ N}}{288 \times 10^{-6} \text{ m}^2}$$

$$\sigma_{\text{CE}} = -21,7 \times 10^6 \text{ Pa} = -21,7 \text{ MPa} \quad (\text{bası})$$

Eksi işareti bası gerilmesini gösterir (işaret kabulü: çekme +, bası -).

SONUÇ

(a) $\sigma_{\text{BD}} = +101,6 \text{ MPa}$ (çekme, net kesitte)

(b) $\sigma_{\text{CE}} = -21,7 \text{ MPa}$ (bası, tam kesitte)

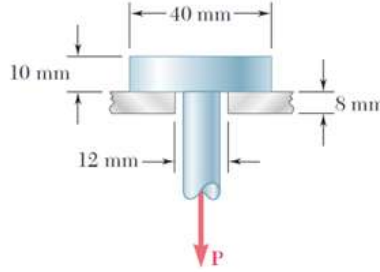
Yorum

BD çubukları hem daha büyük kuvvet taşır hem de çekmede oldukları için pim deliği alanı azaltır; bu yüzden sistemin kritik elemanı BD çubuklarıdır. Basıdaki CE çubuklarında gerilme yaklaşık 5 kat daha küçüktür.

Problem 2

Soru

İçine 12 mm çaplı delik açılmış bir alüminyum plaka tarafından taşınan bir çelik çubuğa P yükü uygulanmaktadır. Kayma gerilmesinin çelik çubukta 180 MPa'yı, alüminyum plakada 70 MPa'yı aşmaması gerektiğine göre, çubuğa uygulanabilecek en büyük P yükünü belirleyiniz.



Verilenler ve istenenler

- Çubuk gövde çapı: $d = 12 \text{ mm}$
- Çubuk başı (başlık) çapı: $D = 40 \text{ mm}$, başlık kalınlığı: $t_b = 10 \text{ mm}$
- Alüminyum plaka kalınlığı: $t_p = 8 \text{ mm}$
- İzin verilen kayma gerilmeleri: $\tau_{\text{çelik}} = 180 \text{ MPa}$, $\tau_{\text{Al}} = 70 \text{ MPa}$
- **İstenen:** Her iki şartı da sağlayan en büyük P yükü.

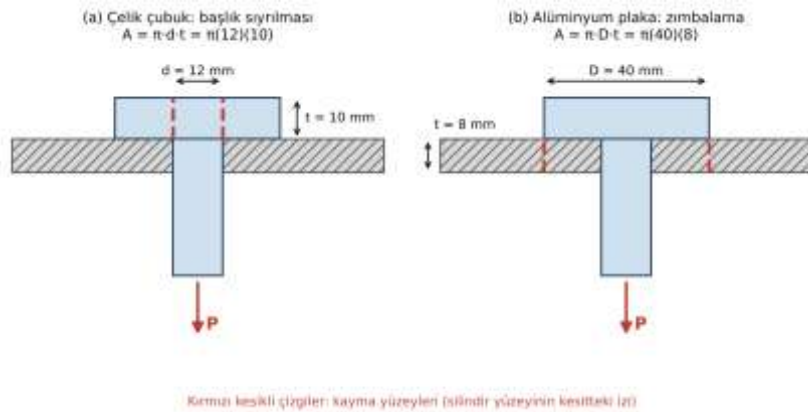
Adım 1 — Yükün nasıl aktarıldığını anlayalım

P yükü çubuğu aşağı çeker. Çubuğun başlığı plakanın üstüne oturduğu için yük, başlıktan plakaya aktarılır. Bu aktarım sırasında iki farklı şekil değiştirme biçimi düşünülebilir:

- **Çelik çubukta:** Çubuğun gövdesi, başlığı delip aşağı doğru sıyrılabilir. Başlık, gövde çevresinde (çap $d = 12 \text{ mm}$) ve başlık kalınlığı boyunca (10 mm) kesilir.
- **Alüminyum plakada:** Başlık, plakayı zımba gibi delebilir. Plaka, başlığın çevresinde (çap $D = 40 \text{ mm}$) ve plaka kalınlığı boyunca (8 mm) kesilir.

Her iki durumda da kayma yüzeyi bir **silindir yüzeyidir**. Silindirin yanal alanı çevre $\times$ yüksekliktir:

$$A = \pi \cdot \text{çap} \cdot \text{kalınlık}.$$



Şekil 2.1 — Çelik çubuk ve alüminyum plakadaki kayma yüzeyleri

Adım 2 — Ortalama kayma gerilmesi bağıntısı

Kayma yüzeyi boyunca kayma kuvveti P 'ye eşittir. Ortalama kayma gerilmesi:

$$\tau = \frac{P}{A} \quad \rightarrow \quad P = \tau_{\text{izin}} \cdot A$$

Her malzeme için izin verilen gerilmeye karşılık gelen P'yi ayrı ayrı bulacağız.

Adım 3 — Çelik çubuk şartına göre P

$$A_1 = \pi dt_b = \pi(12 \text{ mm})(10 \text{ mm}) = 376,99 \text{ mm}^2 = 376,99 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$P_1 = \tau_{\text{çelik}} \cdot A_1 = (180 \times 10^6 \text{ Pa})(376,99 \times 10^{-6} \text{ m}^2)$$

$$P_1 = 67,86 \times 10^3 \text{ N} = 67,9 \text{ kN}$$

Adım 4 — Alüminyum plaka şartına göre P

$$A_2 = \pi D t_p = \pi(40 \text{ mm})(8 \text{ mm}) = 1005,3 \text{ mm}^2 = 1005,3 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$P_2 = \tau_{Al} \cdot A_2 = (70 \times 10^6 \text{ Pa})(1005,3 \times 10^{-6} \text{ m}^2)$$

$$P_2 = 70,37 \times 10^3 \text{ N} = 70,4 \text{ kN}$$

Adım 5 — İzin verilen en büyük P'yi seçelim

P yükü **iki şartı birlikte** sağlamalıdır. Bu yüzden iki değerden küçük olanı alınır; büyük olan seçilirse diğer elemandaki gerilme sınırı aşılır.

$$P_{\text{ijin}} = \min(P_1; P_2) = \min(67,9 \text{ kN}; 70,4 \text{ kN}) = 67,9 \text{ kN}$$

Kontrol: P = 67,9 kN için plakadaki kayma gerilmesi:

$$\tau_{Al} = \frac{67,86 \times 10^3 \text{ N}}{1005,3 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 67,5 \text{ MPa} < 70 \text{ MPa} \quad \checkmark$$

SONUÇ

$P_{izin} = 67,9 \text{ kN}$ (belirleyici koşul: çelik çubuk başlığındaki kayma)

Yorum

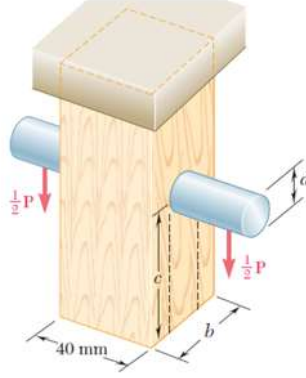
Alüminyumun izin verilen kayma gerilmesi çeliğinkinin yarısından azdır. Buna rağmen belirleyici eleman çeliktir, çünkü plakadaki kayma yüzeyi ($D = 40$ mm çevre) çubuk başlığındakinden ($d = 12$ mm çevre) çok daha büyüktür.

*Tasarımda en sık yapılan hata, çelik için gövde kesit alanını ($\pi d^2/4$) kullanmaktır. O alan çubuğun **normal** gerilmesine aittir; kayma alanı ise kesilen yüzeyin alanıdır ($\pi \cdot d \cdot t$).*

Problem 3

Soru

Bir P yükü, şekilde gösterildiği gibi, tavandan asılan kısa bir ahşap elemana sokulmuş bir çelik pim tarafından taşınmaktadır. Kullanılan ağacın kopma mukavemeti çekmede 60 MPa ve kesmede 7,5 MPa, çeliğin kesmede kopma mukavemeti ise 150 MPa'dır. $b = 40$ mm, $c = 55$ mm ve $d = 12$ mm olduğuna göre, sistemin emniyet katsayısının 3,2 olması halinde P yükünü belirleyiniz.



Verilenler ve istenenler

- Ahşap kesiti: $40 \text{ mm} \times b$, $b = 40$ mm; pimin altındaki ahşap boyu $c = 55$ mm
- Pim çapı: $d = 12$ mm; pim iki ucundan $P/2$ ile yüklenir
- Ahşabın kopma mukavemetleri: $\sigma_U = 60$ MPa (çekme), $\tau_U = 7,5$ MPa (kesme)
- Çeliğin kesmede kopma mukavemeti: $\tau_U = 150$ MPa
- Emniyet katsayısı: E.K. = 3,2
- **İstenen:** Sistemin taşıyabileceği emniyetli P yükü.

Adım 1 — Emniyet katsayısı kavramı ve çözüm yolu

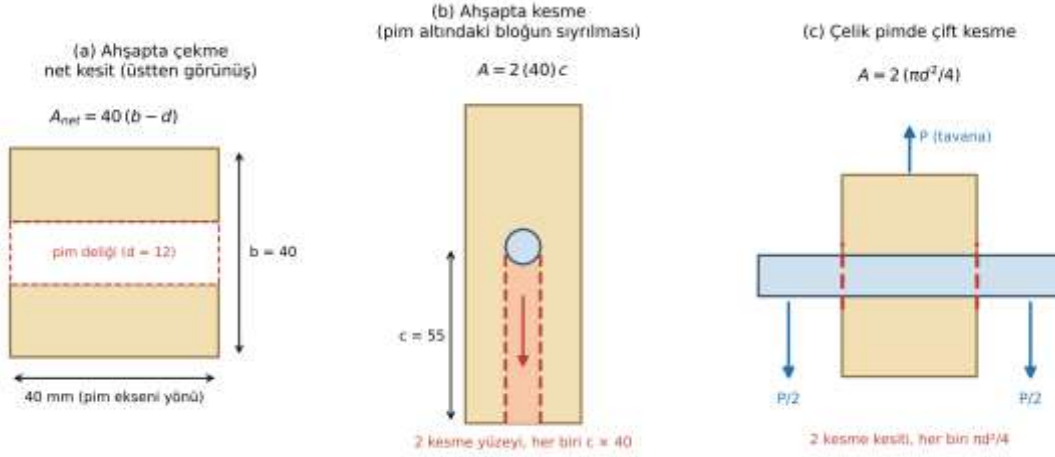
Emniyet katsayısı, elemanı koparan yükün (kopma yükü P_U) izin verilen yüke oranıdır:

$$E.K. = \frac{P_U}{P_{izin}} \rightarrow P_{izin} = \frac{P_U}{E.K.}$$

Sistem birden fazla şekilde şekil değiştirebilir. Her şekil değişimi biçimi için kopma yükünü ayrı ayrı bulacağız. Sistemin kopma yükü bunların **en küçüğüdür**, çünkü sistem en zayıf halkasından kopar. Son olarak bunu emniyet katsayısına böleceğiz.

Olası üç şekil değiştirme biçimi:

- **(a)** Ahşabın, pim deliğinden geçen (en zayıf) kesitte çekmeden kopması
- **(b)** Pimin altındaki ahşap bloğun kesmeyle aşağı sıyrılması
- **(c)** Çelik pimin, ahşabın iki yüzünde kesilmesi (çift kesme)



Şekil 3.1 — Üç şekil değiştirme biçimi ve ilgili alanlar

Adım 2 — (a) Ahşapta çekme

Pimin üstündeki ahşap, P yükünün tamamını tavana iletir. Kesitin en küçük olduğu yer pim deliğinden geçen kesittir; delik b genişliğinden d kadarını götürür:

$$A_{\text{net}} = 40(b - d) = 40(40 - 12) = 1120 \text{ mm}^2 = 1120 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$P_{U,1} = \sigma_U \cdot A_{\text{net}} = (60 \times 10^6 \text{ Pa})(1120 \times 10^{-6} \text{ m}^2) = 67,2 \text{ kN}$$

Adım 3 — (b) Ahşapta kesme (bloğun sıyrılması)

Pim aşağı doğru yüklendiğinde, altındaki d genişliğinde ve c boyundaki ahşap blok aşağı itilir. Blok, iki yanındaki düşey düzlemler boyunca kesilerek sıyrılır. Her düzlemin boyutları $c \times 40 \text{ mm}$ 'dir ve 2 düzlem vardır:

$$A_2 = 2(40)(c) = 2(40)(55) = 4400 \text{ mm}^2 = 4400 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$P_{U,2} = \tau_{U,\text{ahşap}} \cdot A_2 = (7,5 \times 10^6 \text{ Pa})(4400 \times 10^{-6} \text{ m}^2) = 33,0 \text{ kN}$$

Adım 4 — (c) Çelik pimde çift kesme

Pimin her iki ucuna $P/2$ etkir; pim, ahşabın iki yüzünde ayrı ayrı kesilir. Toplam kesme alanı iki dairesel kesitin toplamıdır:

$$A_3 = 2 \frac{\pi d^2}{4} = 2 \frac{\pi (12)^2}{4} = 226,2 \text{ mm}^2 = 226,2 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$P_{U,3} = \tau_{U,\text{çelik}} \cdot A_3 = (150 \times 10^6 \text{ Pa})(226,2 \times 10^{-6} \text{ m}^2) = 33,9 \text{ kN}$$

Adım 5 — Sistemin kopma yükü ve izin verilen yük

Üç kopma yükünden en küçüğü sistemi belirler:

$$P_U = \min(67,2; 33,0; 33,9) = 33,0 \text{ kN} \quad (\text{ahşapta kesme belirleyici})$$

$$P_{\text{izin}} = \frac{P_U}{E.K.} = \frac{33,0 \text{ kN}}{3,2} = 10,31 \text{ kN}$$

SONUÇ

$P_{izin} = 10,3 \text{ kN}$ (belirleyici şekil değiştirme biçimi: pimin altındaki ahşabın kesmeyle sıyrılması)

Yorum

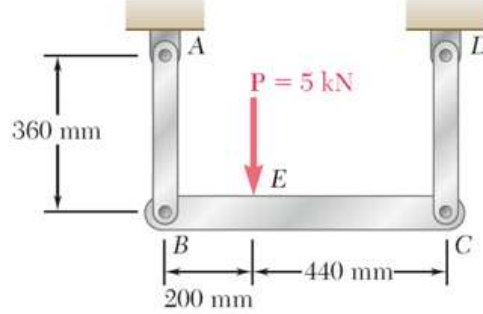
Ahşapta kesme (33,0 kN) ile pimde kesme (33,9 kN) birbirine çok yakındır; bu, tasarımın dengeli olduğunu gösterir. Ahşabın çekme kapasitesi (67,2 kN) ise bunların yaklaşık iki katıdır.

Taşıma kapasitesini artırmanın en kolay yolu c mesafesini büyütmektir; ancak c arttıkça pim kesmesi belirleyici olur ve P_U en fazla 33,9 kN'a çıkabilir. Daha fazlası için pim çapı da büyütülmelidir.

Problem 4

Soru

AB ve CD bağlantı kollarının her biri alüminyumdan ($E = 75 \text{ GPa}$) yapılmıştır ve 125 mm^2 'lik kesit alanına sahiptir. Bu kollar rijit BC elemanını taşıdıklarına göre, E noktasının yer değiştirmesini bulunuz.



Verilenler ve istenenler

- Kollar (AB ve CD): alüminyum, $E = 75 \text{ GPa}$, $A = 125 \text{ mm}^2$, boy $L = 360 \text{ mm}$
- BC rijit eleman: $BE = 200 \text{ mm}$, $EC = 440 \text{ mm} \rightarrow BC = 640 \text{ mm}$
- E noktasında yük: $P = 5 \text{ kN}$ (aşağı)
- **İstenen:** E noktasının düşey yer değiştirmesi δ_E .

Adım 1 — Problemin mantığı

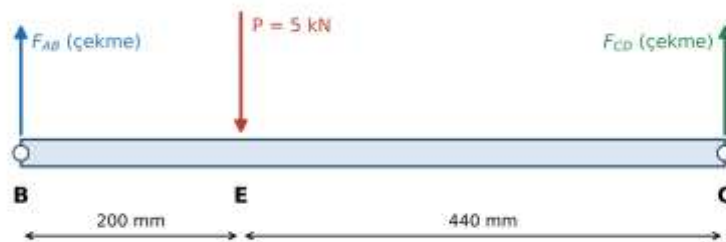
BC rijittir, yani kendisi şekil değiştirmez; yalnızca öteleme ve dönme yapabilir. BC'nin konumunu, onu taşıyan AB ve CD kollarının uzamaları belirler:

- B noktası, AB kolunun uzaması kadar aşağı iner: $\delta_B = \delta_{AB}$
- C noktası, CD kolunun uzaması kadar aşağı iner: $\delta_C = \delta_{CD}$
- BC doğru kaldığı için E'nin yer değiştirmesi, δ_B ile δ_C arasında doğrusal enterpolasyonla bulunur.

Çözüm sırası: (1) denge $\rightarrow$ kol kuvvetleri, (2) Hooke kanunu $\rightarrow$ kol uzamaları, (3) geometri $\rightarrow \delta_E$.

Adım 2 — BC'nin serbest cisim diyagramı ve kol kuvvetleri

Kollar iki kuvvet elemanıdır; BC'ye düşey kuvvet uygularlar. Her iki kolun da BC'yi yukarı çektiğini (çekme) kabul edelim.



Şekil 4.1 — Rijit BC elemanının serbest cisim diyagramı

C noktasına göre moment (F_{CD} denklemden düşer):

$$\Sigma M_C = 0: \quad -F_{AB}(640) + (5)(440) = 0$$

$$F_{AB} = \frac{(5)(440)}{640} = 3,4375 \text{ kN} \quad (+ \rightarrow \text{çekme})$$

B noktasına göre moment (F_{CD} denklemden düşer):

$$\Sigma M_B = 0: \quad F_{CD}(640) - (5)(200) = 0$$

$$F_{CD} = \frac{(5)(200)}{640} = 1,5625 \text{ kN} \quad (+ \rightarrow \text{çekme})$$

Kontrol:

$$\Sigma F_y = 3,4375 + 1,5625 - 5 = 0 \quad \checkmark$$

Adım 3 — Kolların uzamaları (Hooke kanunu)

Eksenel yüklü, kesiti sabit bir çubuğun boy değişimi:

$$\delta = \frac{FL}{AE}$$

İki kolda da L, A ve E aynı olduğundan paydadaki çarpımı bir kez hesaplayalım:

$$AE = (125 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(75 \times 10^9 \text{ Pa}) = 9,375 \times 10^6 \text{ N}$$

$$\delta_{AB} = \frac{F_{AB}L}{AE} = \frac{(3437,5 \text{ N})(0,360 \text{ m})}{9,375 \times 10^6 \text{ N}} = 132,0 \times 10^{-6} \text{ m} = 0,1320 \text{ mm}$$

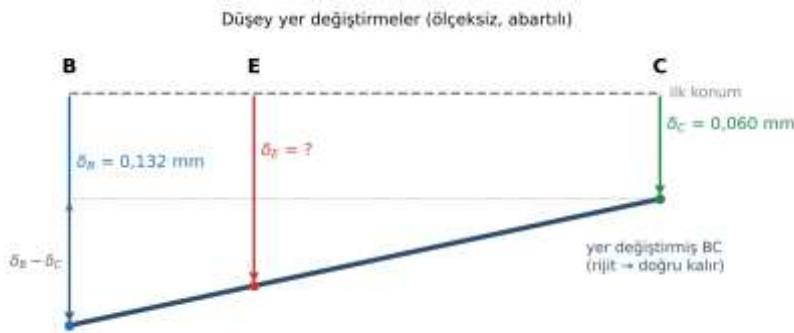
$$\delta_{CD} = \frac{F_{CD}L}{AE} = \frac{(1562,5 \text{ N})(0,360 \text{ m})}{9,375 \times 10^6 \text{ N}} = 60,0 \times 10^{-6} \text{ m} = 0,0600 \text{ mm}$$

İki kol da çekmede olduğu için uzar; bu yüzden B ve C noktaları aşağı iner:

$$\delta_B = 0,1320 \text{ mm} \downarrow \quad \delta_C = 0,0600 \text{ mm} \downarrow$$

Adım 4 — Geometri: E noktasının yer değiştirmesi

Rijit BC, yer değiştirdikten sonra da doğrudur. B daha çok, C daha az indiği için eleman hafifçe döner. E, B'den 200 mm uzakta olduğuna göre benzer üçgenlerden:



Şekil 4.2 — Rijit BC'nin yer değiştirmiş konumu (abartılı)

$$\delta_E = \delta_B - (\delta_B - \delta_C) \frac{BE}{BC}$$

$$\delta_E = 0,1320 - (0,1320 - 0,0600) \frac{200}{640}$$

$$\delta_E = 0,1320 - (0,0720)(0,3125) = 0,1320 - 0,0225$$

$$\delta_E = 0,1095 \text{ mm} \downarrow$$

Kontrol: E, B'ye daha yakın olduğu için δ_E değerinin δ_C 'den büyük, δ_B 'den küçük ve δ_B 'ye daha yakın çıkması beklenir: $0,060 < 0,1095 < 0,132 \checkmark$

SONUÇ

$\delta_E = 0,1095 \text{ mm}$ (aşağı)

Yorum

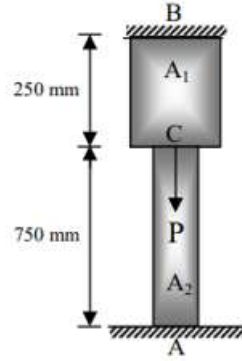
Yük B'ye daha yakın olduğu için AB kolu daha büyük kuvvet taşır ve daha çok uzar; bu da rijit BC'nin B tarafı daha çok inecek şekilde hafifçe dönmesine yol açar.

Rijit eleman problemlerinde genel yol her zaman aynıdır: denge $\rightarrow$ kuvvetler, $F L / (A E) \rightarrow$ uzamalar, rijit elemanın doğru kalması $\rightarrow$ geometri.

Problem 5

Soru

1000 mm boyundaki çubuk A ve B uçlarından iki rijit plakayla sabitlenmiştir. C noktasından $P = 4$ kN'luk kuvvet etkimektedir. (a) A ve B'de doğacak reaksiyon kuvvetlerini hesaplayınız. (b) Sıcaklık 50°C artırılırsa reaksiyon kuvvetleri ne olur, hesaplayınız.



Verilenler ve istenenler

- BC parçası (üst): $L_1 = 250$ mm, $A_1 = 500$ mm²
- CA parçası (alt): $L_2 = 750$ mm, $A_2 = 250$ mm²
- $E_1 = E_2 = E = 2 \times 10^5$ N/mm², $\alpha = 12 \times 10^{-6}$ 1/ $^\circ\text{C}$ (soruda $1,2 \times 10^{-6}$ yazılmıştır; yazım hatası düzeltilmiştir)
- C noktasında $P = 4$ kN = 4000 N (aşağı); (b) şıkında ayrıca $\Delta T = +50^\circ\text{C}$
- **İstenen:** (a) R_A ve R_B ; (b) sıcaklık artışından sonra R_A ve R_B .

Bu çözümde birimler N ve mm ile tutulmuştur; E N/mm² (= MPa) olarak verildiği için bu en pratik yoldur.

Adım 1 — Problemin türünü belirle: hiperstatik çubuk

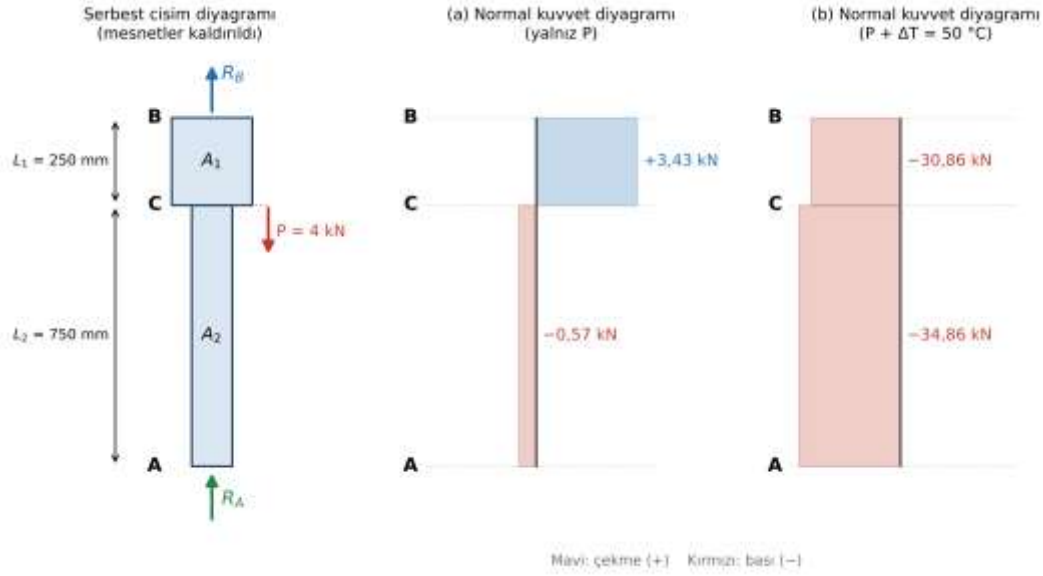
Çubuğun iki ucu da sabittir, dolayısıyla iki bilinmeyen reaksiyon (R_A , R_B) vardır. Düşey doğrultuda ise yazılabilecek tek denge denklemi $\Sigma F_y = 0$ 'dır. Bilinmeyen sayısı denklem sayısından fazla olduğu için problem **statikçe belirsiz (hiperstatik)** bir problemidir.

Eksik denklem, **uygunluk (geometrik uyum) koşulundan** gelir: Çubuk iki rijit plaka arasında sıkıştığı için toplam boyu değişmez:

$$\delta_{\text{toplam}} = \delta_{BC} + \delta_{CA} = 0$$

Adım 2 — Serbest cisim diyagramı ve denge

Mesnetleri kaldırıp yerlerine reaksiyonları koyalım. İkisini de çubuğa yukarı doğru etkiliyor kabul edelim (R_B çubuğu yukarı çeker, R_A yukarı iter).



Şekil 5.1 — Serbest cisim diyagramı ve iki durum için normal kuvvet diyagramları

$$\Sigma F_y = 0: \quad R_A + R_B - P = 0 \quad \rightarrow \quad R_A = P - R_B$$

Kesim yöntemiyle iç normal kuvvetler (çekme +):

- BC parçasında (C'nin üstü): üst parçayı ayırırsak $N_1 = R_B$
- CA parçasında (C'nin altı): alt parçayı ayırırsak $N_2 = -R_A = R_B - P$

Adım 3 — (a) Yalnızca P yükü etkisinde reaksiyonlar

$\Delta T = 0$ olduğundan paydaki sıcaklık terimi sıfırdır; pay kısmında yalnızca yük terimi kalır:

$$R_B = \frac{(4000)(15 \times 10^{-6})}{17,5 \times 10^{-6}} = \frac{0,060}{17,5 \times 10^{-6}} = 3428,6 \text{ N}$$

$$R_A = P - R_B = 4000 - 3428,6 = 571,4 \text{ N}$$

İkisi de pozitif çıktığı için kabul edilen yönler doğrudur: iki reaksiyon da yukarı doğrudur. BC parçası çekmede ($N_1 = +3428,6 \text{ N}$), CA parçası basıdadır ($N_2 = -571,4 \text{ N}$).

Kontrol (toplam boy değişimi sıfır olmalı):

$$\delta = (3428,6)(2,5 \times 10^{-6}) + (-571,4)(15 \times 10^{-6}) = 0,00857 - 0,00857 = 0 \quad \checkmark$$

İlgili gerilmeler (bilgi amaçlı):

$$\sigma_1 = \frac{3428,6}{500} = 6,86 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = \frac{-571,4}{250} = -2,29 \text{ MPa}$$

Adım 4 — (b) Sıcaklık 50 °C artırıldığında reaksiyonlar

Önce, çubuk serbest olsaydı sıcaklık artışıyla ne kadar uzayacağını bulalım:

$$\delta_T = \alpha \Delta T L = (12 \times 10^{-6})(50)(1000) = 0,60 \text{ mm}$$

Rijit plakalar bu uzamaya izin vermez. Genel ifadede yerine koyalım:

$$R_B = \frac{(4000)(15 \times 10^{-6}) - 0,60}{17,5 \times 10^{-6}} = \frac{0,060 - 0,60}{17,5 \times 10^{-6}} = -30\,857 \text{ N}$$

$$R_A = P - R_B = 4000 - (-30\,857) = 34\,857\text{ N}$$

R_B negatif çıktı: B'deki reaksiyon kabul edilen yönün tersine, yani **aşağı** doğrudur. Plaka artık çubuğu çekmiyor, aşağı doğru itiyor. R_A ise yukarı doğrudur ve büyümüştür.

Fiziksel yorum (süperpozisyon): Sıcaklık artışı tek başına, iki uca eşit büyüklükte bir bası kuvveti doğurur:

$$R_T = \frac{\delta_T}{f_1 + f_2} = \frac{0,60}{17,5 \times 10^{-6}} = 34\,286\text{ N} \quad (\text{bası})$$

Bu kuvvet B'de çubuğu aşağı, A'da yukarı iter. (a)'daki reaksiyonlarla toplanırsa:

$$R_B = 3429 - 34\,286 = -30\,857\text{ N} \quad R_A = 571 + 34\,286 = 34\,857\text{ N}$$

Her iki parça da artık basıdadır: $N_1 = R_B = -30\,857\text{ N}$ ve $N_2 = R_B - P = -34\,857\text{ N}$.

$$\sigma_1 = \frac{-30\,857}{500} = -61,7\text{ MPa} \quad \sigma_2 = \frac{-34\,857}{250} = -139,4\text{ MPa}$$

Kontrol:

$$\delta = (-30\,857)(2,5 \times 10^{-6}) + (-34\,857)(15 \times 10^{-6}) + 0,60 = -0,0771 - 0,5229 + 0,60 = 0 \quad \checkmark$$

SONUÇ

(a) $R_B = 3,43\text{ kN}$ (yukarı), $R_A = 0,571\text{ kN}$ (yukarı)

(b) $R_B = 30,86\text{ kN}$ (aşağı), $R_A = 34,86\text{ kN}$ (yukarı)

Yorum

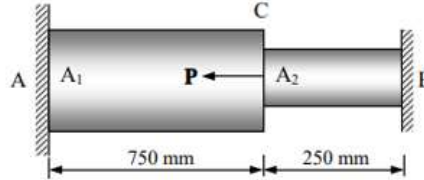
Isınan çubuk uzamak ister; plakalar buna izin vermediği için çubukta ek bir bası kuvveti (34,29 kN) oluşur. Bu kuvvet 4 kN'luk dış yükten çok daha büyüktür; bu yüzden B'deki reaksiyon yön değiştirir ve çubuğun tamamı basıya geçer.

Sıcaklık etkisiyle CA parçasındaki gerilme $-2,3\text{ MPa}$ 'dan $-139,4\text{ MPa}$ 'ya çıkmıştır. Uçları tutulu elemanlarda küçük sıcaklık değişimleri bile büyük gerilmeler doğurabilir; bu nedenle köprü ve raylarda genleşme derzleri bırakılır.

Problem 6**Soru**

1000 mm boyundaki çubuk A ve B uçlarından iki rijit plakaya sabitlenmiştir. C noktasından $P = 2\text{ kN}$ 'luk kuvvet etkimektedir.

- A ve B'de doğacak reaksiyon kuvvetlerini ve gerilmeleri hesaplayınız.
- Sıcaklık 100°C artırılırsa meydana gelecek termik gerilmeleri hesaplayınız.



$$A_1=500\text{ mm}^2, A_2=250\text{ mm}^2, E_1=2.10^5\text{ N/mm}^2, E_2=1.10^5\text{ N/mm}^2$$

$$\alpha_1=1,6.10^{-6}\text{ }1/^\circ\text{C}, \alpha_2=1.10^{-6}\text{ }1/^\circ\text{C}$$

Verilenler ve istenenler

- AC parçası (1): $L_1 = 750\text{ mm}$, $A_1 = 500\text{ mm}^2$, $E_1 = 2 \times 10^5\text{ N/mm}^2$, $\alpha_1 = 1,6 \times 10^{-6}\text{ }1/^\circ\text{C}$
- CB parçası (2): $L_2 = 250\text{ mm}$, $A_2 = 250\text{ mm}^2$, $E_2 = 1 \times 10^5\text{ N/mm}^2$, $\alpha_2 = 1 \times 10^{-6}\text{ }1/^\circ\text{C}$
- C noktasında $P = 2\text{ kN} = 2000\text{ N}$ (sola, A'ya doğru); (b) şıkkında $\Delta T = +100^\circ\text{C}$
- İstenen:** (a) $R_A, R_B, \sigma_1, \sigma_2$; (b) termik gerilmeler σ_{1T}, σ_{2T} .

Birimler N ve mm ile tutulmuştur ($\text{N/mm}^2 = \text{MPa}$). Bu problem Problem 5 ile aynı mantıkla çözülür; fark, iki parçanın farklı malzemeden (farklı E ve α) olmasıdır.

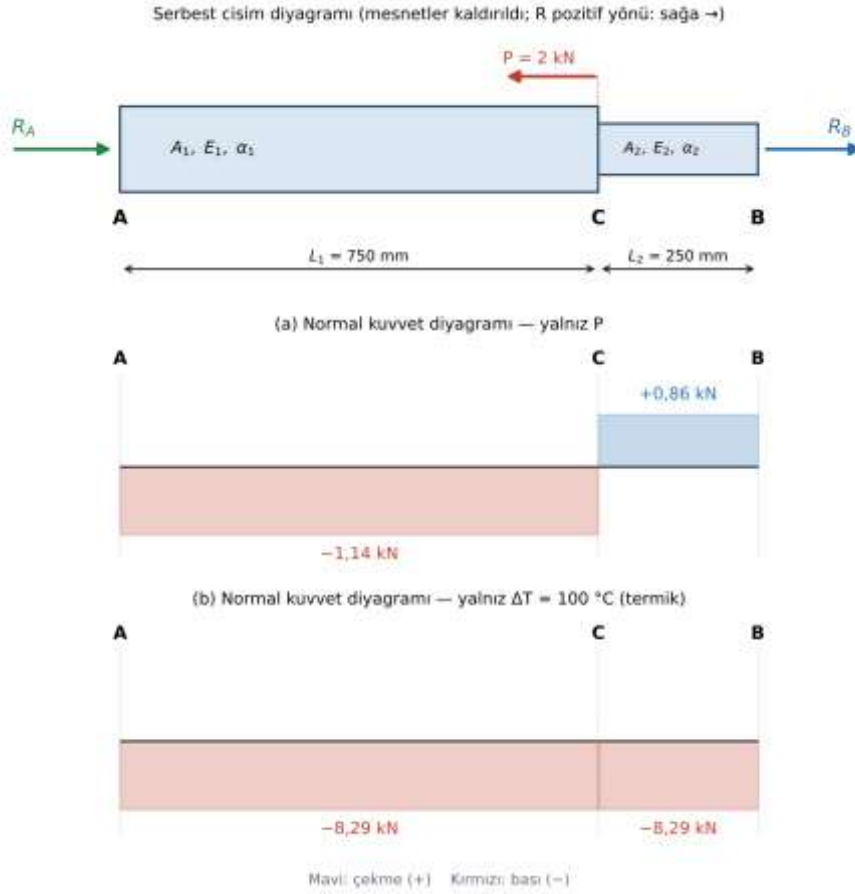
Adım 1 — Problemin türü: hiperstatik çubuk

İki uç sabittir ve iki bilinmeyen reaksiyon vardır (R_A, R_B); yatay doğrultuda ise tek denge denklemi yazılabilir. Problem **statikçe belirsizdir**. Eksik denklem uygunluk koşulundan gelir: plakalar rijit olduğu için çubuğun toplam boyu değişmez.

$$\delta_{\text{toplam}} = \delta_{AC} + \delta_{CB} = 0$$

Adım 2 — Serbest cisim diyagramı, denge ve iç kuvvetler

Mesnetleri kaldırıp reaksiyonları koyalım. İkisini de sağa doğru (+x) kabul edelim; P ise sola etkir.



Şekil 6.1 — Serbest cisim diyagramı ve normal kuvvet diyagramları

$$\Sigma F_x = 0: \quad R_A + R_B - P = 0 \quad \rightarrow \quad R_A + R_B = 2000 \text{ N}$$

Kesim yöntemiyle iç normal kuvvetler (çekme +):

- AC parçası: sol parçayı ayırırsak $R_A + N_1 = 0 \rightarrow N_1 = -R_A$
- CB parçası: sağ parçayı ayırırsak $R_B - N_2 = 0 \rightarrow N_2 = R_B$

Adım 3 — Esneklik terimleri

Her parçanın birim kuvvet başına boy değişimi ($f = L / EA$):

$$f_1 = \frac{L_1}{E_1 A_1} = \frac{750}{(2 \times 10^5)(500)} = 7,5 \times 10^{-6} \text{ mm/N}$$

$$f_2 = \frac{L_2}{E_2 A_2} = \frac{250}{(1 \times 10^5)(250)} = 10 \times 10^{-6} \text{ mm/N}$$

$$f_1 + f_2 = 17,5 \times 10^{-6} \text{ mm/N}$$

Adım 4 — (a) Yalnızca P etkisinde reaksiyonlar

Uygunluk koşulu ($\Delta T = 0$):

$$N_1 f_1 + N_2 f_2 = 0 \quad \rightarrow \quad -R_A f_1 + R_B f_2 = 0$$

$$R_A = R_B \frac{f_2}{f_1} = R_B \frac{10}{7,5} = \frac{4}{3} R_B$$

Denge denkleminde yerine koyalım:

$$\frac{4}{3} R_B + R_B = 2000 \quad \rightarrow \quad R_B = \frac{3}{7} (2000) = 857,1 \text{ N}$$

$$R_A = 2000 - 857,1 = 1142,9 \text{ N}$$

İkisi de pozitif çıktı, yani iki reaksiyon da sağa doğrudur. Fiziksel olarak: P, C noktasını sola çeker; AC parçası sıkışır ve A plakasını iter, CB parçası gerilir ve B plakasından çekilir.

İç kuvvetler ve gerilmeler:

$$N_1 = -R_A = -1142,9 \text{ N} \quad N_2 = R_B = 857,1 \text{ N}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-1142,9}{500} = -2,29 \text{ MPa} \quad (\text{bası})$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{857,1}{250} = 3,43 \text{ MPa} \quad (\text{çekme})$$

Kontrol:

$$\delta = (-1142,9)(7,5 \times 10^{-6}) + (857,1)(10 \times 10^{-6}) = -0,00857 + 0,00857 = 0 \quad \checkmark$$

Adım 5 — (b) Sıcaklık artışından doğan termik gerilmeler

Termik gerilmeleri bulmak için yalnızca sıcaklık etkisini ele alalım (P'nin etkisi (a)'da ayrıca bulundu; istenirse süperpozisyonla toplanır).

1. Serbest uzama: Plakalar olmasaydı her parça kendi α değeriyle uzardı:

$$\delta_T = \alpha_1 \Delta T L_1 + \alpha_2 \Delta T L_2$$

$$\delta_T = (1,6 \times 10^{-6})(100)(750) + (1 \times 10^{-6})(100)(250) = 0,120 + 0,025 = 0,145 \text{ mm}$$

2. Engelleme kuvveti: Plakalar bu uzamayı engeller ve çubuğu bir R_T kuvvetiyle sıkıştırır. Dış yük olmadığı için R_T her iki parçada aynıdır ($N_1 = N_2 = -R_T$). Uygunluk koşulu:

$$\delta_T - R_T(f_1 + f_2) = 0 \quad \rightarrow \quad R_T = \frac{\delta_T}{f_1 + f_2} = \frac{0,145}{17,5 \times 10^{-6}} = 8285,7 \text{ N}$$

3. Termik gerilmeler: Kuvvet aynı olsa da kesitler farklı olduğu için gerilmeler farklıdır:

$$\sigma_{1T} = -\frac{R_T}{A_1} = -\frac{8285,7}{500} = -16,57 \text{ MPa} \quad (\text{bası})$$

$$\sigma_{2T} = -\frac{R_T}{A_2} = -\frac{8285,7}{250} = -33,14 \text{ MPa} \quad (\text{bası})$$

Kontrol (toplam boy değişimi):

$$\delta = 0,145 - (8285,7)(17,5 \times 10^{-6}) = 0,145 - 0,145 = 0 \quad \checkmark$$

Ek bilgi — P ve ΔT birlikte (süperpozisyon):

$$\sigma_1 = -2,29 - 16,57 = -18,86 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = 3,43 - 33,14 = -29,71 \text{ MPa}$$

$$R_A = 1142,9 + 8285,7 = 9428,6 \text{ N} \quad R_B = 857,1 - 8285,7 = -7428,6 \text{ N}$$

Yani birlikte etkidiklerinde $R_A = 9,43 \text{ kN}$ (sağa), $R_B = 7,43 \text{ kN}$ (sola) olur ve çubuğun tamamı basıya geçer.

SONUÇ

(a) $R_A = 1,143 \text{ kN}$ (sağa), $R_B = 0,857 \text{ kN}$ (sağa)

$\sigma_1 = -2,29 \text{ MPa}$ (AC, bası), $\sigma_2 = +3,43 \text{ MPa}$ (CB, çekme)

(b) $R_T = 8,29 \text{ kN}$; $\sigma_{1T} = -16,57 \text{ MPa}$ (AC), $\sigma_{2T} = -33,14 \text{ MPa}$ (CB)

Yorum

(a)'da yükü iki parça, rijitlikleriyle (EA / L) orantılı paylaşır: AC parçası daha rijit olduğu için ($f_1 < f_2$) yükün daha büyük kısmını (%57) o taşır.

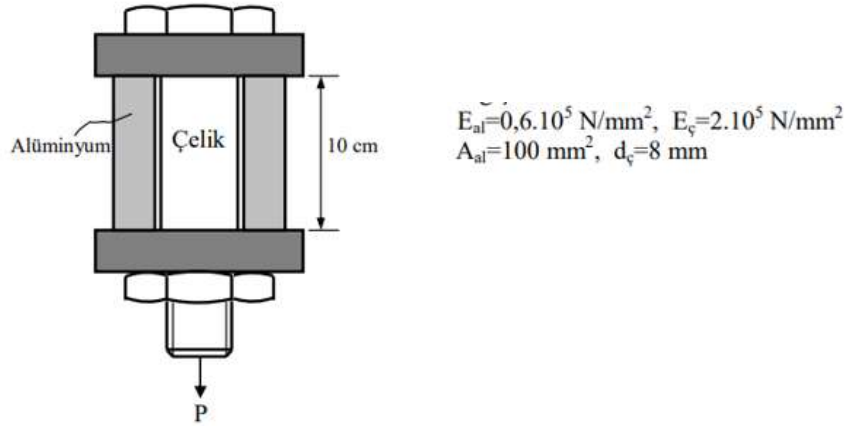
(b)'de termik kuvvet iki parçada aynıdır; ancak CB'nin kesiti yarı yarıya küçük olduğu için oradaki termik gerilme iki kat büyüktür. Termik gerilme, uzama engellendiği sürece dış yük olmadan da oluşur.

Problem 7

Soru

Başlangıçta boyları aynı olan alüminyum boru ile çelik civata bir somunla sıkıştırılıyor.

- Somun 2 mm hareket ettiğine göre boru ve civatada meydana gelen gerilmeleri hesaplayınız.
- Civatanın ucundan $P = 1$ kN'luk bir kuvvet etki ettiğinde meydana gelecek gerilmeler nasıl değişir?



Verilenler ve istenenler

- Boy (boru ve civata, plakalar arası): $L = 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm}$
- Alüminyum boru: $E_{al} = 0,6 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, $A_{al} = 100 \text{ mm}^2$
- Çelik civata: $E_{\check{c}} = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, $d_{\check{c}} = 8 \text{ mm}$
- Somunun ilerlemesi: $\Delta = 2 \text{ mm}$; (b) şıkında civata ucunda $P = 1 \text{ kN} = 1000 \text{ N}$
- İstenen:** (a) $\sigma_{\check{c}}$ ve σ_{al} ; (b) P etkisindeki yeni gerilmeler.

Adım 1 — Sistemin nasıl çalıştığını anla

Somun sıkıldıkça iki plakayı birbirine yaklaştırmaya çalışır. Bu sırada:

- Civata uzar** → civatada çekme kuvveti oluşur.
- Boru kısalır** → boruda bası kuvveti oluşur.

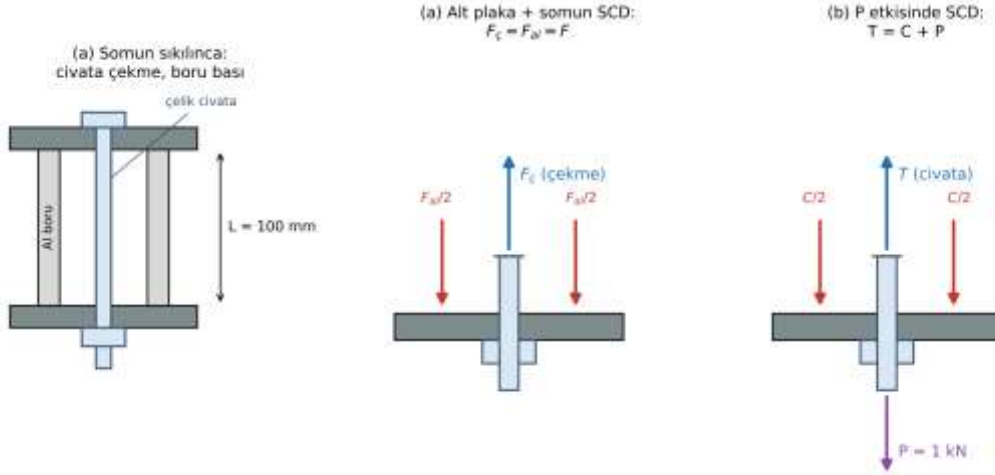
Somunun 2 mm ilerlemesi, bu iki boy değişiminin toplamı kadardır. Örneğin civata hiç uzamasaydı boru 2 mm kısalma zorunda kalırdı; boru hiç kısalmasaydı civata 2 mm uzardı. Gerçekte ikisi paylaşır:

$$\delta_{\check{c}} + \delta_{al} = \Delta = 2 \text{ mm}$$

Burada $\delta_{\check{c}}$ civatanın uzaması, δ_{al} borunun kısalmasıdır (ikisi de mutlak değer olarak).

Adım 2 — Denge: kuvvetler eşittir

Alt plaka ile somunu birlikte serbest cisim olarak ayıralım. Civata yukarı $F_{\check{c}}$ ile çeker, boru aşağı F_{al} ile iter. Dış yük olmadığından:



Şekil 7.1 — Sistem ve alt plakanın serbest cisim diyagramları

$$\Sigma F_y = 0: \quad F_c = F_{al} = F$$

Adım 3 — Kesit alanı ve esneklikler

$$A_c = \frac{\pi d_c^2}{4} = \frac{\pi(8)^2}{4} = 50,27 \text{ mm}^2$$

$$f_c = \frac{L}{E_c A_c} = \frac{100}{(2 \times 10^5)(50,27)} = 9,947 \times 10^{-6} \text{ mm/N}$$

$$f_{al} = \frac{L}{E_{al} A_{al}} = \frac{100}{(0,6 \times 10^5)(100)} = 16,667 \times 10^{-6} \text{ mm/N}$$

$$f_c + f_{al} = 26,614 \times 10^{-6} \text{ mm/N}$$

Adım 4 — (a) Somun 2 mm ilerlediğinde kuvvet ve gerilmeler

Uygunluk denkleminde $\delta = F \cdot f$ yazalım:

$$F f_c + F f_{al} = \Delta \quad \rightarrow \quad F = \frac{\Delta}{f_c + f_{al}} = \frac{2}{26,614 \times 10^{-6}} = 75\,149 \text{ N}$$

$$\sigma_c = \frac{F}{A_c} = \frac{75\,149}{50,27} = 1495 \text{ MPa} \quad (\text{çekme})$$

$$\sigma_{al} = -\frac{F}{A_{al}} = -\frac{75\,149}{100} = -751,5 \text{ MPa} \quad (\text{bası})$$

Kontrol (boy değişimlerinin toplamı 2 mm olmalı):

$$\delta_c = (75\,149)(9,947 \times 10^{-6}) = 0,748 \text{ mm} \quad \delta_{al} = (75\,149)(16,667 \times 10^{-6}) = 1,252 \text{ mm}$$

$$\delta_c + \delta_{al} = 0,748 + 1,252 = 2,000 \text{ mm} \quad \checkmark$$

Adım 5 — (b) Civata ucuna P = 1 kN etkidiğinde

Sistem üst plakadan taşınırken civatanın ucu P ile aşağı çekilir. Civatadaki çekme kuvveti T, borudaki bası kuvveti C olsun. Alt plaka + somun + civata ucunun serbest cisim diyagramından (Şekil 7.1, sağ):

$$\Sigma F_y = 0: \quad T - C - P = 0 \quad \rightarrow \quad T = C + P$$

Somunun civata üzerindeki konumu değişmediği için uygunluk koşulu aynen geçerlidir: civatanın uzaması ile borunun kısalmasının toplamı yine 2 mm'dir:

$$Tf_{\zeta} + Cf_{al} = \Delta$$

$T = C + P$ yerine konursa:

$$(C + P)f_{\zeta} + Cf_{al} = \Delta \quad \rightarrow \quad C = \frac{\Delta - Pf_{\zeta}}{f_{\zeta} + f_{al}} = F - P \frac{f_{\zeta}}{f_{\zeta} + f_{al}}$$

Yani P yükü iki elemana, esneklikleriyle ters orantılı (rijitlikleriyle orantılı) olarak paylaştırılır:

$$\Delta T = P \frac{f_{al}}{f_{\zeta} + f_{al}} = 1000 \frac{16,667}{26,614} = 626,2 \text{ N} \quad (\text{civata çekmesi artar})$$

$$\Delta C = P \frac{f_{\zeta}}{f_{\zeta} + f_{al}} = 1000 \frac{9,947}{26,614} = 373,8 \text{ N} \quad (\text{boru basısı azalır})$$

$$\Delta T + \Delta C = 626,2 + 373,8 = 1000 \text{ N} = P \quad \checkmark$$

Yeni kuvvetler ve gerilmeler:

$$T = 75\,149 + 626 = 75\,775 \text{ N} \quad \rightarrow \quad \sigma_{\zeta} = \frac{75\,775}{50,27} = 1507,5 \text{ MPa}$$

$$C = 75\,149 - 374 = 74\,775 \text{ N} \quad \rightarrow \quad \sigma_{al} = -\frac{74\,775}{100} = -747,8 \text{ MPa}$$

Gerilme değişimleri:

$$\Delta\sigma_{\zeta} = \frac{626,2}{50,27} = +12,46 \text{ MPa} \quad \Delta\sigma_{al} = \frac{373,8}{100} = +3,74 \text{ MPa}$$

Civata gerilmesi 12,46 MPa artar; boru gerilmesi ise 3,74 MPa azalır (bası -751,5'ten -747,8 MPa'ya düşer). Not: Civatanın somunun altında kalan ucunda yalnızca P etkir: $\sigma = 1000 / 50,27 = 19,9 \text{ MPa}$.

SONUÇ

(a) $F = 75,15 \text{ kN}$; $\sigma_{\zeta} = +1495 \text{ MPa}$ (çekme), $\sigma_{al} = -751,5 \text{ MPa}$ (bası)

(b) $\sigma_{\zeta} = +1507,5 \text{ MPa}$ (+12,46 MPa artar), $\sigma_{al} = -747,8 \text{ MPa}$ (basısı 3,74 MPa azalır)

Yorum

Dış yük P'nin yalnızca %62,6'sı civataya ek çekme olarak geçer; kalan %37,4'ü borudaki ön basıyı azaltarak karşılır. Ön germeli bağlantıların avantajı budur: civata, dış yükün tamamını hissetmez.

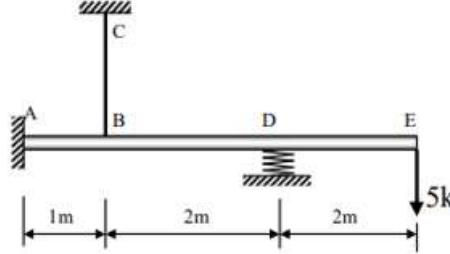
Dikkat: Somunun 2 mm ilerlemesi 100 mm boy için çok büyüktür; bulunan gerilmeler çeliğin ve alüminyumun akma sınırlarının çok üstündedir. Çözüm doğrusal-elastik kabul ile yapılmıştır; gerçekte malzemeler akardı. Somun ilerlemesi 0,2 mm olsaydı gerilmeler 10 kat küçük çıkardı ($\sigma_{\zeta} \approx 149,5 \text{ MPa}$, $\sigma_{al} \approx -75,1 \text{ MPa}$); (b)'deki değişimler ise aynı kalırdı.

Problem 8

Soru

Verilen sistemde yay katsayısı 200 N/m ve yayın maksimum 0,5 mm çökmesine müsaade edildiğine göre BC çubuğunda meydana gelen gerilmeyi ve E noktasındaki çökmeyi hesaplayınız.

(Not: AE çubuğu rijittir.) BC çubuğu için: $S_0 = 400 \text{ mm}^2$, $E = 70 \text{ GPa}$, $l = 500 \text{ mm}$.



Verilenler ve istenenler

- AE rijit; A'da mafsall. $AB = 1 \text{ m}$, $AD = 3 \text{ m}$, $AE = 5 \text{ m}$
- BC çubuğu: $S_0 = 400 \text{ mm}^2$, $E = 70 \text{ GPa} = 70\,000 \text{ N/mm}^2$, $l = 500 \text{ mm}$ (B'yi tavana bağlar)
- D'deki yay: $k = 200 \text{ N/m} = 0,2 \text{ N/mm}$; izin verilen en büyük çökme $\delta_D = 0,5 \text{ mm}$
- E'de yük: $P = 5 \text{ kN}$
- **İstenen:** σ_{BC} ve δ_E .

Adım 1 — Verilerin tutarlılığı ve iki çözüm yolu

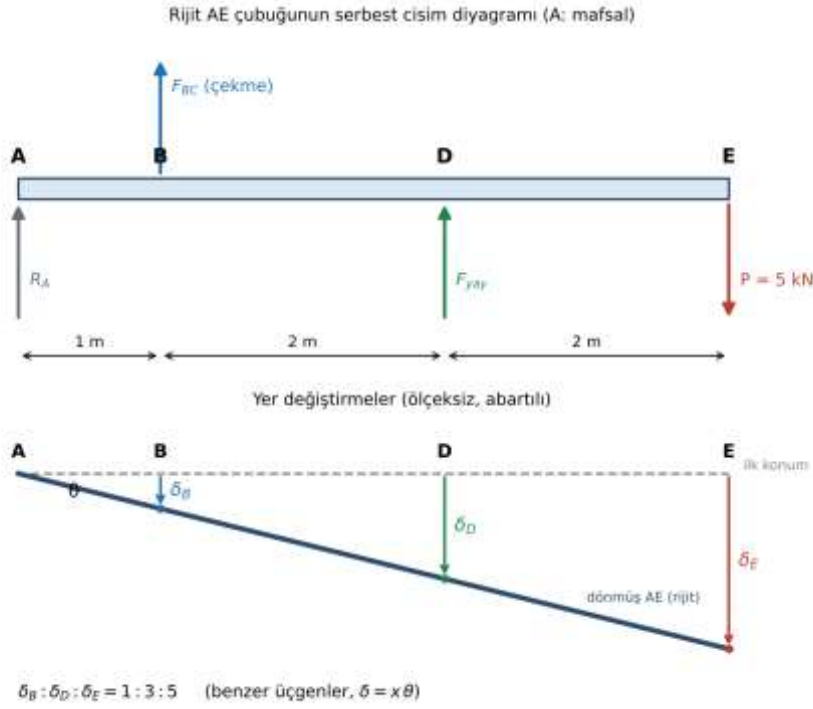
Sorudaki veriler birbiriyle tam uyumlu değildir:

- 5 kN'luk yük uygulanırsa (Çözüm 2) yayın çökmesi 1,34 mm çıkar; yani izin verilen 0,5 mm aşılır.
- $k = 200 \text{ N/m}$ çok küçük bir yay sabitidir: 0,5 mm çökmede yay yalnızca 0,1 N taşır. Yükün neredeyse tamamını BC çubuğu taşır.

Bu yüzden soru iki şekilde yorumlanabilir ve aşağıda ikisi de çözülmüştür:

- **Çözüm 1 (sınır koşulu):** Yay izin verilen en büyük değer kadar, 0,5 mm çökmüş kabul edilir. Gerilme ve çökme geometriden bulunur; bu durumu oluşturan yük de hesaplanır.
- **Çözüm 2 (yük verilmiş):** $P = 5 \text{ kN}$ ile sistem hiperstatik olarak çözülür, sonra 0,5 mm koşulu kontrol edilir.

Adım 2 — Ortak hazırlık: denge ve geometri



Şekil 8.1 — Rijit AE'nin serbest cisim diyagramı ve yer değiştirme geometrisi

Denge: A noktasına göre moment alınır (A'daki reaksiyon denklemden düşer):

$$\Sigma M_A = 0: \quad F_{BC}(1) + F_{yay}(3) - P(5) = 0$$

Geometri: AE rijittir ve A etrafında küçük bir θ açısı kadar döner. Her noktanın çökmesi A'ya uzaklığıyla orantılıdır:

$$\delta_B = 1 \cdot \theta \quad \delta_D = 3 \cdot \theta \quad \delta_E = 5 \cdot \theta \quad \rightarrow \quad \delta_B = \frac{\delta_D}{3}, \quad \delta_E = \frac{5}{3} \delta_D$$

Malzeme bağıntıları: B aşağı inince BC çubuğu δ_B kadar uzar (çekme); D aşağı inince yay δ_D kadar sıkışır:

$$F_{BC} = \frac{ES_0}{l} \delta_B = k_{BC} \delta_B \quad F_{yay} = k \delta_D$$

$$k_{BC} = \frac{ES_0}{l} = \frac{(70\,000)(400)}{500} = 56\,000 \text{ N/mm}$$

Karşılaştırma: Yay sabiti yalnızca $k = 0,2 \text{ N/mm}$ 'dir; BC çubuğu yaydan yaklaşık 280 000 kat daha rijittir.

Adım 3 — Çözüm 1 — Yay 0,5 mm çökmüş kabul edilirse

$\delta_D = 0,5 \text{ mm}$ alınır (diğer çökmeler geometriden bulunur):

$$\delta_B = \frac{0,5}{3} = 0,1667 \text{ mm} \quad \delta_E = \frac{5}{3}(0,5) = 0,833 \text{ mm}$$

BC çubuğundaki birim uzama ve gerilme (Hooke kanunu):

$$\varepsilon_{BC} = \frac{\delta_B}{l} = \frac{0,1667}{500} = 3,33 \times 10^{-4}$$

$$\sigma_{BC} = E \varepsilon_{BC} = (70\,000)(3,33 \times 10^{-4}) = 23,3 \text{ MPa} \quad (\text{çekme})$$

Bu durumu oluşturan yük (denge denkleminde):

$$F_{BC} = \sigma_{BC} S_0 = (23,33)(400) = 9333 \text{ N} \quad F_{yay} = (0,2)(0,5) = 0,1 \text{ N}$$

$$P = \frac{F_{BC}(1) + F_{yay}(3)}{5} = \frac{9333 + 0,3}{5} = 1867 \text{ N} \approx 1,87 \text{ kN}$$

Yani yayın 0,5 mm çökmesi için E'deki yük yaklaşık 1,87 kN olmalıdır; 5 kN bu sınırı aşar.

Adım 4 — Çözüm 2 — P = 5 kN ile hiperstatik çözüm

Bilinmeyenler F_{BC} , F_{yay} ve R_A 'dır; denge iki denklem verir, bu yüzden geometri de kullanılır. Kuvvetleri θ cinsinden yazıp moment denklemine koyalım (uzunluklar mm):

$$F_{BC} = k_{BC}(1000\theta) \quad F_{yay} = k(3000\theta)$$

$$k_{BC}(1000\theta)(1000) + k(3000\theta)(3000) = P(5000)$$

$$\theta = \frac{(5000)(5000)}{(56\,000)(1000)^2 + (0,2)(3000)^2} = 4,464 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

Çökmeler:

$$\delta_B = 1000\theta = 0,446 \text{ mm} \quad \delta_D = 3000\theta = 1,339 \text{ mm} \quad \delta_E = 5000\theta = 2,232 \text{ mm}$$

Kuvvetler ve gerilme:

$$F_{BC} = (56\,000)(0,446) = 24\,999 \text{ N} \quad F_{yay} = (0,2)(1,339) = 0,27 \text{ N}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{S_0} = \frac{24\,999}{400} = 62,5 \text{ MPa} \quad (\text{çekme})$$

Kontrol: $\delta_D = 1,339 \text{ mm} > 0,5 \text{ mm}$. Yani 5 kN'luk yük altında yayın izin verilen çökmesi aşılar X. Ayrıca A'daki reaksiyon: $R_A = 5000 - 24\,999 - 0,27 \approx -20\,000 \text{ N}$, yani A mafsalı kirişi 20 kN ile aşağı çeker.

SONUÇ

Çözüm 1 (yay 0,5 mm çöker): $\sigma_{BC} = 23,3 \text{ MPa}$ (çekme), $\delta_E = 0,833 \text{ mm}$ (gerekli yük $\approx 1,87 \text{ kN}$)

Çözüm 2 (P = 5 kN): $\sigma_{BC} = 62,5 \text{ MPa}$ (çekme), $\delta_E = 2,23 \text{ mm}$ (yay çökmesi 1,34 mm > 0,5 mm X)

Yorum

Soruda istenen büyük olasılıkla Çözüm 1'dir: yayın izin verilen çökmesi sistemin sınırını belirler ve her şey geometriden bulunur. Yük ve yay sabiti bu yolda kullanılmaz.

Yay (0,2 N/mm), BC çubuğuna (56 000 N/mm) göre ihmal edilecek kadar yumuşaktır; bu yüzden iki çözümde de yükün neredeyse tamamını BC çubuğu taşır. Yay sabitinin 200 N/mm olması daha gerçekçi olurdu; o durumda bile yay yükü BC'ye göre küçük kalır.