NO: .... İSİM SOYİSİM: ....

FIZ 341 ELEKTROMANYETİK TEORİYE GİRİŞ ARASINAVI
2025 - 2026 Güz, Fizik Bölümü, Pamukkale Üniversitesi, Denizli

Soru : 1 (*25P*) Uzayın bir bölgesinde elektrik alan küresel koordinatlarda $\vec{E} = kr^3\hat{r}$ olarak biliniyor (k bir sabit). **a.** ρ yük yoğunluğunu bulunuz. **b.** Merkezi orijinde olan R yarıçaplı kürede barındırılan toplam yükü bulunuz.

Soru : 2 (*25P*) Aşağıdakilerden biri elektrostatik alan olamaz. Hangisi olduğuna karar verin. k uygun birime sahip bir sabittir.

$$\vec{E} = k\left(xy\hat{x} + 2yz\hat{y} + 3xz\hat{z}\right) \qquad \text{veya} \qquad \vec{E} = k\left[y^2\hat{x} + (2xy + z^2)\hat{y} + 2yz\hat{z}\right]$$

Uygun olan için orijini referans alarak potansiyeli hesaplayınız. (*İpucu:* Sonuç gidilen yoldan bağımsız olduğu için hesabınızı kolaylaştırıcı bir integral yolu seçmelisiniz.) Bulduğunuz sonucun $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ bağıntısını sağladığını gösteriniz.

Soru : 3 (*25P*) R yarıçaplı iletken kürede toplam q yükü vardır. Bu kürenin enerjisini hesaplayınız.

Soru : 4 (*25P*) Sonsuz iletken düzlem levha topraklanmıştır ve bu levhanın d kadar uzağına noktasal q yükü yerleştirilmiştir. **a.** Görüntü yük yöntemiyle noktasal yükün olduğu bölgede potansiyeli belirleyiniz. **b.** Bulduğunuz potansiyelin sınır şartlarını sağladığını gösteriniz.

BAŞARILAR ... **03.11.2025** **Saat: 13.00 - 14.30** **Prof.Dr. Muzaffer ADAK**

%%%%%%%%%%%%%% Bazı faydalı olabilecek formüller %%%%%%%%%%%%%%

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 V_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta V_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$V(P) - V(\mathcal{O}) = -\int_{\mathcal{O}}^{P}\vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \qquad \nabla^2 f = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$d\vec{\ell} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}z\,, \qquad \vec{\nabla}f = \hat{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial f}{\partial z}$$

C E V A P L A R

Cevap : 1 a. Verilen elektrik alan vektörüne göre $E_r = kr^3$, $E_\theta = 0$ ve $E_\phi = 0$ olur. Böylece,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + 0 + 0 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(kr^5) = 5kr^2$$

Gauss yasasına, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$, göre

$$\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 5k\varepsilon_0 r^2$$

b. Toplam yük iki yolla hesaplanabilir; Gauss yasasının integral biçimi veya yoğunluğun hacim ile çarpımı.

$$\text{Yol 1:} \quad Q = \varepsilon_0 \oint_{kure} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \varepsilon_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} kR^3 R^2 \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi\varepsilon_0 k R^5$$

$$\text{Yol 2:} \quad Q = \int \rho d\tau = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} 5k\varepsilon_0 r^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = 5k\varepsilon_0 \left(\frac{R^5}{5}\right)(2)(2\pi) = 4\pi\varepsilon_0 k R^5$$

Cevap : 2 Elektrostatik alan olması için $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ olmalıdır. Bunu kontrol edelim. Birincisi için

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \left(\frac{\partial(3kxz)}{\partial y} - \frac{\partial(2kyz)}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial(kxy)}{\partial z} - \frac{\partial(3kxz)}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial(2kyz)}{\partial x} - \frac{\partial(kxy)}{\partial y}\right)\hat{z} \\ &= (0 - 2ky)\hat{x} + (0 - 3kz)\hat{y} + (0 - kx)\hat{z} \neq 0\end{aligned}$$

Bu elektrostatik alan değildir. İkincisi için

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= k\left(\frac{\partial(2yz)}{\partial y} - \frac{\partial(2xy + z^2)}{\partial z}\right)\hat{x} + k\left(\frac{\partial(y^2)}{\partial z} - \frac{\partial(2yz)}{\partial x}\right)\hat{y} + k\left(\frac{\partial(2xy + z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2)}{\partial y}\right)\hat{z} \\ &= k(2z - 2z)\hat{x} + k(0 - 0)\hat{y} + k(2y - 2y)\hat{z} = 0\end{aligned}$$

Bu elektrostatik alandır. Bunun için potansiyel hesaplayabiliriz.

$$V(P) = -\int_O^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_O^P (E_x dx + E_y dy + E_z dz) = -k\int_O^P [y^2 dx + (2xy + z^2)dy + 2yz dz]$$

Aşağıdaki yolu izleyeceğiz.

$$O = (0,0,0) \to P_1 = (x,0,0) \to P_2 = (x,y,0) \to P = (x,y,z)$$

Böylece, O'dan P_1'e giderken x-ekseni üstündeyiz. Yani, $y = 0 = sbt$ ve $dy = 0$, $z = 0 = sbt$ ve $dz = 0$.

$$V(P_1) - V(O) = -k\int_O^{P_1} [(0)dx + (0)(0) + (0)(0)] = 0$$

P_1'den P_2'ye giderken y-eksenine paralel doğru üstündeyiz. Yani, $x = sbt$ ve $dx = 0$, $z = 0 = sbt$ ve $dz = 0$.

$$V(P_2) - V(P_1) = -k \int_{P_1}^{P_2} [(y^2)(0) + (2xy + 0)dy + (0)(0)] = -kxy^2$$

P_2'den P'ye giderken z-eksenine paralel doğru üstündeyiz. Yani, $x = sbt$ ve $dx = 0$, $y = sbt$ ve $dy = 0$.

$$V(P) - V(P_2) = -k \int_{P_2}^{P} [(y^2)(0) + (2xy + z^2)(0) + 2yzdz] = -kyz^2$$

Bu sonuçlar toplanarak, orijine göre P noktasının potansiyeli elde edilir.

$$V(P) = -k(xy^2 + yz^2)$$

Bunun gradyanını alarak $\vec{E}$ hesap edelim.

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} = -ky^2\hat{x} + k(2xy + z^2)\hat{y} + 2kyz\hat{z}$$

Cevap : 3 Yüklü elektrostatik dengedeki iletkenin içinde elektrik alan sıfırdır, dışında sıfırdan farklıdır. Küre şeklinde olduğunda dışarıdaki bir P noktasındaki elektrik alanı biliyoruz.

$$\vec{E}_{dis} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

burada r kürenin merkezinden P noktasına olan radyal uzaklıktır. Yüklü sistemin sahip olduğu elektrostatik potansiyel enerjiyi aşağıdaki bağıntıyla hesaplamak mümkündür.

$$\begin{aligned}
U_{sis} = W_{biz} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{T.U.} E^2 d\tau &= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\int_{kure\ ic} E_{ic}^2 d\tau + \int_{kure\ dis} E_{dis}^2 d\tau\right) \\
&= 0 + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_R^{\infty} \frac{q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{1}{r^4} r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi \\
&= \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\left[\frac{q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\right](4\pi)\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}
\end{aligned}$$

Yukarıda $T.U.$ tüm uzay demektir.

Cevap : 4 a. Eldeki fiziksel sistemde; $z = 0$ düzleminde topraklanmış bir iletken levha ve $(0, 0, d)$ noktasında bir adet q noktasal yükü var. Görüntü yük yönteminde bu fiziksel sisteme eşdeğer olan şöyle bir sistem vardır. $(0, 0, d)$ noktasında bir adet noktasal q yükü ve $(0, 0, -d)$ noktasında başka bir noktasal $-q$ yükü mevcut. Potansiyel hesabı yapılacak bölge $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$ ve $0 \leq z < +\infty$. Bu bölgedeki bir P noktasının koordinatları (x, y, z) olsun. Böylece,

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}}\right]$$

b. Sınır koşulları

1. $z = 0$'da $V = 0$ olmalıdır.

$$V(x, y, z = 0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}}\right] = 0$$

2. $z \to \infty$ iken $V \to 0$ gitmelidir.

$$\lim_{z\to\infty} V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{z\to\infty}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}}\right] \to 0$$