

MUKAVEMET I

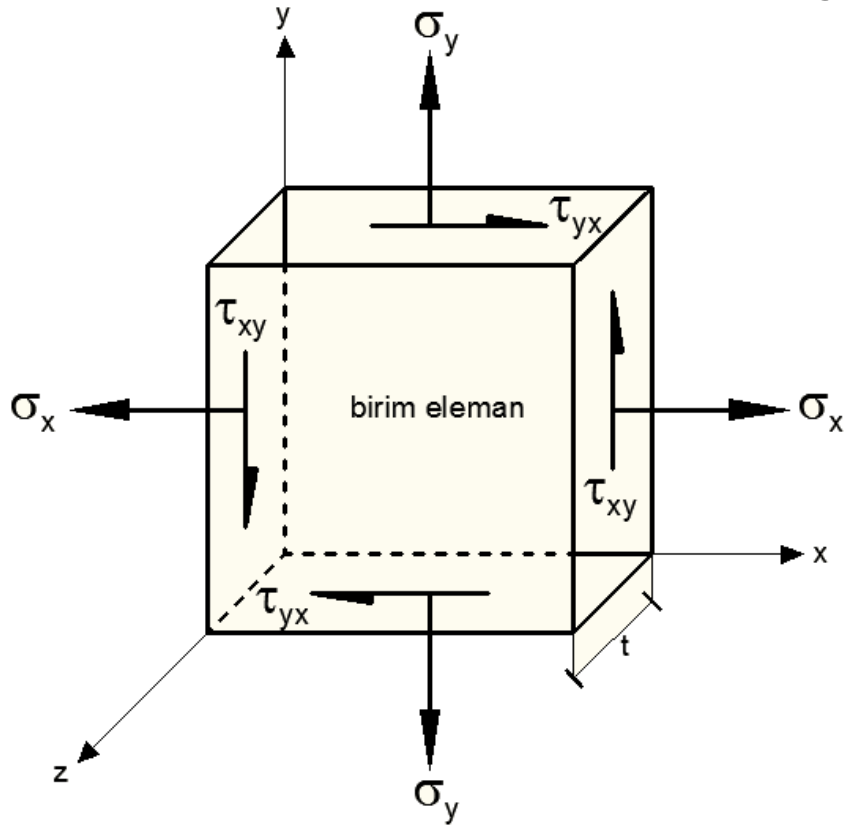
Gerilme Analizi

Dr. Öğr. Üyesi Çiğdem ERSAN

Doç. Dr. Emin ERGUN

Gerilme Analizi

Düzlemde Gerilme Dönüşümü



İzotrop malzemeler için üç boyutlu durumda 6 gerilme bileşenine sahipken iki boyutlu cisimlerde 3 gerilme bileşeni vardır. **Normal gerilme bileşenleri;**

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$$

Kayma gerilme bileşenleri;

$$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$$

İki boyutlu durumda $\sigma_z=0$,

$\tau_{yz} = \tau_{xz}=0$ 'dır.

Gerilme bileşenleri $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

Düzlemde Gerilme Dönüşümü

Mühendislik hesaplamalarında ***statik dengeyi*** koruma şartı ile bu gerilme bileşenlerinin meydana getirdikleri en büyük ve en küçük normal ve kayma gerilmeleri ve bunların etkili oldukları düzlemlerin bilinmesi gerekmektedir. Bunlar bilindiği zaman kolayca kesit tayini yapılabilecektir.

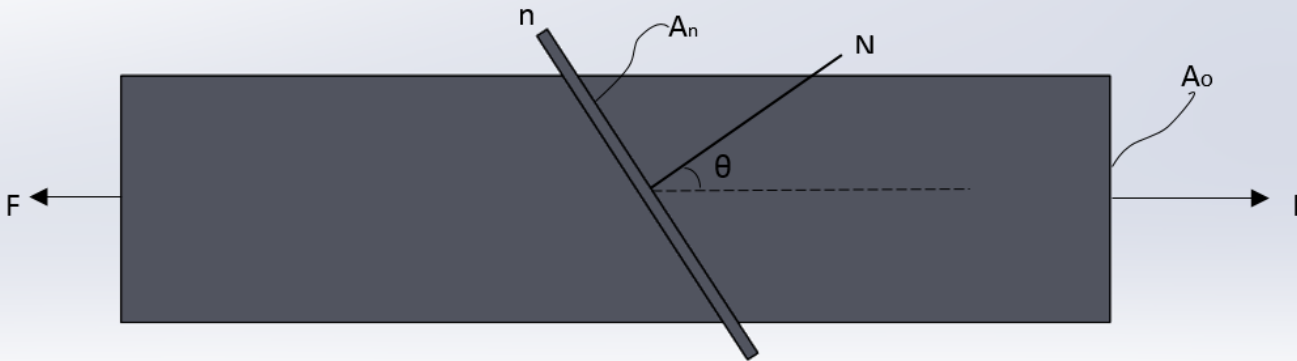
Eğer iki boyutlu bir levha ele alınırsa (kalınlık diğer boyutlarına göre çok küçük) ve bu levha yalnızca x-y düzleminde yüklenmiş ise buna «***düzlem gerilme***» durumu denir.

Eğer üçüncü boyut varsa «***düzlem şekil değiştirme***» durumu geçerlidir. (barajlar, tüneller...)

Her ikisi de iki boyutlu gerilme analizidir.

Gerilme Analizi

Bir Boyutlu Gerilme Analizi



$$\sigma_x = \frac{F}{A_o}$$

Kuvvet yüzeye dik ise normal gerilme oluşur. Eğer dik değilse yüzeyde hem kayma hem de normal gerilme oluşur.

Bir Boyutlu Gerilme Analizi

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \sigma_x \cdot A_o = \sigma' \cdot A_n \rightarrow \sigma' = \boxed{\sigma_x \cdot \frac{A_o}{A_n}}$$

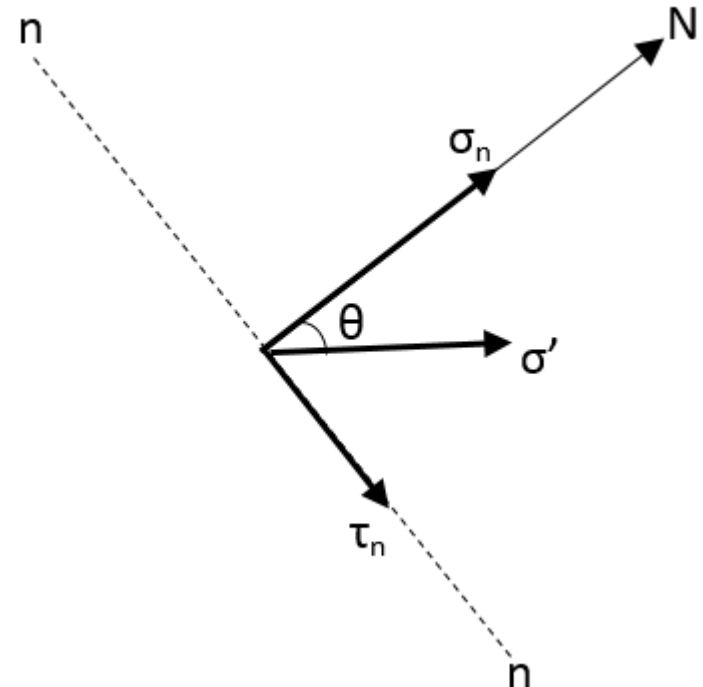
$$\cos \theta = \frac{A_o}{A_n}$$

$$\boxed{\sigma' = \sigma_x \cdot \cos \theta}$$

$$\sigma_n = \sigma^1 \cdot \cos \theta = \sigma_x \cdot \cos \theta \cdot \cos \theta$$

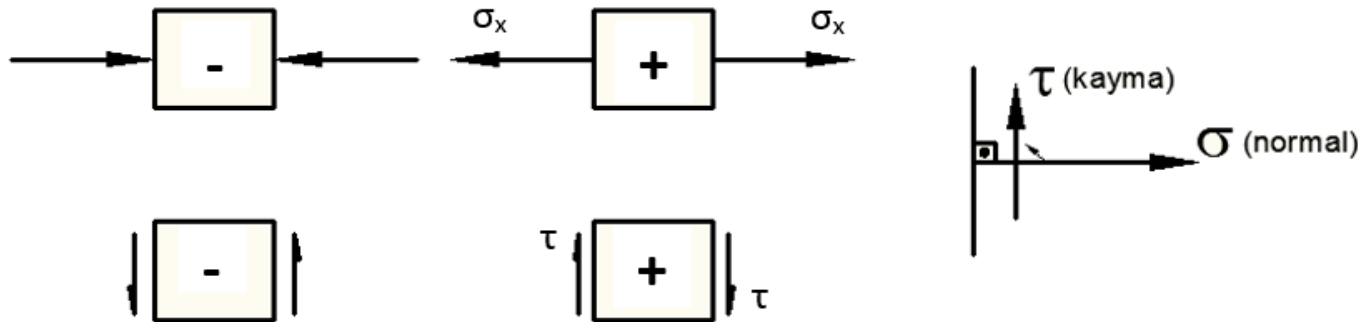
$$\tau_n = \sigma^1 \cdot \sin \theta = \sigma_x \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cdot \cos^2 \theta \\ \tau_n &= \sigma_x \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \end{aligned}}$$



Gerilme Analizi

Bir Boyutlu Gerilme Analizi



Normal gerilmeler çekme ise pozitif, basma ise negatif işaret alır. Kayma gerilmeleri ise eğer eleman bir noktasından sabitlenirse, kayma gerilmesi elemanı saatin dönme yönünde çeviriyorsa pozitif, saatin dönme yönünün tersine çeviriyorsa negatif işaret alır.

!!!!Önemli!!!!

(+) çekme durumu

(-) basınç durumu

Gerilme Analizi

Gerilmeleri θ açısına bağlı olarak en iyi inceleyen bilim adamı **Otto Mohr'dur**. σ_n ve τ_n 'yı 2θ cinsinden ifade edecek olursak;

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2 \theta$$
$$\tau_n = \sigma_x \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\theta) \dots \dots (1)$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_x}{2} \cdot \sin 2\theta \dots \dots \dots (2)$$

$$\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1 \dots \dots \dots (3)$$

1 ve 2'nci denklemlerden **Sin 2 θ** ve **Cos 2 θ** 'ları çeker ve 3 denkleminde yerine yazarsak;

Gerilme Analizi

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_n}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_n}{2}\right)^2 \text{ şeklinde elde ederiz.}$$

σ ve τ aslında, eksen takımında bir çemberi ifade etmektedir. Matematikte bir çemberin denklemi;

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = R^2 \text{ şeklindedir. Burada;}$$

Çemberin merkezi, $M\left(\frac{\sigma_n}{2}, 0\right)$ çemberin yarı çapı, $R\left(\frac{\sigma_n}{2}\right)$ ve merkez koordinatları $M(A,B)$ olan bir çember denklemidir.

Buradaki düzlem Mohr çemberine aktarılırken nokta olduğu için 2θ 'lık açıya dönüşmektedir.

Mohr Çemberi Nasıl Çizilir

- ✓ x ve y 'ye dik düzlemlerdeki gerilme bileşenleri $\sigma - \tau$ koordinat sisteminde sırası ile a ve b noktaları ile gösterilir.
- ✓ a ve b noktaları birleştirilerek çap ve eksenini kestiği noktada çemberin merkezi bulunur.
- ✓ a ve b noktaları çap kabul edilen çember çizilir.
- ✓ Bu çemberin σ eksenini kestiği noktalar asal gerilmeleri verir.
- ✓ Herhangi bir c düzlemindeki gerilmeler, bilinen a düzlemini c düzlemine çakıştırmak için gidilen θ açısının aynı yönünde 2θ gidilerek bulunur.
- ✓ Bu noktanın apsisi düzlemin normal gerilmesini (σ_c) , ordinatı ise kayma gerilmesini (τ_c) verir.

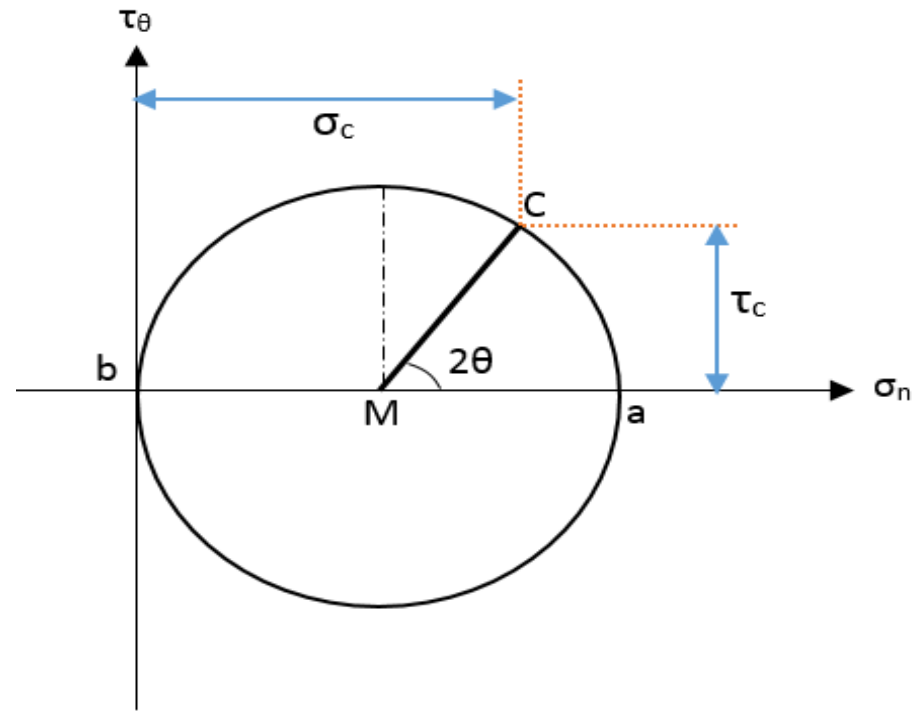
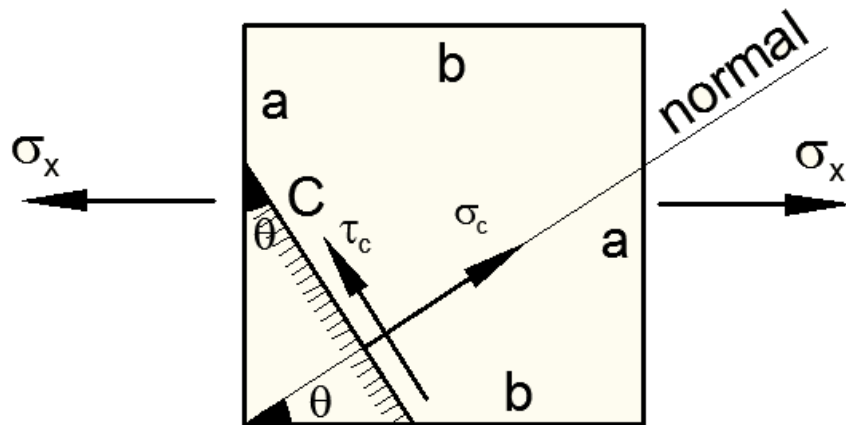
Gerilme Analizi

Tek Eksenli Gerilme Durumu Mohr Çemberi;

Düzlem gerilme elemanından boyutsuz bir elemanı (nokta) ele alındığında gerilme durumu aşağıdaki gibidir.

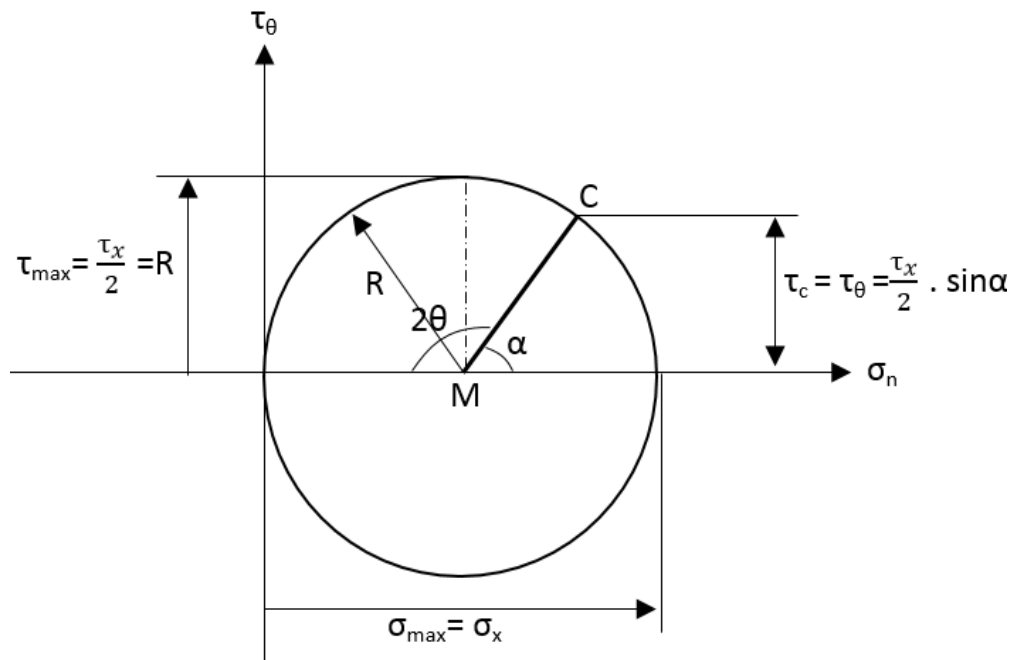
a (σ_x, τ_{xy})

b (σ_y, τ_{xy})



NOT : Analitik çözümde θ düzlemin normal ile yaptığı açıdır.

Gerilme Analizi



$$R = \frac{\sigma_x - 0}{2} = \frac{\sigma_x}{2}, \quad M\left(\frac{\sigma_x}{2}, 0\right), \quad OM = \frac{\sigma_x}{2}$$

$$\sigma_{\max} = \overline{OM} + R = \sigma_x$$

$$\sigma_{\min} = \overline{OM} - R = 0$$

45°'lik düzlemlerde kayma gerilmesi maksimum olur.

C noktasının bulunması;

$$\sigma_c = \sigma_x \cos^2 \theta = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau_c = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta$$

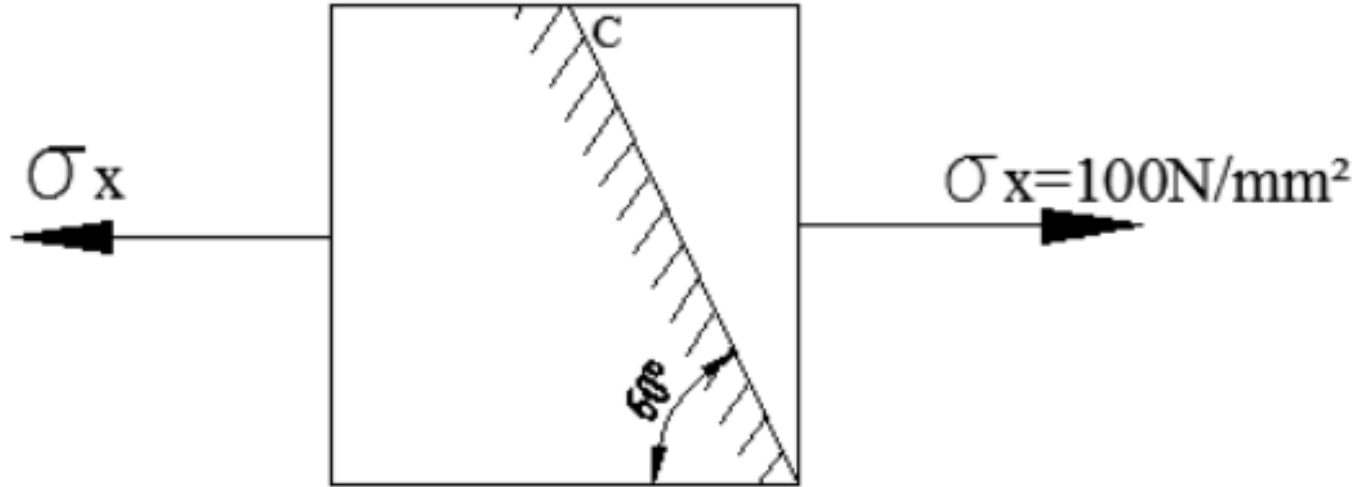
c düzlemi, Mohr çemberinde bir θ açısıyla aynı yönde 2θ kadar gidilerek bulunur. Bu durumda τ_c 'nin maksimum değeri $2\theta=90^\circ$ için bulunur. Demek ki σ_x 'in uygulandığı düzlemde 45° 'lik açı yapan düzlemlerde mutlak değerce maksimum kayma değerleri elde edilir.

$$\tau_{max,min} = \pm \frac{\sigma_x}{2}$$

Soru: Şekildeki gibi gerilmeye maruz bir elemanda

a) Asal gerilmeleri ve düzlemleri gösteriniz.

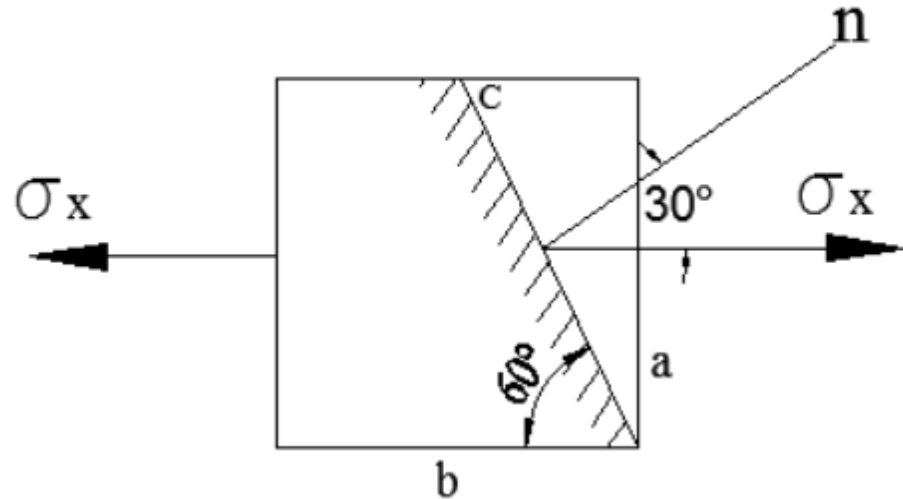
b) Taralı düzlemdeki Normal ve Kayma gerilmelerini hesaplayınız.



Analitik Çözüm

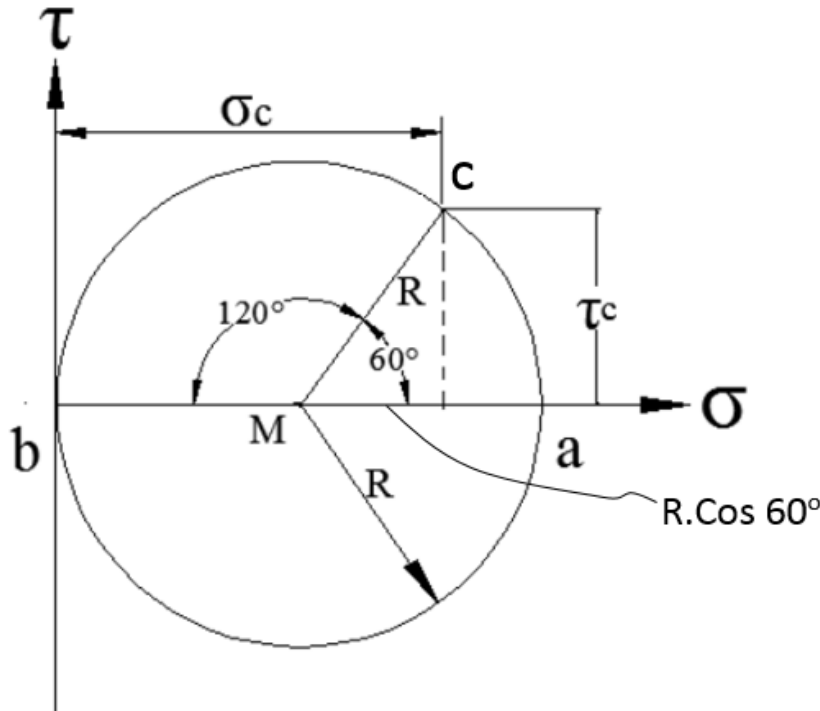
$$\sigma_c = \frac{\sigma_x}{2} \cdot (1 + \cos 2\theta) = \frac{100}{2} \cdot (1 + \cos 60) = 75 \text{ MPa}$$

$$\tau_c = \frac{\sigma_x}{2} \cdot \sin 2\theta = \frac{100}{2} \cdot \sin 60 = 43 \text{ MPa}$$



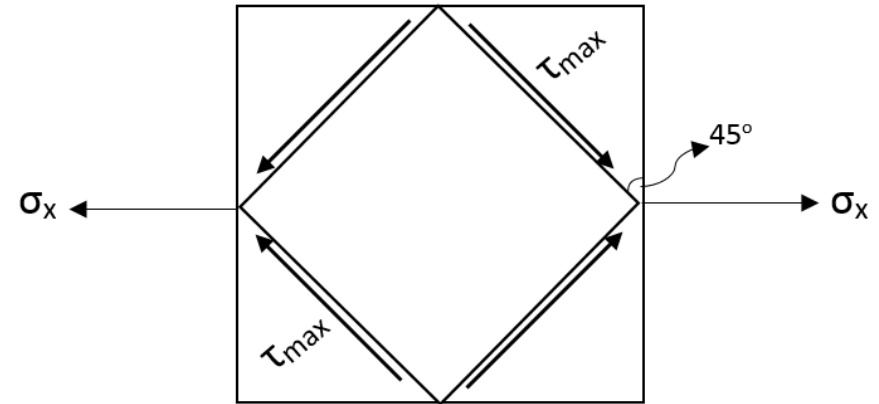
Mohr Çemberi ile çözüm

❖ Analitik çözümde asal gerilme ve düzlemlerini göremiyoruz !!!



$$\sigma_c = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cdot \cos 60^\circ = 75 \text{ MPa}$$

$$\tau_c = \frac{\sigma_x}{2} \cdot \sin 60^\circ = 43,3 \text{ MPa}$$



- ❖ a düzlemi maksimum normal gerilme (asal gerilme) düzlemi olduğu için bu düzlemde kayma gerilmesi 0'dır.
- ❖ a düzlemini 45° yatırırsak maksimum kayma gerilmesi düzlemini buluruz.

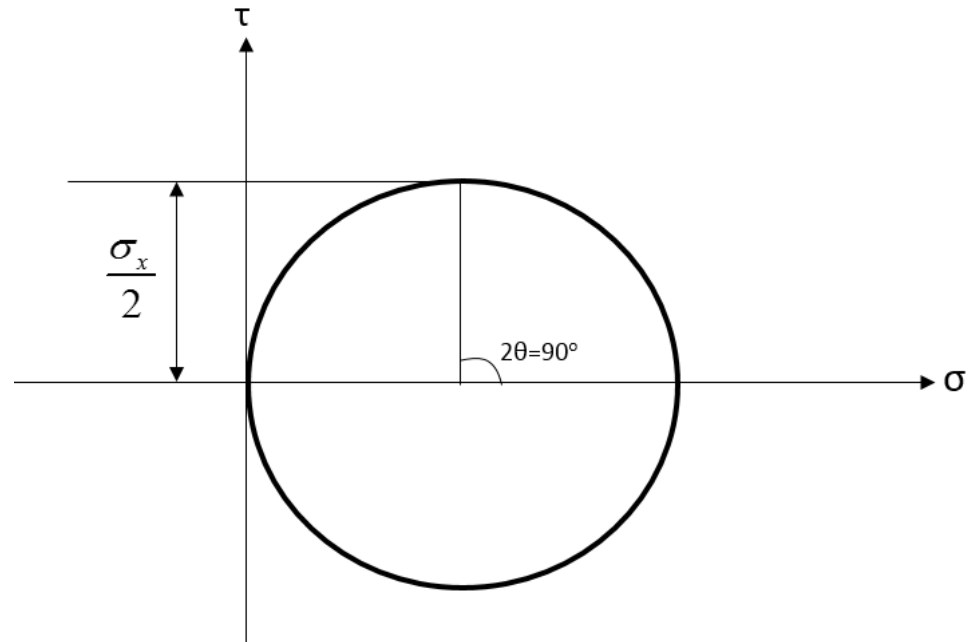
Neden 45 derece ;

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2 \theta$$
$$\tau_n = \sigma_x \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\sigma_x}{2}$$

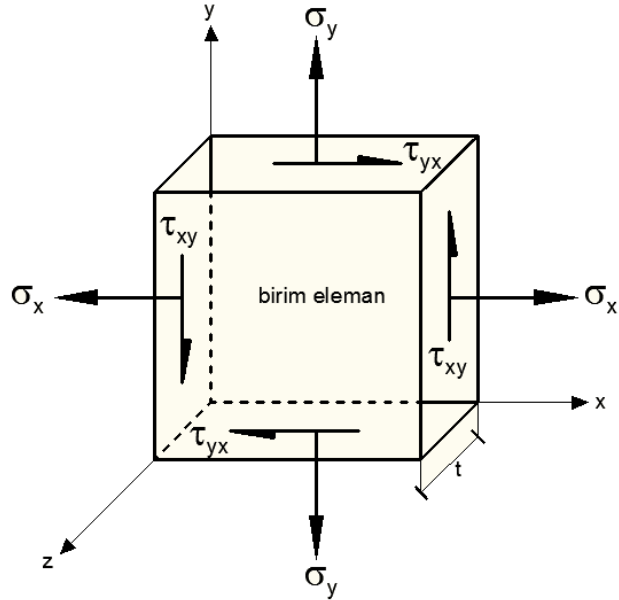
$\theta = 45^\circ$ ise

$$\tau_n = \sigma_x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sigma_x}{2}$$



Gerilme Analizi

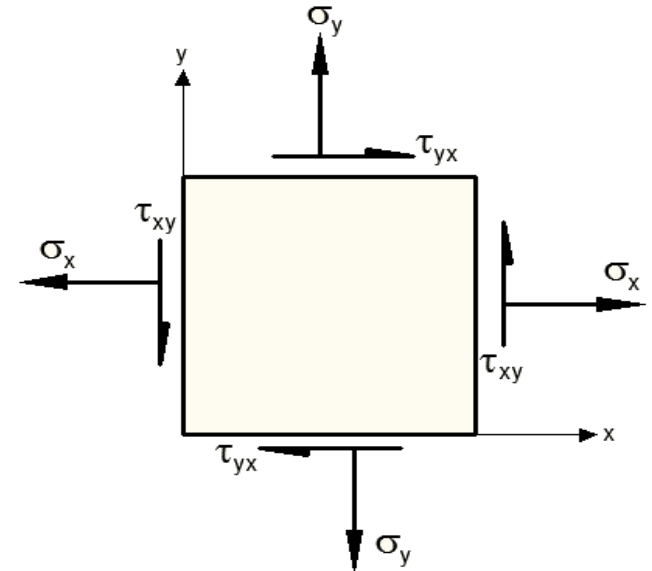
İki Boyutta (Düzlem) Gerilme Dönüşümü



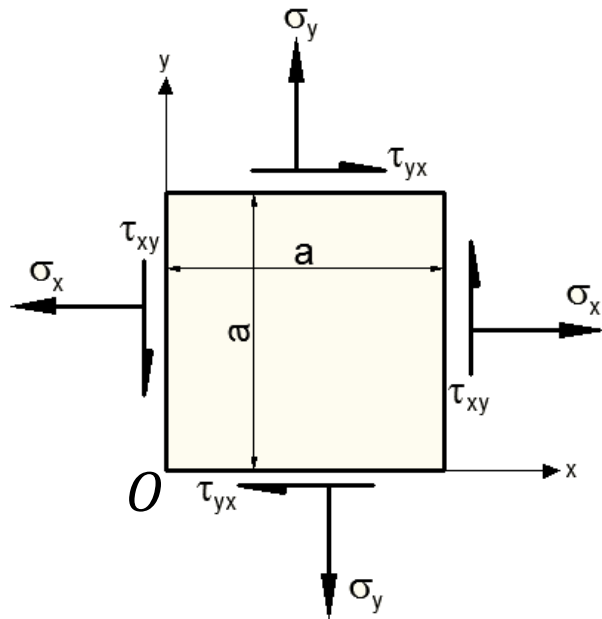
İki boyutlu bir elemandan bir nokta göz önüne alınırsa, sistem statik dengede olduğu için bu nokta da statik dengede olacaktır. Bu boyutsuz elemanda gerilme bileşenlerini yandaki gibi gösterebiliriz.

Hesaplamalarda bu yeni gerilme bileşeni (iki boyutlu, dönüşüm formülleri);

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}$$



Düzlemde Gerilme Dönüşümü



Şekildeki eleman statik yönden;

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

sağlamaktadır. Aynı zamanda herhangi bir noktaya göre moment sıfırdır.

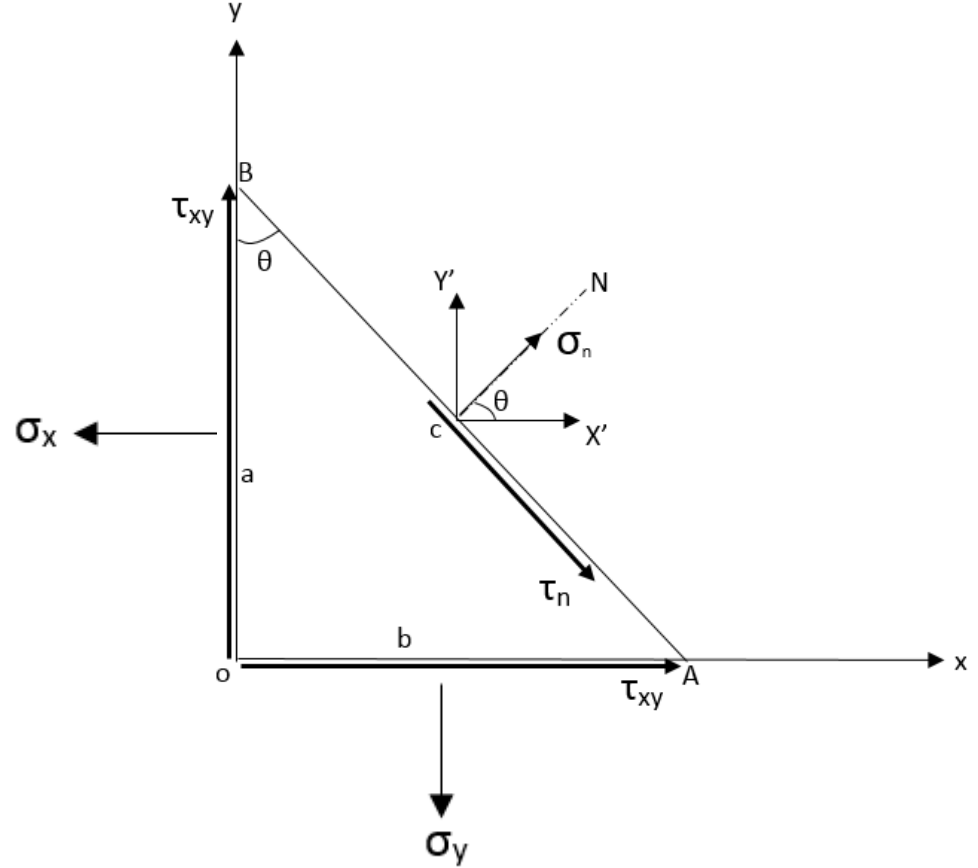
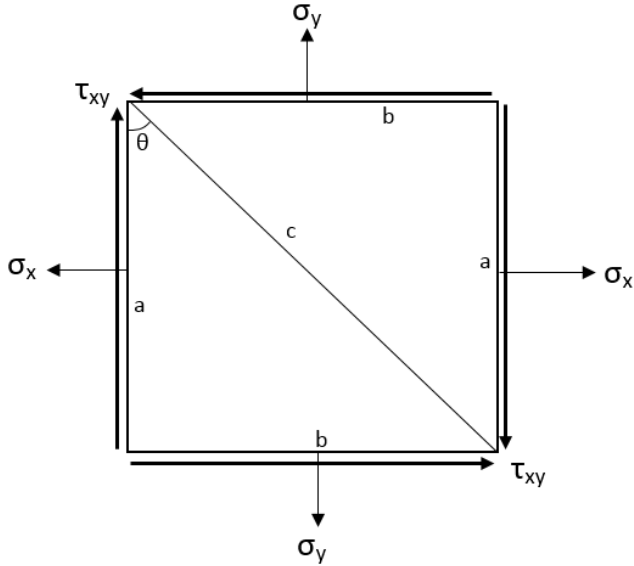
$$\sum M_O = 0 \quad \tau_{xy} \cdot a \cdot t \cdot a - \tau_{yx} \cdot a \cdot t \cdot a = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Sonuç; dik düzlemler üzerinde bulunan kayma bileşenleri eşittir.

Gerilme Analizi

Düzlemde Gerilme Dönüşümü



Bu elemanı dikeyle θ açısı yapan bir düzlemle keselim. Meydana gelen kamada kesilen düzlem üzerinde yeni gerilme bileşenleri meydana gelir. Bunlar; X' ve Y' gerilmeleridir.

Düzlemde Gerilme Dönüşümü

Parça θ düzleminde kesilecek olursa, parça önceki halindeki gibi statik dengede olacaktır. Parçayı statik dengeye x ve y yönünde oluşan kuvvetler getirecektir. Daha sonra N ve θ düzlemlerinde oluşan gerilmeler bulunur.

$$\sum F_x = 0$$

$$X'(c.t) - \sigma_x(a.t) + \tau_{xy}(b.t) = 0$$

$$X' = \sigma_x \cdot \frac{a}{c} - \tau_{xy} \cdot \frac{b}{c}$$

$$X' = \sigma_x \cdot \cos\theta - \tau_{xy} \cdot \sin\theta$$

Sistemi dengeye getiren X' kuvveti

Düzlemde Gerilme Dönüşümü

Parçanın yüzeyi eğik olduğu için N ve θ düzlemlerinde X' ve Y' kuvvetlerinin bu eksenlerde oluşturduğu gerilmeler bulunur.

$$\sum F_y = 0$$

$$Y'(c.t) - \sigma_y(b.t) + \tau_{xy}(a.t) = 0$$

$$Y' = \sigma_y \cdot \frac{b}{c} - \tau_{xy} \cdot \frac{a}{c}$$

$$Y' = \sigma_x \cdot \sin\theta - \tau_{xy} \cdot \cos\theta$$

Sistemi dengeye getiren Y' kuvveti

Düzlemde Gerilme Dönüşümü

$$\sigma_n = X' \cdot \cos\theta + Y' \cdot \sin\theta$$

$$\sigma_n = (\sigma_x \cdot \cos\theta - \tau_{xy} \cdot \sin\theta) \cdot \cos\theta + (\sigma_y \cdot \sin\theta - \tau_{xy} \cdot \cos\theta) \cdot \sin\theta$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2\theta + \sigma_y \cdot \sin^2\theta - 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$$

$$\tau_n = X' \cdot \sin\theta - Y' \cdot \cos\theta$$

$$\tau_n = (\sigma_x \cdot \cos\theta - \tau_{xy} \cdot \sin\theta) \cdot \sin\theta + (\sigma_y \cdot \sin\theta - \tau_{xy} \cdot \cos\theta) \cdot \cos\theta$$

$$\tau_n = (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin\theta \cos\theta + \tau_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

Trigonometrik Bağlıntılar;

$$2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$$

$$2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$$

$$2\sin\theta.\cos\theta = \sin 2\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}$$

Düzlemde Gerilme Dönüşümü

Bu trigonometrik bağıntılar denge denklemlerinde yerine yazılırsa;

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (1)$$

$$\tau_n = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (2)$$

Mohr Çemberi;

İki boyutlu gerilme analizinin değişik metotlarla çözümü vardır. Bunlar içinde, problem çözümünde en etkili olanı «**Mohr Çemberidir**». **(1)** ve **(2)** denklemini **(3)**'de yerine konursa;

$$\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta = 1 \quad \textbf{(3)}$$

ifadesinde yerine konursa şu şekilde bir bağıntı elde edilir,

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{x'y'})^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2$$

Bu bir dairenin denklemi olup merkez koordinatları ve yarıçapı;

$$M \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$$

$$R^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2$$

Asal Gerilmeler;

Mühendislerin ilgisini çeken nokta, bu gerilme bileşenlerinin hasıl ettiği maksimum normal gerilme bileşenlerinin büyüklüğü ve bunların bulunduğu düzlemlerin tayin edilmesidir.

Çünkü bu gerilme bileşenleri ekstrem değerler oldukları için kesitler de buna göre hesapla bulunabilir. Ayrıca bunların bulundukları düzlemler de önemlidir.

Normal gerilmeler θ 'nın fonksiyonu olduğuna göre bunların θ 'ya göre türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse;

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2\sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Asal Gerilmeler;

Bu θ açısı özel olduğundan θ yerine α yazılırsa;

$$\boxed{tg2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}}}$$

Yani, tanjantı yukarıdaki ifadeye eşit α değerleri asal gerilme düzlemlerini belirtmektedir.

$tg2\alpha$ ifadesinden $\sin2\alpha$ ve $\cos2\alpha$ ifadeleri çekilir ve bunlar **(1)** denkleminde $\sin2\theta$ ve $\cos2\theta$ yerine konulursa asal gerilmeler;

$$\sigma_{max,min} = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Asal Gerilmeler;

Bu açısal değer kayma bileşeni ifadesine konursa $\tau_{x'y'} = 0$ elde edilir. Demek ki asal gerilmelerin bulunduğu düzlemlerde *kayma gerilmeleri sıfırdır*. Veya başka bir deyişle ifade edersek *asal gerilme durumu, kayma gerilmesinin sıfır olduğu* konumdur.

Maksimum Kayma Gerilmeleri;

Bu da asal gerilmelere benzer şekilde bulunur;

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = 0$$

yazılarak çözüm yapılırsa ve θ yerine α_1 konularak;

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}}{\tau_{xy}} = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}}$$

$\operatorname{tg} 2\alpha$ ile $\operatorname{tg} 2\alpha_1$ 'in çarpımı -1'i vermektedir. Buradan bunlar arasında **90 derece** açı olduğu ve α ile α_1 düzlemleri arasında da $90/2=45$ derece açı bulunduğu sonucuna varılır.

Maksimum Kayma Gerilmeleri;

Yani asal gerilme düzlemleri ile maksimum kayma düzlemleri arasında **45 derecelik** açı bulunmaktadır. Yine $\text{tg}2\alpha_1$ 'den $\sin\alpha_1$ ve $\cos\alpha_1$ ifadeleri çekilerek **(1)** denkleminde yazılırsa;

$$\tau_{max,min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Bu değerler aynı zamanda asal gerilmeler arasındaki farkın yarısına eşittir.

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

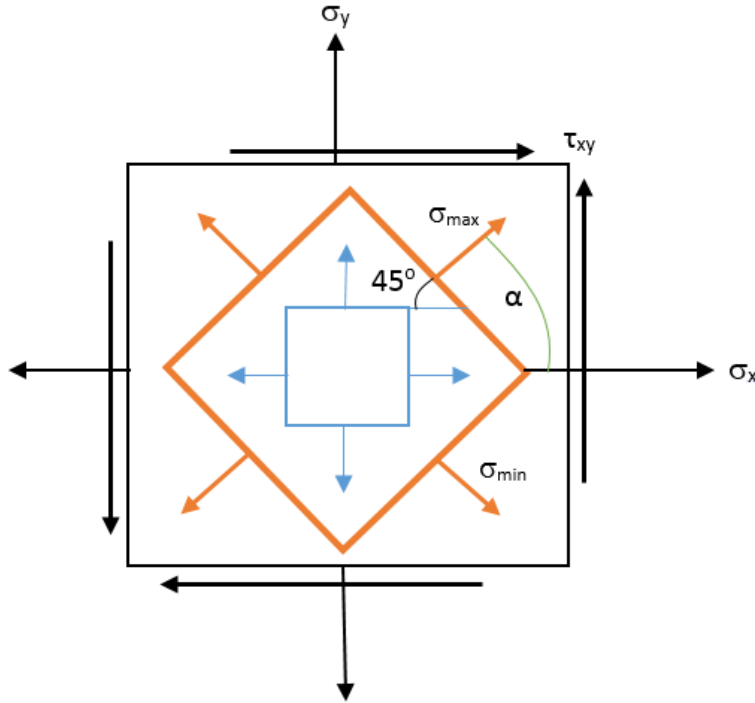
Maksimum Kayma Gerilmeleri;

Kayma gerilmelerinin pozitif veya negatif olmaları malzeme üzerinde fiziksel olarak farklı bir etki meydana getirmemektedirler. Kesit tayininde yalnızca kayma gerilmelerinin ***mutlak değerleri*** önemlidir.

Halbuki çekme ve basma gerilmelerinin malzeme üzerindeki etkileri ve aynı zamanda malzemelerinin bu gerilmeler altındaki mukavemetleri farklıdır.

Gerilme Analizi

Maksimum Kayma Gerilmeleri;

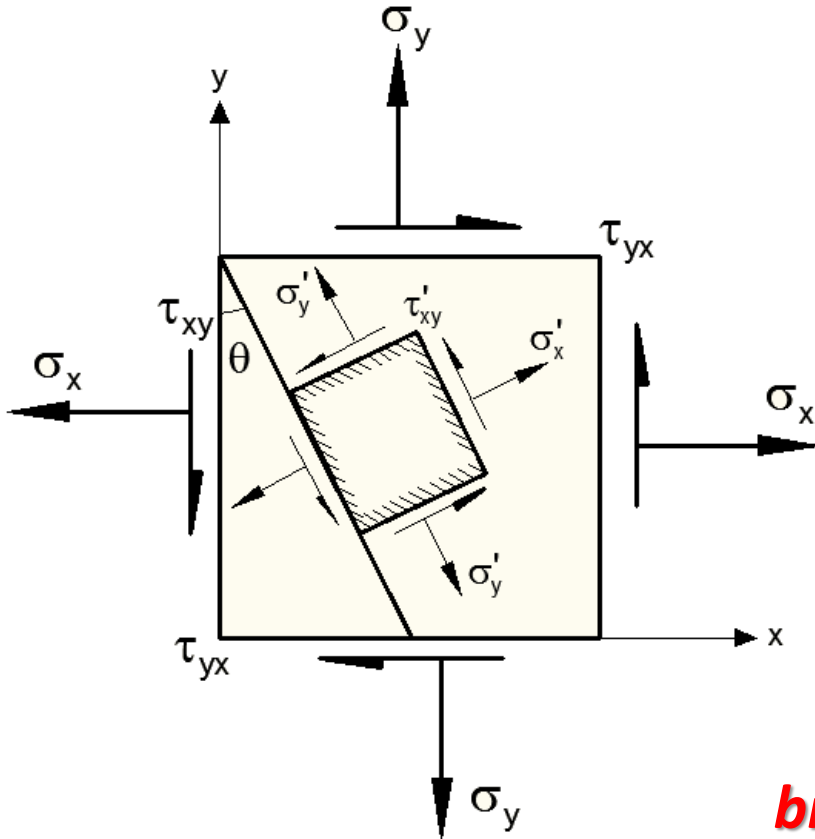


Kesit tayininde genellikle maksimum kayma gerilmeleri asal gerilmelerden daha çok öneme sahiptir. Çünkü deneylerden görülmektedir ki bilhassa sünek malzemeler, normal gerilmelere nazaran daha küçük kayma gerilmelerinde akmaktadır. Asal gerilmelerin bulunduğu düzlemlerde kayma gerilmeleri sıfır olmasına rağmen, kayma

gerilmelerinin maksimum olduğu düzlemlerde normal gerilme bulunmaktadır; bunun da değeri $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ 'ye eşittir.

Gerilme Analizi

Düzlemde Gerilme Dönüşümü



Şekilde görülen prizmatik elemandaki gerilme bileşenleri birbirlerine denktir. Statik denge şartları korunduğu için istenirse dışarıda bulunan prizmatik eleman yerine;

$$\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \tau_{x'y'}$$

ile gösterilen içerideki prizmatik eleman kullanılabilir. Normal gerilme bileşeni kullanılırsa;

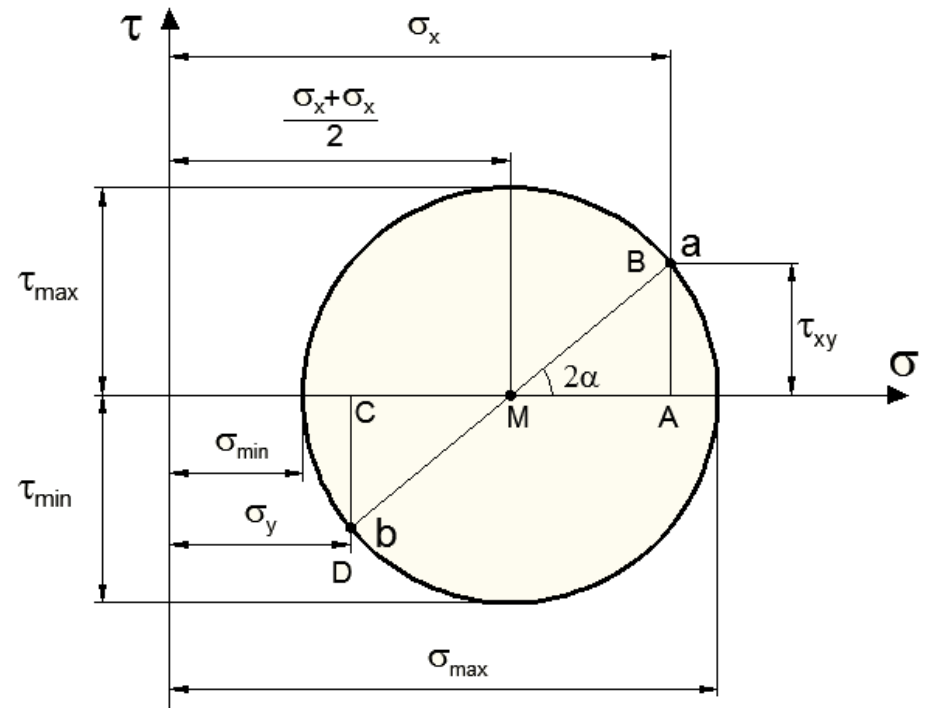
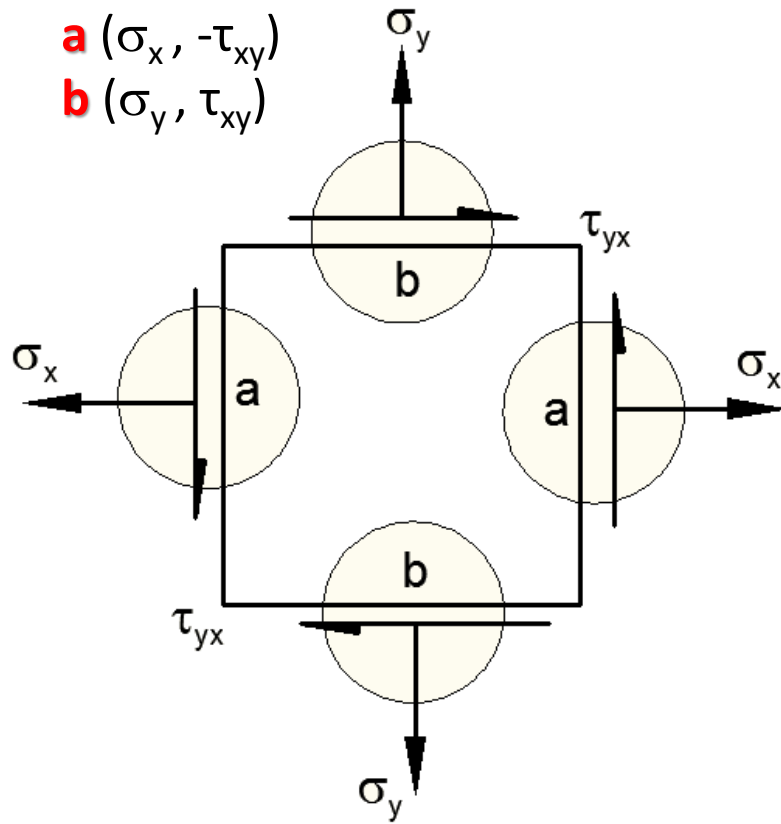
birinci invariant

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

Yani, her yeni konumda normal gerilme bileşenleri toplamı, ilk konumdaki toplama eşittir ve *değişmez*.

Gerilme Analizi

Mohr Çemberi;



Gerilme Analizi

Mohr Çemberi;

Normal ve kayma gerilme bileşenleri bir çember üzerinde bulunurlar. Diğer bir ifade ile bunların geometrik yerleri bir çemberdir.

Burada;

$$MA = MC = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

MAB üçgeninden,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}}$$

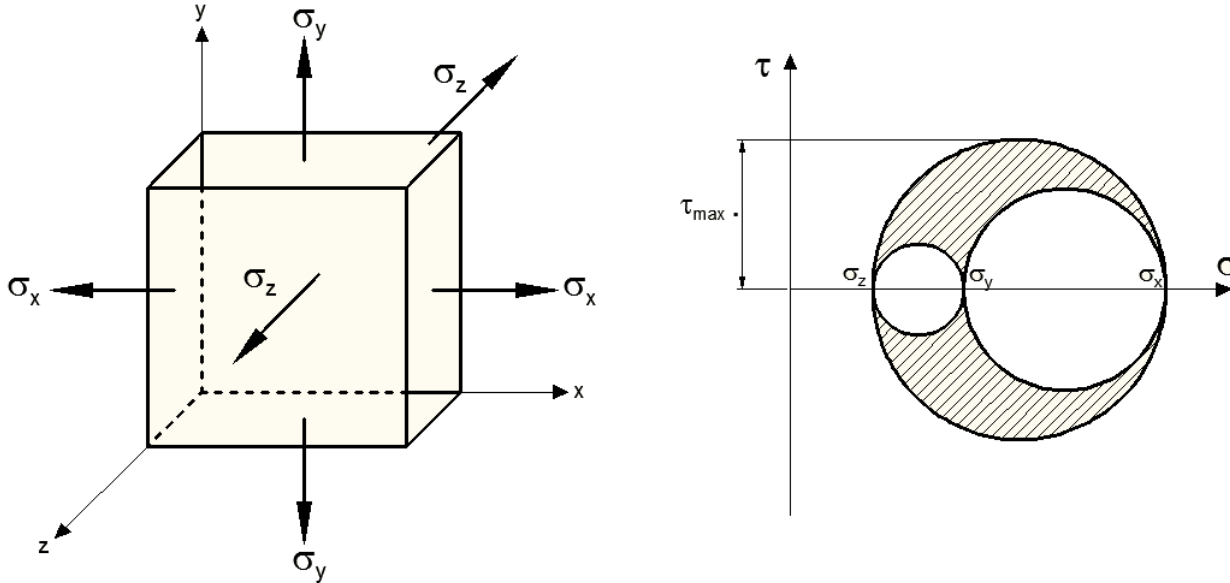
α açısı asal gerilme düzlemini vermektedir. Mohr çemberi üzerindeki açısal pozisyonlar gerçek şekildeki açısal değer **iki katıdır ve ters yöndedir**. Buradan asal gerilmeler;

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm r$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$\tau_{max,min} = \pm r$$

Üç Eksenli Gerilme Durumu Mohr Çemberi;



Eğer yalnızca normal gerilmeler varsa ve cebirsel değere sahipse, bunların aralarındaki uzaklıkları çap kabul eden çemberler elde edilir. Ve dördüncü düzlemdeki gerilmeler taralı bölgeye düşer. En büyük kayma gerilmesi en büyük normal gerilme ile en küçük normal gerilme arasındaki farka eşittir.

Üç Eksenli Gerilme Durumu Mohr Çemberi;

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

En büyük kayma gerilmesi, özellikle kaymaya karşı zayıf olan malzemelerin boyutlandırılmasında kullanılır. Eğer hidrostatik basınç hali olursa;

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$$

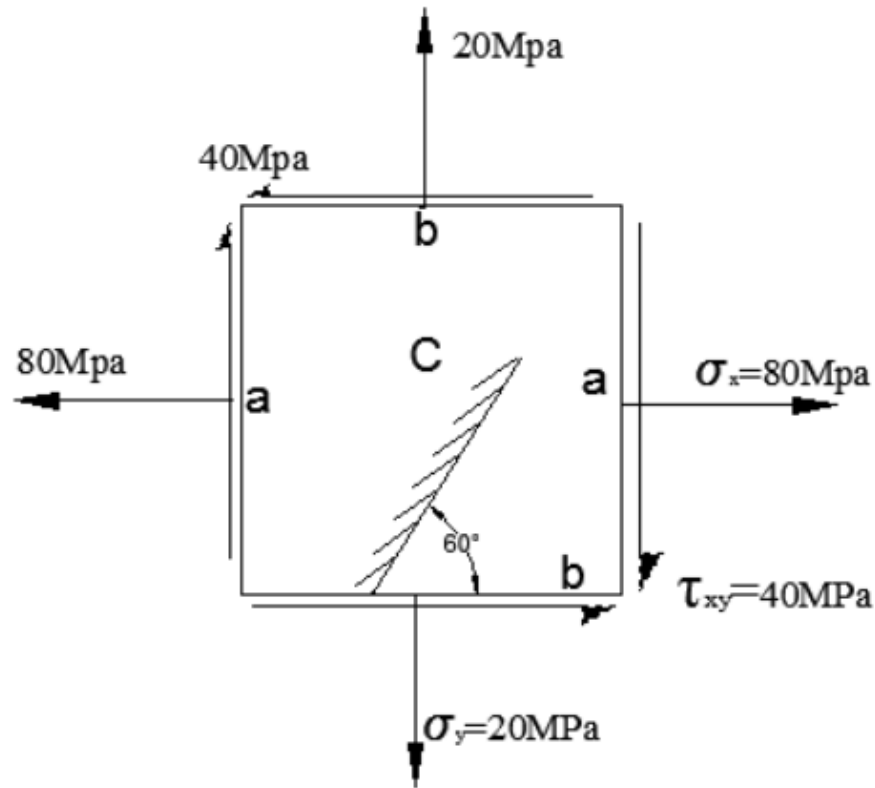
Bu durumda Mohr çemberi bir noktadır ve $\tau_{max}=0$ elde edilir.

Bunu kim çizebilir?

SORU ÇÖZÜMÜ

Örnek : Şekildeki gerilme durumu verilen elemanda ;

- Asal gerilmeleri ve düzlemleri bulunuz.
- Taralı düzlemdeki normal ve kayma gerilmelerini bulunuz.
- Maksimum kayma gerilmelerini ve düzlemlerini bulunuz.



Çözüm :

$$a) \quad \overline{OM} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{80 + 20}{2} = 50 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{80 - 20}{2}\right)^2 + 40^2} = 50 \text{ MPa}$$

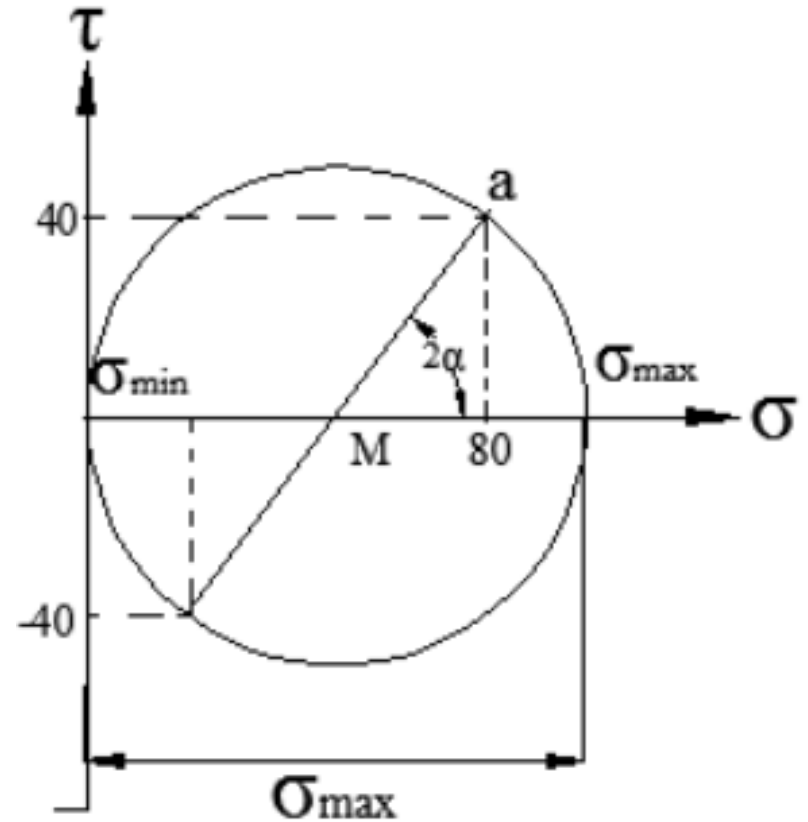
$$\sigma_{\max} = \overline{OM} + R = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \overline{OM} - R = 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max, \min} = \pm R = \pm 50 \text{ MPa}$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{80}{60}$$

$$\alpha = 26,5^\circ$$



Analitik Çözüm :

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\max} = 50 + 50 = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = 50 - 50 = 0 \text{ MPa}$$

b)

$$\sigma_c = \overline{OM} + R.\cos 7^\circ = 99,6 \text{ MPa}$$

$$\tau_c = -R.\sin 7^\circ = -6 \text{ MPa}$$

Analitik olarak :

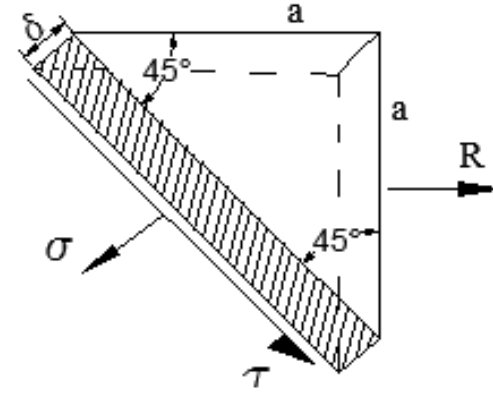
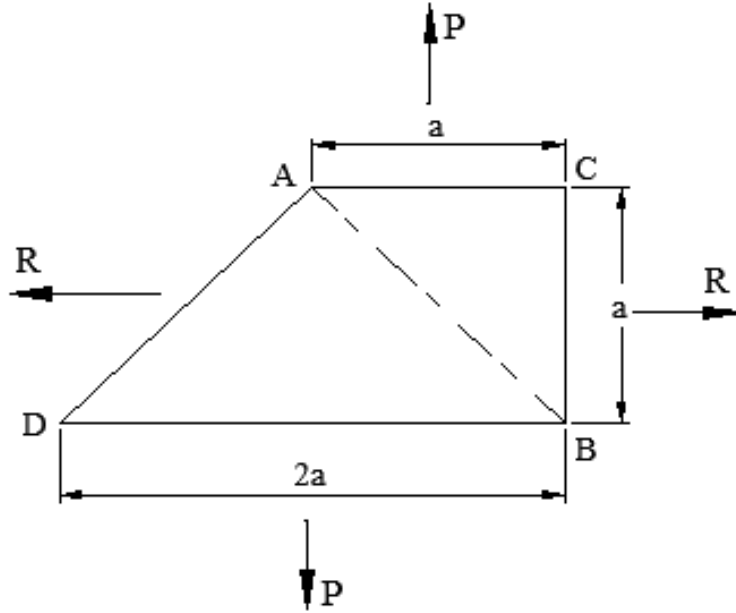
$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cdot \cos 2\theta - \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

$$\theta = 150^\circ \Rightarrow 2\theta = 300^\circ$$

$$\sigma_c = \frac{80 + 20}{2} + \left(\frac{80 - 20}{2} \right) \cdot \cos 300 - 40 \cdot \sin 300 = 99,6 \text{ MPa}$$

$$\tau_c = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cdot \sin 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta = -5,78 \text{ MPa}$$

Örnek : Şekilde görülen ve kalınlığı δ olan bir prizma P ve R kuvvetleri altında dengededir. Bu kuvvetlerden meydana gelen gerilmeleri üniform kabul ederek AB köşegen düzleminde meydana gelen normal ve kayma gerilmelerini hesaplayınız.



Çözüm :

$$|AB| = \sqrt{2}a$$

$$\sum F_n = 0$$

$$\sigma \cdot \sqrt{2} \cdot a \cdot \delta - R \cdot \cos 45 - P \cdot \cos 45 = 0$$

$$\sigma = \frac{P + R}{2 \cdot a \cdot \delta}$$

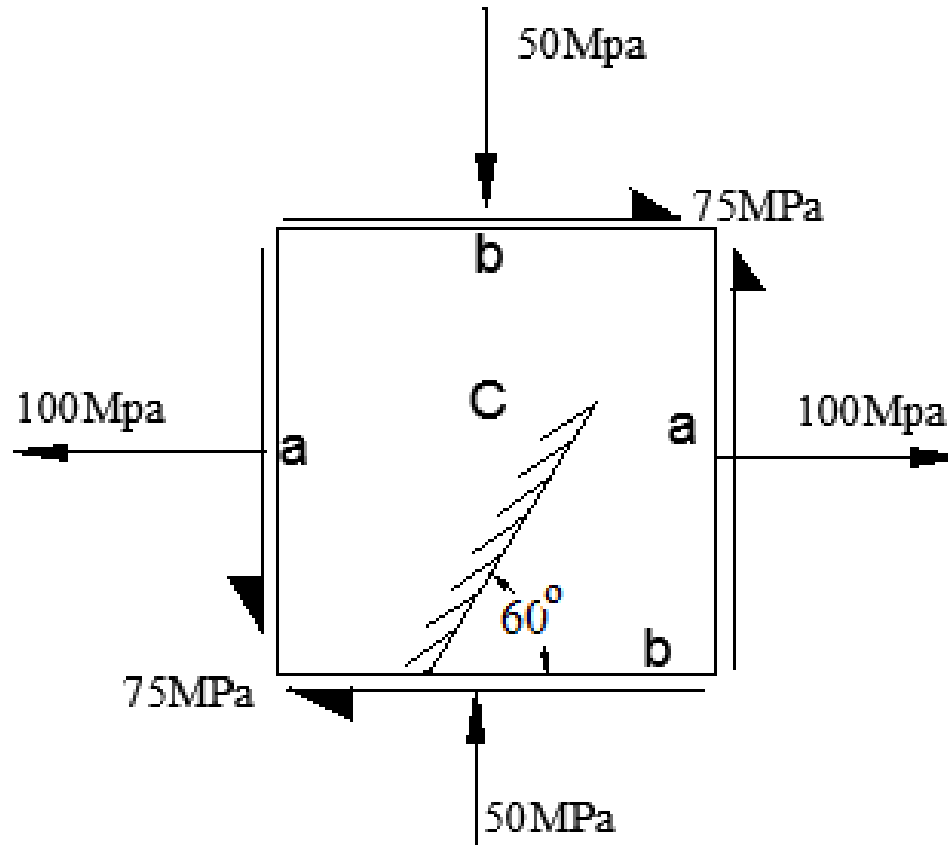
$$\sum F_t = 0$$

$$\tau \cdot \sqrt{2} \cdot a \cdot \delta + R \cdot \cos 45 - P \cdot \sin 45 = 0$$

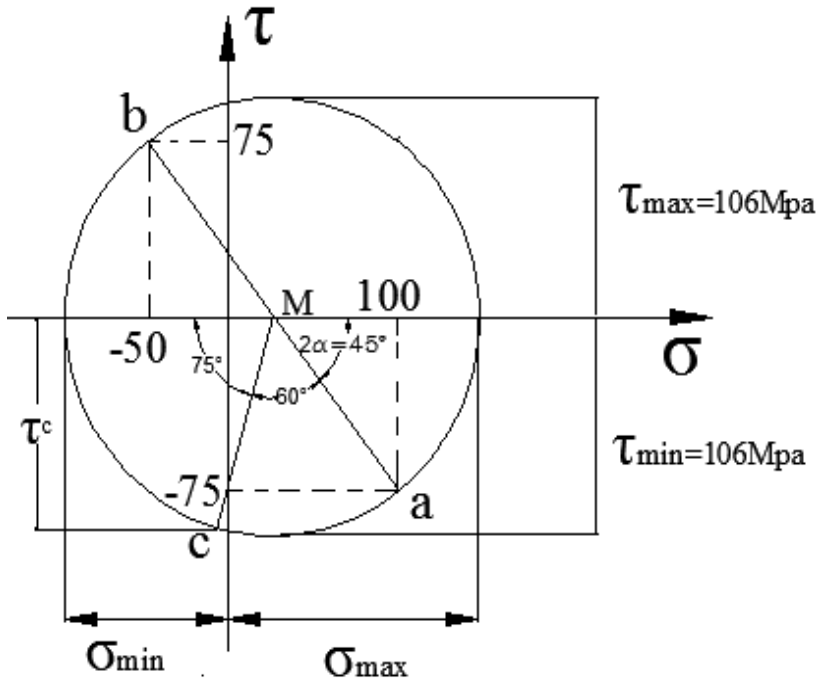
$$\tau = \frac{P - R}{2 \cdot a \cdot \delta}$$

Örnek : Şekilde verilen elemanda ;

- Asal gerilme ve düzlemlerini,
- Taralı düzlemdeki normal ve kayma gerilmelerini,
- Maksimum kayma gerilmelerini ve düzlemlerini bulunuz.



Çözüm :



$$\overline{OM} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{100 - 50}{2} = 25 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{100 - (-50)}{2}\right)^2 + 75^2} = \sqrt{75^2 + 75^2} = 106 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = \overline{OM} + R = 25 + 106 = 131 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = \overline{OM} - R = 25 - 106 = -81 \text{ MPa}$$

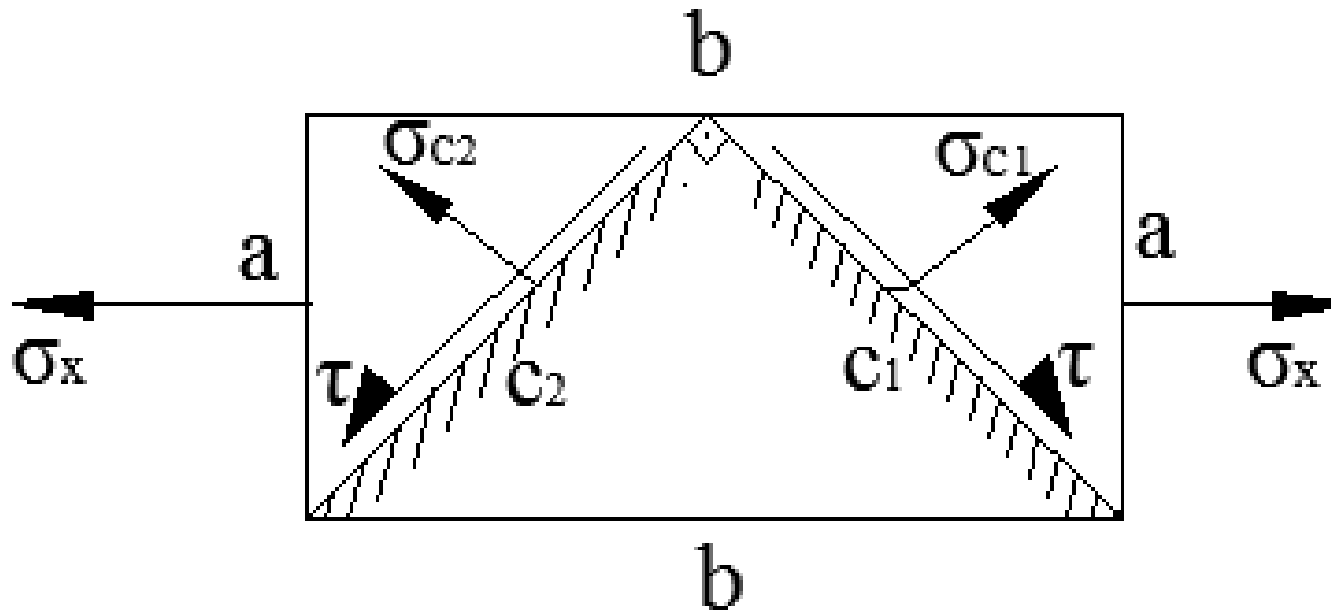
$$\tau_{\max/\min} = \pm R = \pm 106 \text{ MPa}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{-2.75}{100 - (-50)} = -1 \Rightarrow \alpha = 22,5^\circ$$

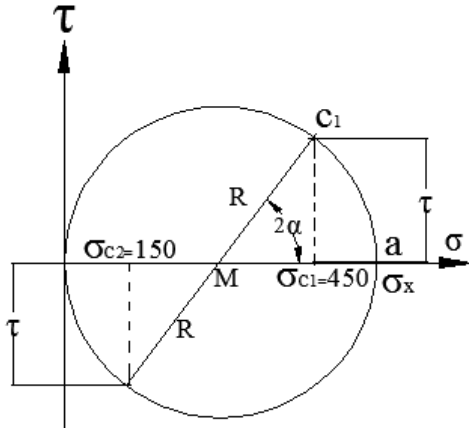
$$\sigma_c = \overline{OM} - R \cdot \cos 75^\circ = 25 - 106 \cdot \cos 75^\circ = -2,4 \text{ MPa}$$

$$\tau_c = -R \cdot \sin 75^\circ = -106 \cdot \sin 75^\circ = -102,4 \text{ MPa}$$

Örnek : Şekilde verilen elemanda birbirine dik taralı düzlemdeki $\sigma_{c1} = 450MPa$ ve $\sigma_{c2} = 150MPa$ olduğuna göre σ_x , τ ve θ_y bulunuz.



Çözüm :



$$\overline{OM} = \frac{\sigma_x + 0}{2} = \frac{\sigma_x}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - 0}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_x}{2}$$

$$\sigma_{c1} = \overline{OM} + R \cdot \cos 2\theta$$

$$\sigma_{c2} = \overline{OM} - R \cdot \cos 2\theta$$

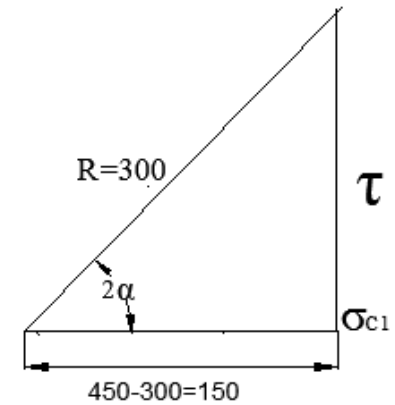
$$\sigma_{c1} + \sigma_{c2} = \sigma_x$$

$$\sigma_x = 600 \text{ MPa}$$

$$R = \frac{\sigma_x}{2} = 300$$

$$\cos 2\theta = \frac{150}{300} \Rightarrow 2\theta = 60$$

$$\theta = 30^\circ$$



$$\sin 2\theta = \frac{\tau}{300}$$

$$\tau = 259,8 \text{ MPa}$$

BÖLÜM BİTTİ