NO: ..... İSİM SOYİSİM: .....

FIZ 345 OPTOELEKTRRONİK FİNAL SINAVI

2025 – 2026 Bahar, Fizik Bölümü, Pamukkale Üniversitesi, Denizli

Bilgi: İletken lineer homojen izotropik ortam $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ ve $\vec{B} = \mu\vec{H}$ bağıntılarıyla tarif edilir ki burada ortamın elektrik geçirgenliği ϵ ve manyetik geçirgenliği μ birer sabittir. Bu ortamda Maxwell denklemleri aşağıdaki gibi yazılır. σ ortamın öziletkenliğidir.

i)	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$	Gauss	*iii)*	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}$	Faraday
ii)	$\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$	Anonim	*iv)*	$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \epsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \sigma\vec{E}$	Ampere-Maxwell

Soru 1: (*25P*) Yazdığınız denklemleri iç içe kullanarak $\vec{E}$ ve $\vec{H}$ için birer dalga denklemi elde ediniz. *İpucu:* $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = -\nabla^2\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)$ özdeşliğini kullanabilirsiniz. [ÖK 1, ÖK 2]

Soru 2: (*25P*) Elde ettiğiniz dalga denklemlerine aşağıdaki gibi pozitif z-yönünde ilerleyen düzlem dalga çözümlerini yerleştiriniz.

$$\vec{E}(z,t) = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(Kz-\omega t)} \quad \text{ve} \quad \vec{H}(z,t) = \vec{\mathcal{H}}_0 e^{i(Kz-\omega t)}$$

burada $\vec{\mathcal{E}}_0$ ile $\vec{\mathcal{H}}_0$ sabit kompleks vektörlerdir. Böylece, $K = k + i\kappa$ kompleks dalga sayısını $\omega, \epsilon, \mu, \sigma$ cinsinden yazınız. Bulduğunuz bağıntı yardımıyla $\mathcal{N} = c/v = cK/\omega$ yazarak, ortamın kırıcılık indisini, $n := \mathrm{Re}[\mathcal{N}]$, ve soğurma (azaltma) indisini, $\alpha := \mathrm{Im}[\mathcal{N}]$, belirleyiniz. [ÖK 3]

Soru 3: (*25P*) Şimdi, E_0, H_0, δ_E, δ_H ve ϕ birer reel sabit olmak üzere $\vec{\mathcal{E}}_0 = E_0 e^{i\delta_E}\hat{x}$ ve $\vec{\mathcal{H}}_0 = H_0 e^{i\delta_H}\hat{y}$ ve $K = |K|e^{i\phi}$ yazarak düzlem dalga çözümünü Maxwell denklemlerine ayrı ayrı yerleştiriniz. Böylece $\delta_H - \delta_E =?$ ve $H_0/E_0 =?$ hesaplayınız. [ÖK 3]

Soru 4: (*25P*) Poynting vektörünü $\vec{S} = \vec{E}^* \times \vec{H}$ hesap ediniz ve sonuç hakkında fiziksel yorumlar yazınız. [ÖK 4]

BAŞARILAR ... 04.06.2026 Saat: 09.00 (90 dk) Prof.Dr. Muzaffer ADAK

Çözüm 1: Önce elektrik alan için dalga denklemini elde edelim. Faraday yasasının rotasyoneli hesaplanır.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} \right)$$

Sağ tarafta Ampere-Maxwell yasası ve ortam sabitlerinin zamandan bağımsız olması kullanılır.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Sol tarafta verilen vektör özdeşliği ve Gauss yasası birlikte kullanılır. Sonuç olarak elektrik alan için dalga denklemine ulaşılır.

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0}$$

Şimdi manyetik alan şiddeti için dalga denklemini elde edelim. Ampere-Maxwell yasasının rotasyoneli hesaplanır.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) + \sigma \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right)$$

Sağ tarafta Faraday yasası ve ortam sabitlerinin zamandan bağımsız olması kullanılır.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Sol tarafta verilen vektör özdeşliği ve anonim yasa birlikte kullanılır. Sonuç olarak manyetik alan için dalga denklemine ulaşılır.

$$\boxed{\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0}$$

Çözüm 2: Verilenlere göre önce şu iki terim hesaplanır.

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -K^2 \vec{E} \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

Bunlar dalga denklemine yerleştirilirse aşağıdaki bağıntıya ulaşılır.

$$K^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

Aynı bağıntı $\vec{H}$ alanı için de bulunur. Böylece kompleks dalga sayısı hesaplanır.

$$\boxed{K = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \left(1 + i \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^{1/2}}$$

Şimdi $K = k + i\kappa$ yazalım ve karesini alalım.

$$K^2 = (k + i\kappa)^2 = k^2 - \kappa^2 + 2ik\kappa$$

Bunu yukarıdaki K^2 bağıntısıyla karşılaştırarak gerçek ve sanal kısımlar elde edilir.

$$k^2 - \kappa^2 = \mu\epsilon\omega^2 \qquad \text{ve} \qquad 2k\kappa = \mu\sigma\omega$$

İki denklemden iki bilinmeyen hesaplanır. Bu hesap esnasında aşağıdaki eşitliği kullanmak işleri kolaylaştırır.

$$(k^2+\kappa^2)^2 = (k^2-\kappa^2)^2 + (2k\kappa)^2 \qquad \Rightarrow \qquad k^2+\kappa^2 = \mu\epsilon\omega^2\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}$$

Böylece, şunları elde ederiz.

$$k^2 = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}+1\right] \quad \text{ve} \quad \kappa^2 = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}-1\right]$$

Pozitif z-ekseni yönünde ilerleyen ve soğurulan dalga için $k>0$, $\kappa>0$ alınır. Dolayısıyla şunlar elde edilir.

$$\boxed{k = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}+1\right]^{1/2}} \quad \text{ve} \quad \boxed{\kappa = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}-1\right]^{1/2}}$$

Kompleks kırıcılık indisi şöyle tanımlanır.

$$\mathcal{N} = \frac{c}{v} = \frac{cK}{\omega} = \frac{c}{\omega}(k+i\kappa)$$

Buna göre, yukarıdaki k ve κ ifadeleri kullanılırsa, kırıcılık indisi ve soğurma indisi hesaplanır.

$$\boxed{n := \mathrm{Re}[\mathcal{N}] = \frac{ck}{\omega} = c\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}+1\right]^{1/2}}$$

$$\boxed{\alpha := \mathrm{Im}[\mathcal{N}] = \frac{c\kappa}{\omega} = c\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}-1\right]^{1/2}}$$

Buna göre, dalganın uzay-zaman bağımlılığı

$$e^{i(Kz-\omega t)} = e^{i(kz-\omega t)}e^{-\kappa z}$$

olduğundan $\kappa = \alpha\omega/c > 0$ ortam içinde genliğin azalmasını temsil eder. Ayrıca, $\sigma = 0$ olduğunda $\kappa = \alpha = 0$ olduğuna dikkat edelim.

Çözüm 3: Verilenleri Faraday yasasında kullanalım.

$$|K|E_0 e^{i(\delta_E+\phi)} = \mu\omega H_0 e^{i\delta_H}$$

Genlik ve faz ayrı ayrı eşitlenirse iki bağıntı elde edilir.

$$\boxed{\frac{H_0}{E_0} = \frac{|K|}{\mu\omega}} \qquad \text{ve} \qquad \boxed{\delta_H - \delta_E = \phi}$$

Aynı sonuç Ampere-Maxwell denkleminden de kontrol edilebilir.

$$K = k + i\kappa \quad \Rightarrow \quad |K| = \sqrt{k^2 + \kappa^2} = \left[\mu\omega\sqrt{\epsilon^2\omega^2 + \sigma^2}\right]^{1/2} \quad \text{ve} \quad \phi = \frac{\kappa}{k} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)$$

Çözüm 4: Bulduğumuz sonuçları açıkça yazalım.

$$\vec{E} = E_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz-\omega t+\delta_E)}\hat{x} \quad \text{ve} \quad \vec{H} = H_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz-\omega t+\delta_H)}\hat{y} \quad \text{ve} \quad \vec{E}^* = E_0 e^{-\kappa z} e^{-i(kz-\omega t+\delta_E)}\hat{x}$$

Şimdi kompleks Poynting vektörünü, $\vec{S} = \vec{E}^* \times \vec{H}$, hesaplayalım.

$$\vec{S} = E_0 H_0 e^{-2\kappa z} e^{-i(kz-\omega t+\delta_E)} e^{i(kz-\omega t+\delta_H)}\hat{x} \times \hat{y} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{S} = E_0 H_0 e^{-2\kappa z} e^{i\phi}\hat{z}}$$

Ayrıca $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ olduğundan kompleks Poyting vektörü şöyle olur.

$$\vec{S} = E_0 H_0 e^{-2\kappa z}\left(\cos\phi + i\sin\phi\right)\hat{z}$$

Buradan reel ve sanal kısımlar ayrıca yazılabilir.

$$\boxed{\mathrm{Re}[\vec{S}] = E_0 H_0 e^{-2\kappa z}\cos\phi\,\hat{z}} \quad \text{ve} \quad \boxed{\mathrm{Im}[\vec{S}] = E_0 H_0 e^{-2\kappa z}\sin\phi\,\hat{z}}$$

Burada $H_0/E_0 = |K|/\mu\omega$ kullanılırsa, gerçek enerji akısı şöyle olur.

$$\mathrm{Re}[\vec{S}] = E_0^2 \frac{|K|}{\mu\omega} e^{-2\kappa z}\cos\phi\,\hat{z}$$

Şimdi $K = |K|e^{i\phi} = k + i\kappa$ ve buradan $k = |K|\cos\phi$ ve $\kappa = |K|\sin\phi$ yazılabilir. Böylece şunu yazabiliriz.

$$\frac{|K|}{\mu\omega}\cos\phi = \frac{k}{\mu\omega}$$

Sonuçta, aşağıdakileri elde ediz.

$$\boxed{\mathrm{Re}[\vec{S}] = \frac{k}{\mu\omega}E_0^2 e^{-2\kappa z}\hat{z}} \qquad \text{ve} \qquad \boxed{\mathrm{Im}[\vec{S}] = \frac{\kappa}{\mu\omega}E_0^2 e^{-2\kappa z}\hat{z}}$$

Fiziksel yorum: Gerçek kısım $\mathrm{Re}[\vec{S}]$ ortalama enerji akısının yönünü ve büyüklüğünü verir. Burada $\mathrm{Re}[\vec{S}] \parallel \hat{z}$ olduğundan elektromanyetik enerji pozitif z-yönünde taşınır. Ancak genlikler ortam içinde $e^{-\kappa z}$ ile azaldığı için enerji akısı $e^{-2\kappa z}$ ile azalır. Bunun nedeni, iletken ortamda elektromanyetik enerjinin Joule ısısına dönüşmesidir.

Sanal kısım $\mathrm{Im}[\vec{S}]$ ise alanların faz farkından kaynaklanan reaktif enerji akısını temsil eder. Bu kısım, elektrik ve manyetik alanlar arasında ileri-geri depolanan enerjiyi gösterir. Kayıpsız ortamda $\sigma = 0$ olursa, $\kappa = 0$ ve $\phi = 0$ ve dolayısıyla $\mathrm{Im}[\vec{S}] = 0$ olur. Bu durumda elektrik ve manyetik alanlar aynı fazdadır ve enerji kayıpsız biçimde z-yönünde taşınır.

İletken ortamda ise $\sigma \neq 0$ olduğundan $\phi \neq 0$ ve $\kappa \neq 0$. Bu nedenle $\vec{E}$ ile $\vec{H}$ arasında faz farkı oluşur ve dalga ortam içinde soğurulur. Sonuç olarak iletken ortamda elektromanyetik dalga hem yayılır hem de genliği üstel olarak azalır.