

NO: İSİM SOYİSİM:

FIZ 341 ELEKTROMANYETİK TEORİYE GİRİŞ FİNAL SINAVI
2025 - 2026 Güz, Fizik Bölümü, Pamukkale Üniversitesi, Denizli

Soru : 1 (25P) R yarıçaplı sonsuz uzun düz silindirin yan yüzeyinde $\sigma = a \sin(5\phi)$ yüzeysel yük yoğunluğu vardır. Burada a bir sabit ve ϕ silindirik koordinatlardaki açı koordinatıdır. Silindir içinde ve dışında potansiyeli bulunuz. (İpucu: Silindirik koordinatlarda Laplace denkleminin z den bağımsız çözümünü yapacaksınız.)

Soru : 2 (25P) Dielektrik sabiti κ olan lineer dielektrik maddeden yapılmış R yarıçaplı küre hacmine toplam Q serbest yükü düzgün dağılmıştır. Küre merkezinde potansiyel nedir? Referansı sonsuz alınız.

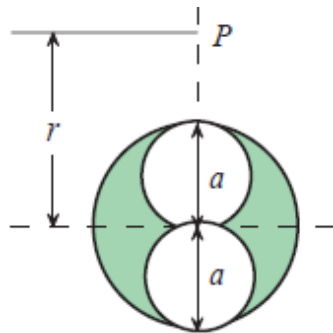
Soru : 3 (25P) Yarıçapı a olan sonsuz uzun düz silindir şeklindeki iletkenin kesit görüntüsü Şekil 1’de çizilmiştir. Buna göre iletken içinde çapı a olan iki tane silindirik boşluk vardır. Kararlı I akımı kağıt düzleminden dışa doğru yönelmiş ve iletken kesitine düzgün olarak dağılmıştır. P noktasındaki manyetik alanın büyüklüğünü ve yönünü bulunuz. (İpucu: Süperpozisyon ilkesini hatırlayın.)

Soru : 4 (25P) Sarım yoğunluğu n olan I akımı akan sonsuz uzun selenoit manyetik alınganlığı χ_m olan lineer malzemeyle doludur, Şekil 2. **a.** İçerideki, **b.** dışarıdaki manyetik alanı ve **c.** yüzeysel, **d.** hacimsel bağlı akım yoğunluğunu bulunuz.

BAŞARILAR ... 05.01.2026 Saat: 10.00 - 11.30 Prof.Dr. Muzaffer ADAK

Basit faydalı olabilecek formüller

$$V(P) - V(O) = - \int_O^P \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad \nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



Şekil 1:



Şekil 2:

C E V A P L A R

Cevap : 1 Laplace denklemi, $\nabla^2 V = 0$, iki-boyutta ve kutupsal koordinatlarda şöyledir

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Değişkenlerine ayırılım $V(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$.

$$\frac{\Phi}{r} (rR')' + \frac{R}{r^2} \Phi'' = 0$$

Bunu $r^2/R\Phi$ ile çarpalım

$$\underbrace{\frac{r}{R} (rR')'}_{+n^2} + \underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}_{-n^2} = 0$$

burada n herhangi bir sabit. Önce ϕ -denklemini çözelim

$$\Phi'' + n^2\Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(\phi) = A \sin(n\phi) + B \cos(n\phi)$$

Bir noktanın potansiyelinin bir tek değeri vardır, yani, $\Phi(\phi)$ tek-değerli olmalıdır; $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$. Bu durumda n tam sayı olmalıdır: $n = 0, 1, 2, \dots$. Şimdi de r -denklemini çözelim. $n \neq 0$ için

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0 \quad \Rightarrow \quad R(r) = Cr^n + Dr^{-n}$$

olurken $n = 0$ için yukarıdan başlamak daha iyidir. $(rR)'' = 0$ olduğundan $R(r) = b + c \ln r$ buluruz. O halde, genel çözüm şöyle olur.

$$V(r, \phi) = b + c \ln r + \sum_{n=1} (Cr^n + Dr^{-n}) [A \sin(n\phi) + B \cos(n\phi)]$$

Potansiyel referansa bağlıdır. Bu problemde $b = 0$ alabiliriz. (*Not:* $R_1 \leq r \leq R_2$ gibi sonlu aralıkta çalışırken $b \neq 0$ almak zorundayız! Bu durumda integral sabiti c de sıfırdan farklı olur!)

- İçeride ($r < R$): Orijin bölgemizde olduğu için $c = 0$ ve $D = 0$ olmalıdır.

$$V_{iç}(r, \phi) = \sum_{n=1} r^n [A_n \sin(n\phi) + B_n \cos(n\phi)]$$

- Dışarıda ($r > R$): Sonsuz bölgemizde olduğu için $c = 0$ ve $C = 0$ olmalıdır

$$V_{dış}(r, \phi) = \sum_{n=1} r^{-n} [C_n \sin(n\phi) + D_n \cos(n\phi)]$$

Şimdi de silindirin yan yüzeyindeki sınır şartlarını yazalım.

1. $r = R$ de $V_{iç} = V_{dış}$

$$\sum_{n=1} R^{-n} [C_n \sin(n\phi) + D_n \cos(n\phi)] - \sum_{n=1} R^n [A_n \sin(n\phi) + B_n \cos(n\phi)] = 0$$

$$2. r = R \text{ de } \partial V_{\text{dış}}/\partial r - \partial V_{\text{iç}}/\partial r = -\sigma/\epsilon_0$$

$$\sum_{n=1} nR^{-n-1}[C_n \sin(n\phi) + D_n \cos(n\phi)] + \sum_{n=1} nR^{n-1}[A_n \sin(n\phi) + B_n \cos(n\phi)] = \frac{a \sin(5\phi)}{\epsilon_0}$$

Bu iki denklemde polinom denkleğini kullanırsak $B_n = D_n = 0$ ve $n = 5$ hariç $C_n = A_n = 0$ buluruz. $n = 5$ için birinci denklem $C_5 = R^{10}A_5$ verir. Bunu ikinci denklemden elde edilen $5(C_5/R^6 + R^4A_5) = a/\epsilon_0$ denkleminde kullanırsak $A_5 = a/10\epsilon_0R^4$ ve ardından $C_5 = aR^6/10\epsilon_0$ buluruz. Sonuçta,

$$V_{\text{iç}} = \frac{a \sin(5\phi)}{10\epsilon_0} \frac{r^5}{R^4} \quad \text{ve} \quad V_{\text{dış}} = \frac{a \sin(5\phi)}{10\epsilon_0} \frac{R^6}{r^5}$$

Cevap : 2 Serbest yük ve küresel simetri var. O halde, $\oint_{\text{yüzey}} \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_{\text{iç}}^f$ kullanacağız.

$$\text{İçeride } (r \leq R) : \quad D_{\text{iç}} 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \Rightarrow \quad D_{\text{iç}} = \frac{1}{3} \rho r \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{\text{iç}} = \frac{\rho r}{3\epsilon} \hat{r}$$

$$\text{Dışarıda } (r \geq R) : \quad D_{\text{dış}} 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \Rightarrow \quad D_{\text{dış}} = \frac{\rho R^3}{3r^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{\text{dış}} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Böylece, $\kappa = \epsilon/\epsilon_0$ ve $\rho = 3Q/4\pi R^3$ olmak üzere

$$V = - \int_{\infty}^0 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{\infty}^R - \frac{\rho}{3\epsilon} \frac{r^2}{2} \Big|_R^0 = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} \left(1 + \frac{1}{2\kappa}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 + \frac{1}{2\kappa}\right)$$

Cevap : 3 Akım taralı bölgeye düzgün dağılmıştır. Taralı bölgenin alanı şudur.

$$A = \pi a^2 - 2\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{2}$$

Bu durumda hacimsel akım yoğunluğu aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$J = \frac{I}{A_{\perp}} = \frac{2I}{\pi a^2}$$

Şimdi manyetik alanın toplanabilirlik ilkesini kullanacağız. Yani, problemimiz a yarıçaplı dolu silindirde *dışa* doğru J akım yoğunluğuna sahip iletken artı iki tane $a/2$ yarıçaplı dolu silindirde *içe* doğru J akım yoğunluğuna sahip iletken problemine eşdeğerdir. P noktası üç silindirin de dışındadır. Sonsuz uzun düz silindirin dışında manyetik alan $\mu_0 I/2\pi z$ biçimindeydi ki burada z silindir ekseninden uzaklıktır. Buna göre, a yarıçaplı silindirin manyetik alanı sağ el kuralına göre *sola* doğrudur.

$$B_a = \frac{\mu_0 J \pi a^2}{2\pi r}$$

Üstteki $a/2$ yarıçaplı silindirin manyetik alanı sağ el kuralına göre *sağa* doğrudur.

$$B_{a/2}^{\text{üst}} = \frac{\mu_0 J \pi (a/2)^2}{2\pi (r - a/2)}$$

Alttaki $a/2$ yarıçaplı silindirin manyetik alanı sağ el kuralına göre *sağa* doğrudur.

$$B_{a/2}^{\text{alt}} = \frac{\mu_0 J \pi (a/2)^2}{2\pi (r + a/2)}$$

O halde, P noktasındaki toplam manyetik alan şöyle olur.

$$B = B_a - B_{a/2}^{\text{üst}} - B_{a/2}^{\text{alt}} = \frac{\mu_0 J \pi a^2}{2\pi} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{4(r - a/2)} - \frac{1}{4(r + a/2)} \right] = \frac{\mu_0 I}{\pi r} \left[\frac{2r^2 - a^2}{4r^2 - a^2} \right]$$

Yönü sola doğrudur.

Cevap : 4 Silindirin yüzeyinde serbet akımı I akımı var ama bağlı akımı bilmiyoruz. O nedenle, doğrudan manyetik alanı hesaplayamayız. Ama sonsuz uzun düz silindir olduğu için problemdeki simetrisel yardımcıyla önce \vec{H} alanını Ampere yasasının integral biçiminden kolayca hesaplarız.

$$\oint_{\text{eğri}} \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_{\text{iç}}^f \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_{\text{iç}} = nI\hat{z} \quad \text{ve} \quad \vec{H}_{\text{dış}} = 0$$

Sonra lineer manyetik ortam tanımını $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ yardımıyla manyetik alanı buluruz.

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu\vec{H} \quad \text{burada} \quad \mu := \mu_0(1 + \chi_m)$$

Buna göre

- a. $\vec{B}_{\text{iç}} = \mu_0(1 + \chi_m)nI\hat{z}$
- b. $\vec{B}_{\text{dış}} = 0$
- c. Bağlı yüzeysel akım yoğunluğu şöyledir.

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = \chi_m \vec{H}_{\text{iç}} \times \hat{r} = \chi_m n I \hat{\phi}$$

- d. Bağlı hacimsel akım yoğunluğu şöyledir.

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \chi_m \vec{\nabla} \times \vec{H} = \chi_m \vec{J}_f = 0$$